Groupe de travail Immeubles 97/98

COMPLEXES DE COXETER

Il existe dans un immeuble des sous-ensembles privilégiés auxquels on essaie systématiquement de se ramener. Ces sous-ensembles qui constituent en quelque sorte des tranches d'immeuble, sont appelés des *appartements*. Leur combinatoire est régie par l'action d'un groupe de Coxeter W. Le complexe de Coxeter de W est précisément la structure combinatoire que l'on attache à chaque appartement d'un immeuble de groupe de Weyl W.

Nous nous limitons ici à la présentation de ce « morceau de combinatoire» qui existe en présence seule d'un groupe de Coxeter. La raison pour laquelle on se ramène aux complexes de Coxeter dans les immeubles est qu'ils possèdent une représentation géométrique naturelle sous forme d'un cône. C'est par ce point de vue géométrique que nous allons commencer.

1. Géométrie simpliciale: cône de Tits

Nous allons mettre en place la réalisation géométrique très classique d'un système de Coxeter (W, S) telle qu'elle est construite chez N. Bourbaki. Il s'agit d'une représentation qui a la vertu de s'appliquer à n'importe quel groupe de Coxeter. Jusqu'à la fin de cette section, nous considérons un système de Coxeter (W, S) de matrice $M = [m(s, s')]_{s,s' \in S}$. L'écriture W_I désignera le sous-groupe standard $W_I := \langle s \mid s \in I \rangle$.

1.A *La représentation géométrique d'un système de Coxeter.* — Rappelons la présentation de W:

$$W := \langle s \mid (ss')^{m(s,s')} = 1 \quad \forall s, s' \in S \rangle.$$

On définit V le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $\#S$, de base les symboles α_s pour s dans S.

$$V := \bigoplus_{s \in S} \mathbf{R}\alpha_s$$

On peut définir une forme bilinéaire B de matrice $[-\cos(\frac{\pi}{m(s,s')})]_{s,s' \in S}$ dans la base $\{\alpha_s\}_{s \in S}$. Un examen de chaque plan $V_{s,s'} := \mathbf{R}\alpha_s \oplus \mathbf{R}\alpha_{s'}$ montre qu'en assignant à chaque s l'élément σ_s défini par $\sigma_s(\lambda) = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s$, on construit un morphisme de groupes $\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$ tel que $\sigma_{ss'}$ est d'ordre $m(s, s')$. Ce morphisme est injectif, c'est la raison pour laquelle on omettra le symbole σ pour faire agir W sur V.

1.2. Racines

La représentation précédente σ permet de parler de racines. Les racines constituent un premier type d'objets qui rendent les raisonnements plus géométriques.

Proposition/Définition. —
(i) Une racine *de W (pour σ) est un vecteur $\alpha \in V$ de la forme $\alpha = w.\alpha_s$ pour s dans S et w dans W. L'ensemble des racines est noté Φ, et est appelé le* système de racines *de W.*

(ii) Les vecteurs de base α_s sont appelés les racines simples.

(iii) Les racines positives *(respectivement* négatives*) - dont l'ensemble est noté Φ_+ (respectivement Φ_-) - sont les racines de W dont les coordonnées sont toutes positives (respectivement négatives) dans la base $\{\alpha_s\}_{s\in S}$.*
Pour signifier que la racine est positive (respectivement négative), on notera $\alpha > 0$ (respectivement $\alpha < 0$).

(iv) On a: $\Phi_+ = -\Phi_-$ et $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$. □

Dans le cas où le groupe de Coxeter est le groupe de Weyl d'une donnée radicielle de Kac-Moody, Φ est l'ensemble Δ^{re} des racines réelles.

1.3. Longueur

La longueur $\ell(w)$ d'un élément w de W est un entier défini de façon purement abstraite dans un système de Coxeter, puisqu'il s'agit de la longueur minimale d'un mot représentant w au moyen du système générateur S.
L'introduction des racines permet de prouver la proposition qui suit:

Proposition. —
Pour w dans W et s dans S, on note $\Phi_w := \Phi_+ \cap w^{-1}.\Phi_-$.
On a alors:

(i) Si $\ell(ws) < \ell(w)$, alors $s(\Phi_w \setminus \{\alpha_s\}) = \Phi_{ws}$.

(ii) On a les équivalences suivantes:

$$\ell(ws) > \ell(w) \Leftrightarrow w.\alpha_s > 0.$$
$$\ell(ws) < \ell(w) \Leftrightarrow w.\alpha_s < 0.$$

Dans tous les cas, $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$.

(ii) $\ell(w)$ est le nombre de racines positives rendues négatives par w, soit: $\ell(w) = \#\Phi_w$. □

La dernière des interprétations de $\ell(w)$ est à la base de nombreux raisonnements et axiomes combinatoires sur certains groupes possédant une BN-paire.

1.4. Cône de Tits

En toute généralité, il n'existe pas de produit scalaire sur V pour lequel l'action de W est unitaire. Un palliatif consiste à remplacer le produit scalaire par le crochet de dualité.
On introduit pour cela la représentation contragrédiente $\sigma^* : W \to \mathrm{GL}(V^*)$. On note $\langle . \mid . \rangle$ le crochet de dualité entre V et V^*.
Par définition, les actions de W sur V et V^* sont compatibles: pour f dans V^* et λ dans V, $\langle w.f \mid w.\lambda\rangle = \langle f \mid \lambda\rangle$.
On définit une famille d'hyperplans $\mathcal{H}$ munie de bonnes propriétés de la façon suivante:

Défintion. — (i) *Pour toute racine α de Φ, on note $\partial\alpha$ l'hyperplan* $\mathrm{Ker}(\alpha) \subset V^*$*. $\partial\alpha$ est le* mur *de la racine α. $\mathcal{H}$ est par définition l'ensemble des murs. C'est une famille indexée par Φ stable par W puisque pour toute racine α et tout élément w de W, on a $w(\partial\alpha) = \partial(w\alpha)$. Par convention, on identifie α et son demi-espace positif $\alpha^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$.*
(ii) *Pour toute partie I de S, on note*

$$F_I := \bigcap_{s\in I} \partial\alpha_s \cap \bigcap_{s\in S\setminus I} \alpha_s$$

F_I est la facette ouverte standard de type *I. La facette $F_\emptyset$ est notée C, elle est appelée la* chambre ouverte standard.

(iii) De manière générale, une facette ouverte *(respectivement* chambre ouverte*) est la transformée par un élément de W d'une facette ouverte (respectivement de la chambre ouverte) standard.*
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des facettes ouvertes de W.

(iv) On définit le cône $\bar{\mathcal{C}}$ comme étant l'ensemble des vecteurs de V^* strictement négatifs sur un nombre fini de racines positives seulement.
$\bar{\mathcal{C}}$ est appelé le cône de Tits. *$\mathcal{C}$ désigne l'intérieur de $\bar{\mathcal{C}}$.*

Le résultat suivant est immédiat:

Proposition/Définition. —
Pour I une partie de S, l'adhérence dans V^* d'une facette est décrite de la façon suivante:

$$\bar{F}_I = \bigcap_{s\in I} \partial\alpha_s \cap \bigcap_{s\in S\setminus I} (\alpha_s \cup \partial\alpha_s) = \bigcup_{J\supset I} F_J$$

$\bar{F}_I$ est appelée la facette fermée standard *de type I. Une* facette fermée *est une transformée de facette standard fermée par W.*
On note $\bar{\mathcal{F}}$ l'ensemble des facettes fermées de W. □

F_I est l'unique facette de dimension maximale dans $\bar{F}_I$. Le passage à l'adhérence établit donc une bijection entre les facettes fermées et les facettes ouvertes.

1.5. Action du groupe de Coxeter sur le cône de Tits

Les résultats concernant le cône de Tits et l'action de W sur celui-ci sont essentiellement résumés dans l'énoncé suivant:

Théorème. —
(i) $\bar{\mathcal{C}}$ est un cône convexe, W-stable. C'est la réunion des adhérences des chambres.

$$\bar{\mathcal{C}} = \bigcup_{w\in W} w(\bar{C}) = \bigcup_{\substack{w\in W\\ I\subset S}} w(F_I)$$

(ii) Soient w dans W, I et J des parties de S. Si $w(F_I)\cap F_J \neq \emptyset$, alors $I = J$ et w est un élément du sous-groupe spécial associé à I (engendré par les générateurs s de I). Ainsi, W_I est le stabilisateur et même le fixateur (point par point) de tout point de F_I.

(iii) $\bar{C}$ est un domaine fondamental pour l'action de W sur $\bar{\mathcal{C}}$: la W-orbite de tout point de $\bar{\mathcal{C}}$ rencontre $\bar{C}$ en exactement un point.

(iv) Chaque segment tracé dans $\bar{\mathcal{C}}$ rencontre un nombre fini de facettes ouvertes.
Démonstration.

Preuve de *(i)*: L'égalité des réunions est évidente d'après la décomposition de la chambre standard fermée.

On note U la réunion $\bigcup_{w \in W} w(\bar{C})$.
Soient α une racine positive, et f dans U qu'on peut écrire $f = w(g)$ pour g dans la chambre standard et w dans W.
On a: $\langle \alpha \mid f \rangle < 0 \Leftrightarrow \langle w^{-1}.\alpha \mid g \rangle < 0 \Leftrightarrow w^{-1}.\alpha \in \Phi_-$.
Donc $\#\{\alpha \in \Phi_+ \mid \langle \alpha \mid f \rangle < 0\} = \#\Phi_w = \ell(w)$. D'où $U \subset \bar{\mathcal{C}}$.
Réciproquement, soit f dans $\bar{\mathcal{C}}$. On note $\Phi(f) := \{\alpha \in \Phi_+ \mid \langle \alpha \mid f \rangle < 0\}$.
Par hypothèse, $\Phi(f)$ est fini.
Montrons par récurrence sur $\#\Phi(f)$ que f est dans U.
Si $\Phi(f) = \emptyset$, f est dans la chambre standard.
Sinon, on peut choisir une racine simple négative sur f, car les racines positives sont des combinaisons linéaires positives des racines simples. Il existe s dans S tel que $\langle \alpha_s \mid f \rangle < 0$.
Dans ce cas, $\Phi(s.f) = \{\alpha \in \Phi_+ \mid \langle \alpha \mid sf \rangle < 0\} = s\{s\alpha \in s\Phi_+ \mid \langle s\alpha \mid f \rangle < 0\}$
Or, puisque s stabilise globalement les racines positives distinctes de α_s, dernier ensemble vaut: $s\{\beta \in \Phi_+ \setminus \{\alpha_s\} \cup \{-\alpha_s\} \mid \langle \beta \mid f \rangle < 0\} = s\{\beta \in \Phi_+ \setminus \{\alpha_s\} \mid \langle \beta \mid f \rangle < 0\} = s\big(\Phi(f) \setminus \{\alpha_s\}\big)$.
Par hypothèse de récurrence, $s.f$ est dans U, donc f également.

Preuve de *(ii)*: Pour ce point, on fait aussi une récurrence, sur $\ell(w)$.
Si $w = 1$, l'assertion est évidente.
Si $\ell(w) > 0$, il existe s dans S tel que $\ell(sw) < \ell(w)$ (prendre une écriture réduite de w).
On a donc $\ell(w^{-1}s) < \ell(w^{-1})$ soit $w^{-1}.\alpha_s < 0$ ou encore $-\alpha_s \supset w(C)$.
On a donc $-\bar{\alpha}_s \supset w(\bar{C})$.
Or, $\bar{\alpha}_s \supset \bar{C}$. Par conséquent, $\partial\alpha_s \supset \bar{C} \cap w(\bar{C})$.
s fixe point par point $F_I \cap w(F_J)$ qui est non vide par hypothèse, et dans $\partial\alpha_s$.
D'où: $s\big(F_I \cap w(F_J)\big) = s(F_I) \cap sw(F_J) = F_I \cap sw(F_J)$ est non vide.
Ceci implique par hypothèse de récurrence que I et J coïncident, et que sw et donc w sont dans W_I.

Preuve de *(iii)*: Que chaque orbite rencontre $\bar{C}$ provient de *(i)*.
On se donne f et g dans $\bar{C}$ telles que pour un w dans W, $g = w(f)$.
On suppose f dans la facette standard F_I et g dans la facette standard F_J.
Alors $F_I \cap w(F_J) \neq \emptyset$, d'où $w \in W_I$. w fixe alors f. Finalement $g = w(f) = f$.

Preuve de *(iv)*: On appelle f et g les extrémités d'un segment fermé tracé dans $\bar{\mathcal{C}}$. Il suffit de prouver l'assertion suivante:

Si f est dans $\bar{C}$ et si g est dans $w(\bar{C})$, alors $[f;g]$ est recouvert par un nombre fini de facettes ouvertes.

On procède par récurrence sur $\ell(w)$.
Si $w = 1$ on reste dans la chambre standard fermée qui est une réunion finie de facettes ouvertes.
Si $\ell(w) > 0$, on a $[f;g] \cap \bar{C} = [f;h]$ pour h dans $\bar{C}$ ($h \neq g$).
Seul $[h;g]$ pose problème *a priori*. h est nécessairement sur un mur $\partial\alpha_s$ de $\bar{C}$, sinon il admet un voisinage intérieur à C qui contient $[f;g]$ au-delà de h dans la direction de g.
Ceci implique que $w(C) \subset -\alpha_s$, soit $w^{-1}.\alpha_s < 0$ et donc $\ell(sw) < \ell(w)$.
On peut alors par hypothèse de récurrence recouvrir $[h;s(g)]$ par un nombre fini de facettes ouvertes, et donc $s\big([h;s(g)]\big) = [s(h);s^2(g)] = [h;g]$.

Remarquons que la deuxième assertion de ce théorème permet de parler du type d'une facette non standard.

Défintion. —
(i) Le type *d'une facette du cône de Tits est le type de la facette standard (bien déterminée) dont elle est la transformée par un élément de W.*

(ii) Une facette est dite sphérique *ou* de type fini *si son type I est tel que W_I est fini.*
Justification.
Si w et z sont deux éléments de W tels que wF et wF est adhérente à C ($wF = F_I$ et $zF = F_J$ pour des parties I et J de S), on a alors: $F_J = (zw^{-1})wF = (zw^{-1})F_I$. Par ce qui précède, on a bien $I = J$.

□

Une autre conséquence du théorème est que le fixateur d'une facette F est le sous-groupe engendré par les réflexions d'hyperplan un mur contenant F. Le nombre de murs contenant une facette sphérique est donc fini.

2. Liens entre la géométrie et la combinatoire

En toute rigueur, un complexe de Coxeter est un objet combinatoire. C'est un cas particulier de système de chambres, classe très large dans laquelle on trouve aussi une façon de définir les immeubles.
Nous allons succintement exposer ces idées combinatoires pour voir comment on peut les retrouver sur le cône de Tits.

2.1. Complexes simpliciaux

Avant tout, précisons en quoi il est question de complexes simpliciaux.

Défintion. —
Un complexe simplicial *est un ensemble ordonné $(\Delta, \leq)$ qui vérifie les propriétés suivantes:*

(i) Pour A et B dans Δ, il existe un plus grand minorant commun à A et B dans Δ.
(ii) Pour tout A de Δ, l'ensemble $\Delta_{\leq A}$ des minorants de A est en bijection ordonnée avec l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Proposition/Définition. —
L'application de $\left(\bigcup_{I\subset S} W/W_I, \supset\right)$ dans $\left(\bar{\mathcal{F}}, \subset\right)$ qui attache à wW_I la facette $w\bar{F}_I$, est bien définie et est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, qui fait de $\bigcup_{I\subset S} W/W_I$ un complexe simplicial. $\left(\bigcup_{\substack{w\in W\\ I\subset S}} W/W_I, \supset\right)$ est appelé le complexe de Coxeter *associé à (W, S).*

L'isomorphisme d'ensembles ordonnés peut se voir de la façon suivante. W opère sur le complexe de Coxeter par translations à gauche. Les bijections consistent à prendre le fixateur d'une classe et à associer à la classe la facette fixée par ce sous-groupe, et vice-versa.

Démonstration. Géométriquement, la première condition est remplie car: $\bar{F}_I = \bigcup_{J\supset I} F_J$ L'ensemble fini voulu est $S \setminus I$.

La seconde l'est aussi car l'intersection de deux facettes fermées est toujours une facette fermée, au pire $\{0\}$.

$\square$

Il existe une autre définition des complexes simpliciaux, qui ne fait intervenir que le point de vue des sommets.

DÉFINTION. —
Un complexe simplicial abstrait *d'ensemble de sommets $\mathcal{V}$ (pour $\mathcal{V}$ un ensemble) est un ensemble $\mathcal{S}$ de parties de $\mathcal{V}$ qu'on appelle* simplexes*, qui possède les propriétés suivantes:*

(i) Chaque singleton $\{v\}$ pour v dans $\mathcal{V}$ est un simplexe.
(ii) Chaque partie d'un simplexe est un simplexe, une telle partie étant appelée une face *du simplexe initial.*

Revenons à notre cas particulier, en faisant tout d'abord une identification. Considérons l'ensemble de classes $\Big(\bigcup_{I\subset S} W/W_I, \supset\Big)$. On identifie tout élément wW_I de cet ensemble à la partie des classes qui contiennent wW_I. De cette façon, on obtient un morphisme injectif d'ensembles ordonnés

$$\phi : \Big(\bigcup_{I\subset S} W/W_I, \supset\Big) \to \Big(\mathcal{P}(\bigcup_{I\subset S} W/W_I), \subset\Big)$$

d'image un complexe simplicial au sens de cette dernière définition.

2.2. Systèmes de chambres abstraits

Comme annoncé, les systèmes de chambres possèdent une définition très large, presque naïve...

DÉFINTION. —
(i) Un système de chambres *sur un ensemble I est un ensemble E muni d'un relation d'équivalence par élément de i de I, relation qu'on appelle i-*adjacence*. Les éléments de E sont appelés les* chambres*; on parle de chambres i-*adjacentes *(ou* adjacentes*) si elles sont équivalentes par la relation d'indice i (ou par une des relations).*

*(ii) Pour J une partie de I, on appelle J-*galerie *une suite de chambres telles que deux consécutives d'entre elles sont i-adjacentes pour i dans J.*

*(iii) Une partie est dite J-*connexe *si deux chambres de cette partie sont toujours reliées par une J-galerie.*

(iv) Les composantes J-connexes de E sont appelés les résidus de type J *de E.*

On peut donner essentiellement deux exemples de systèmes de chambres qui vont nous concerner.

1. Si G est un groupe, B un sous-groupe, et $(P_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-groupes contenant B, on peut munir d'une structure de système de chambres sur I les classes gB en décrétant gB i-adjacente à hB si et seulement si $gP_i = hP_i$.

2. Le *complexe de Coxeter* associé à (W, S) est le système de chambres attaché de la manière précédente à la donnée $G := W$, $B := \{1\}$, $I := S$ et $P_s := \{1; s\}$.
Les chambres sont les $w \in W$, les paires de chambres s-adjacentes sont les paires $\{w; ws\}$.

2.3. Complexes de Coxeter comme systèmes de chambres

Notons $\underline{\mathcal{C}}$ l'ensemble abstrait des chambres fermées de $\bar{\mathcal{C}}$. La deuxième assertion du théorème 1.5. montre que l'action de W est libre et donc simplement transitive sur $\underline{\mathcal{C}}$.

Défintion. —
(i) Une cloison *est une facette de type $\{s\}$ pour un s dans S.*

(ii) *Pour s dans S, on dira que deux chambres $\bar{C}$ et $\bar{D}$ dans $\bar{\mathcal{C}}$ sont* s-adjacentes (géométriquement) *si elles ont en commun une cloison de type s.*

On a clairement d'après le théorme 1.E:

Proposition/Définition. — (i) *En identifiant une chambre et l'élément du groupe W par lequel elle est transformée de la chambre standard, les relations de s-adjacence géométrique et combinatoire coïncident. $\underline{\mathcal{C}}$ est donc le complexe de chambres associé au système de Coxeter (W, S).*

(ii) *La* distance combinatoire $d(D, D')$ *de la chambre $\bar{D} = w(\bar{C})$ à la chambre $\bar{D}' = w'(\bar{C})$ est par définition $d(\bar{D}, \bar{D}') := w^{-1}w'$. Ainsi deux chambres sont s-adjacentes si et seulement si elles sont à distance (combinatoire) s.* □

À ce stade, il s'agit de voir que les objets géométriques définis en termes de chambres et de racines, possèdent un analogue combinatoire.

2.D *Analogues combinatoires d'objets géométriques.* — Il est clair que puisque les définitions géométrique et combinatoire de l'adjacence coïncident, on a une représentation intuitive des galeries. Il reste à reconsidérer la définition des racines et à identifier facettes et résidus.

Proposition. — (i) *Pour $J \subset S$, le J-résidu de la chambre standard $\bar{C} \subset \bar{\mathcal{C}}$ est exactement l'ensemble des chambres qui contiennent F_J dans leur adhérence.*
(ii) *Pour s dans S, la racine simple α_s est la réunion des chambres $\bar{D}$ qui vérifient*

$$\ell \circ d(\bar{C}, \bar{D}) < \ell \circ d(s\bar{C}, \bar{D}).$$

(iii) *En transformant par des éléments de W adéquats, on a donc:*

La racine $\alpha = w\alpha_s$ peut être définie combinatoirement comme la réunion des chambres $\bar{D}$ qui vérifient: $d(w\bar{C}, \bar{D}) < d(ws\bar{C}, \bar{D})$. Le résidu associé à une facette n'est autre que l'ensemble des chambres auxquelles F est adhérente dans $\bar{\mathcal{C}}$. Cet ensemble est fini pour une facette sphérique.
Démonstration. Point (i). On peut toujours paramétrer les chambres par les w dans W. Alors:

$$d(\bar{C}, w\bar{C}) < d(s\bar{C}, w\bar{C}) \Leftrightarrow \ell(w) < \ell(sw) \Leftrightarrow \ell(w^{-1}) < \ell(w^{-1}s)$$
$$\Leftrightarrow w^{-1}\alpha_s > 0 \Leftrightarrow w^{-1}\alpha_s \supset C \Leftrightarrow \alpha_s \supset wC$$

Point (ii). Le résidu de F_I est l'ensemble des chambres atteintes par une galerie partant de $\bar{C}$ et dont le mot associé est dans W_I. Puisque W_I fixe F_I, toutes les chambres du résidu contiennent F_I dans leur adhérence.

Réciproquement, soit D une chambre telle que $\bar{D}$ contient F_I. On peut écrire $D = wC$. Puisque $\bar{D} \cap \bar{C} \supset F_I$, il existe deux facettes ouvertes standard F_J et F_K telles que $F_J \cap wF_K \supset F_I$. Ceci implique que $F_I = F_J = F_K$ et que $w \in W_I$, donc que $\bar{D}$ est dans la composante I-connexe $\bar{C}$. □

Principe: on retrouve les notions combinatoires attachées aux complexes de chambres sur la réalisation géométrique de W par le cône de Tits, en se limitant aux racines (respectivement aux murs) plutôt que de considérer les traces sur $\bar{\mathcal{C}}$ de tous les demi-espaces (respectivement hyperplans) de V^*.

2.E *Convexité combinatoire.* — Ce principe s'applique par exemple à la convexité.

Défintion. — (i) *L'*enclos *d'une partie* Ω *rencontrant une chambre ouverte de* $\bar{\mathcal{C}}$ *est la réunion des chambres fermées apparaissant dans une galerie minimale entre chambres ouvertes contenant des points de* Ω.
(ii) *Une telle partie* Ω *est dite* close (*ou* combinatoirement convexe) *si elle est égale à son enclos.*

La proposition qui suit fait voir que l'enclos est l'analogue combinatoire de l'enveloppe convexe de Ω puisqu'il est classique que l'enveloppe convexe de Ω est l'intersection des demi-espaces qui contiennent Ω.

Proposition. — *L'enclos d'une partie* Ω *de* $\bar{\mathcal{C}}$ *est égal à l'intersection des racines qui la contiennent.* □

2.F *Automorphismes.* — Un automorphisme de complexe de Coxeter au sens strict est une bijection du complexe sur lui-même qui préserve une par une les relations d'adjacence. On peut être moins restrictif en requérant seulement la conservation de la distance combinatoire composée à gauche avec la longueur.

Proposition. — *Le groupe des automorphismes du complexe de Coxeter associé à un groupe de Coxeter* W *est précisément* W *agissant par multiplication à gauche.* □

Les automorphismes qui s'ajoutent dans le second cas sont les automorphismes qui stabilisent géométriquement la chambre. Il s'agit des fameux automorphismes de diagrammes qui ont lieu si la chambre possède des symétries, autrement dit si le diagramme de Coxeter en possède. Dans ce cas, le groupe des automorphismes (au sens moins restrictif) est le produit semi-direct de W par les automorpismes de diagrammes.

3. Réalisations géométriques alternatives

La réalisation géométrique d'un complexe de Coxeter par le cône de Tits est toujours valable, mais n'est pas nécessairement la plus adaptée dans des situations particulièrement favorables. Nous présentons deux telles situations, caractérisées par la signature de la forme B associée à la matrice de Coxeter.

3.A *Groupes de Coxeter affines.* — On se place dans le cas où $\#S > 1$ et où la signature de la forme B est $(n := \#S - 1, 0)$. Alors, d'après la classification des matrices de Vinberg, il existe un vecteur $\alpha_0 = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s$ avec $c_s > 0$ pour tout s, tel que $B^\perp = \mathbf{R}\alpha_0$. Naturellement, B restreinte à $V/V^\perp$ est un produit scalaire qu'on peut transporter sur l'orthogonal $Z := \mathrm{Ker}(\alpha_0) \subset V^*$ de $V^\perp$ au sens de la dualité. Ceci muni $E := \alpha_0^{-1}(1)$ d'une structure d'espace affine euclidien. Chaque mur $\partial\alpha_s$ est transverse à E, d'où des hyperplans $\partial\alpha_s \cap E$ dans E. Il est clair que E est stable sous W car W fixe α_0 et respecte le crochet de dualité. Le fait notable est:

Proposition. — W *est le sous-groupe de* $O_B(E)$ *engendré par les réflexions affines par rapport aux* $\partial\alpha_s \cap E$. □

On obtient donc une représentation géométrique de W comme groupe engendré par des réflexions (affines).

– Ce qu'on perd: le sommet du cône dont le stabilisateur est W tout entier.
– Ce qu'on gagne: la possibilité de mettre une structure métrique sur l'appartement, ce qui est essentiel au niveau des immeubles possédants de tels appartements (groupes réductifs sur un corps local), car on peut faire des raisonnements de courbure négative généralisée.

3.B *Signature* $(n-1,1)$. *Théorème de Poincaré.* — Pour être plus allusif encore, disons que cette signature permet de faire opérer W sur l'espace hyperbolique réel $\mathrm{H}^{n-1}(\mathbf{R})$, ce qui autorise les raisonnements de courbure strictement négative. Dans le cas du plan hyperbolique, on peut aussi faire usage du théorème de Poincaré pour obtenir une action simplement transitive d'un groupe de Coxeter possédant un polygône hyperbolique comme domaine fondamental. La courbure négative permet de faire opérer des groupes de Coxeter possédant un nombre de générateurs supérieur à la dimension de l'espace de représentation.