

## IMMEUBLES EUCLIDIENS : CONSTRUCTIONS MÉTRIQUES

Dans tout ce qui suit, on se donne un immeuble  $\Delta$ . On sait qu'on peut lui associer une matrice de Coxeter  $M$  bien déterminée, qui décrit la géométrie combinatoire de chacun des appartements. Il s'agit de montrer que sous certaines hypothèses, l'immeuble vu comme complexe simplicial possède une réalisation géométrique très riche. Cette hypothèse est la suivante : la matrice de Coxeter  $M$  de  $\Delta$  est irréductible et surtout elle est de type affine dans la classification de Vinberg, c'est-à-dire que la forme bilinéaire symétrique associée est semi-définie positive sans être un produit scalaire.

La réalisation géométrique  $|\Delta|$  de l'immeuble va être construite à partir de l'affinisation d'un cône de Tits pour chaque appartement. Sa propriété fondamentale est qu'elle est – en un sens très général – à courbure négative, ce qui va fournir un théorème de point fixe de type Cartan, en généralisant celui-ci.

### 1. Préparatifs

Nous énonçons ici quelques préliminaires pour la construction de la réalisation métrique d'un immeuble euclidien. Le problème principal est le passage de la combinatoire à la géométrie, aussi bien pour les ensembles que pour les morphismes. La référence pour cette section est le chapitre 3.2 de [G].

**1.A** *Argument standard d'unicité.* — Nous revenons à ce petit raisonnement classique et très utile, pour l'écrire en toutes lettres puisqu'il est fréquemment utilisé.

Rappelons qu'un complexe simplicial est un *complexe de chambres* si tout simplexe est contenu dans un simplexe maximal - une *chambre* - et si pour toute paire  $\{x; y\}$  de simplexes maximaux, il existe une suite  $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$  de simplexes maximaux consécutivement adjacents *i.e* telle que  $x_i$  et  $x_{i+1}$  ont un simplexe de codimension 1 - une *cloison* - en commun. Une telle suite s'appelle une *galerie*. Un *morphisme* de complexes de chambres est une application simpliciale qui envoie une chambre sur une autre en préservant les codimensions des sous-simplexes - les *faces*.

LEMME. — *Soient  $X$  et  $Y$  deux complexes de chambres tels que toute cloison est face d'au plus deux chambres. On fixe une chambre  $C$  de  $X$ , et on se donne  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  deux morphismes qui fixent  $C$  sommet par sommet et qui envoient une galerie non bégayante sur une galerie non bégayante. Alors,  $f = g$ .*

*Démonstration.* On part d'une galerie non bégayante issue de  $C : C = C_0, C_1, \dots, C_n = D$ , c'est-à-dire telle que  $C_i \neq C_{i+1}$  pour tout  $i \leq n - 1$ . On suppose que  $f$  et  $g$  coïncident sur les chambres d'indice inférieur à  $i + 1$ . Alors  $fC_i$  et  $fC_{i+1}$  sont deux chambres adjacentes, de cloison commune  $fC_i \cap fC_{i+1}$ . Cette cloison est aussi  $gC_i \cap gC_{i+1} = f(C_i \cap C_{i+1})$  parce que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $C_i$ . Il n'y a par hypothèse qu'une seule autre chambre partageant cette cloison avec  $fC_i$ . Puisque les deux galeries images sont non bégayantes, on a nécessairement  $fC_{i+1} = gC_{i+1}$ . On conclut en remarquant que par définition, toute chambre peut être connectée à  $C$  par une galerie.  $\square$

**1.B Réalisation géométrique.** — Un autre préliminaire aux préliminaires consiste à définir la réalisation géométrique d'un complexe simplicial (via un ensemble de fonctions).

DÉFINITION. — *La réalisation géométrique d'un complexe simplicial  $(X, \mathcal{V})$  est l'ensemble  $|X|$  des fonctions à valeurs réelles positives sur l'ensemble de sommets  $\mathcal{V}$ , à support inclus dans un simplexe et qui vérifient  $\sum_{v \in \mathcal{V}} f(v) = 1$ .*

On peut définir une application continue pour la distance  $d_\infty(f, g) := \sup_v |f(v) - g(v)|$  entre réalisations géométriques à partir d'un morphisme de complexes simpliciaux  $\phi : X \rightarrow Y$  à condition que la restriction de ce dernier à chaque simplexe soit injective. On définit alors cette application  $|\phi|$  de la façon suivante : pour toute  $f$  de  $|X|$ , pour tout simplexe  $x$  contenant le support de  $f$  et pour tout sommet  $v'$  de  $Y$ ,  $(|\phi|f)(v')$  vaut  $f(\phi^{-1}v')$  si  $v'$  est dans  $\phi(x)$ , 0 sinon.

Considérons le cas particulier de l'inclusion d'un simplexe  $x$  de  $X$ . D'abord, il est clair que la réalisation géométrique d'un simplexe  $\{v_0; v_1; \dots; v_m\}$  est

$$\{(t_0, t_1, \dots, t_m) \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^m t_i = 1\},$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'un simplexe géométrique au sens usuel. On vérifie facilement que l'application associée à l'inclusion est  $f \mapsto (f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_m))$ .

Une autre situation intéressante est celle où l'ensemble des sommets du complexe simplicial est réalisé comme ensemble de points dans un espace vectoriel réel  $E$ . On note  $\iota : \mathcal{V} \hookrightarrow E$  l'inclusion correspondante. Il est commode d'introduire pour tout simplexe  $x$ ,  $\text{ch}(x)$  l'enveloppe convexe dans  $E$  des images des sommets par  $\iota$ . On définit la fonction  $|\iota| : |X| \rightarrow E$

$$f \mapsto f(v_0)\iota(v_0) + f(v_1)\iota(v_1) + \dots + f(v_m)\iota(v_m) \in \text{ch}(x),$$

où  $f$  est de support inclus dans le simplexe  $x = \{v_0; v_1; \dots; v_m\}$ . On a alors :

LEMME. — (i)  $|\iota|$  est injective si et seulement si dès que deux enveloppes convexes de simplexes s'intersectent non trivialement dans  $E$ , les simplexes sont égaux (auquel cas les images de sommets d'un simplexe sont affinement indépendantes).

(ii)  $|\iota|$  est un homéomorphisme sur son image dans  $E$ , dès qu'elle est injective et que l'ensemble des images des simplexes est localement fini.  $\square$

**1.C Métrique sur un complexe de Coxeter affine.** — On se contente de rappeler ici l'amélioration qu'on peut apporter à la construction du cône de Tits d'un système de Coxeter  $(W, S)$  quand celui-ci est – comme on l'a supposé – affine et irréductible (à diagramme connexe). On considère donc l'espace vectoriel  $V := \bigoplus_{s \in S} \mathbf{R}\alpha_s$  sur lequel est définie la forme bilinéaire  $B$  de

matrice  $[-\cos(\frac{\pi}{m(s, s')})]_{s, s' \in S}$  dans la base  $\{\alpha_s\}_{s \in S}$ , et dans le dual  $V^*$  duquel on définit le cône de Tits  $\mathcal{C}$ . On se place donc dans le cas où  $\#S > 1$  et où la signature de la forme  $B$  est  $(n := \#S - 1, 0)$ . Alors, d'après la classification des matrices de Vinberg, il existe un vecteur  $\alpha_0 = \sum_{s \in S} c_s \alpha_s$  avec  $c_s > 0$  pour tout  $s$ , tel que  $B^\perp = \mathbf{R}\alpha_0$ . Naturellement,  $B$  restreinte à  $V/V^\perp$  est un produit scalaire qu'on peut transporter sur l'orthogonal de  $V^\perp$  au sens de la dualité  $Z := \text{Ker}(\alpha_0) \subset V^*$ . Ceci munit  $E := \alpha_0^{-1}(1)$  d'une structure d'espace affine euclidien. Chaque mur  $\partial\alpha_s$  est transverse à  $E$ , d'où des hyperplans  $\partial\alpha_s \cap E$  dans  $E$ . Il est clair que  $E$

est stable sous  $W$  car  $W$  fixe  $\alpha_0$  et respecte le crochet de dualité. On peut alors prouver la liste de résultats suivants (qu'on peut voir comme affinisés des résultats classiques sur le cône de Tits général) :

THÉORÈME. — (i) *La trace du cône  $C$  sur  $E$  est  $E$  tout entier, et la trace des facettes fournit la décomposition suivante :*

$$E = \bigsqcup_{w \in W, I \subset S} E \cap wF_I.$$

(ii) *La collection des traces de murs de  $V^*$  sur  $E$  est une famille localement finie d'hyperplans affines de  $E$ .*

(iii)  *$W$  s'identifie naturellement au groupe engendré par les réflexions orthogonales par rapport à ces hyperplans.*

(iv) *La trace d'une chambre du cône de Tits sur  $E$  fournit un domaine fondamental relativement compact pour  $W$  sur  $E$ .*  $\square$

En fonction de ce qu'on a dit dans la section précédente, on a :

COROLLAIRE/DÉFINITION. — *La réalisation géométrique du complexe simplicial sous-jacent au complexe de Coxeter d'une matrice  $M$  affine et irréductible est homéomorphe à l'espace affine euclidien  $E$ , d'où un transport de structure métrique. En normalisant la métrique de façon à ce que les chambres soient de diamètre 1, on définit la métrique canonique du complexe de Coxeter affine.*  $\square$

**1.D Réalisation géométrique des flèches simpliciales.** — Il reste à examiner le problème des relèvements métriques des applications simpliciales. Une application directe est que la métrique définie par le corollaire 1.C est bien déterminée par le complexe de Coxeter.

THÉORÈME. — *Soient  $(W, S)$  et  $(W', S')$  deux systèmes de Coxeter affines irréductibles de complexes de Coxeter isomorphes par un morphisme  $\phi : \Sigma(W, S) \rightarrow \Sigma(W', S')$ . Alors, leurs réalisations géométriques sont isométriques pour leurs métriques canoniques, l'isométrie étant établie par la réalisation géométrique  $|\phi|$  de  $\phi$ .*

*Démonstration.* On va montrer – ce qui est suffisant – que la réalisation géométrique  $|\phi|$  respecte les produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$  de  $|\Sigma(W, S)|$  et  $|\Sigma(W', S')|$ , à constante multiplicative près. On introduit la numérotation  $S := \{s_0; s_1; \dots; s_n\}$  pour distinguer la réflexion d'indice 0. On fixe une chambre  $C$  de  $|\Sigma(W, S)|$ , de cloisons  $A_0, A_1, \dots, A_n$  supportées par les murs  $H_0, H_1, \dots, H_n$  d'équations respectives :

$$H_i = \{\langle \cdot, e_i \rangle = 0\} \quad i \geq 1, \quad H_0 = \{\langle \cdot - x_0, e_0 \rangle = 0\}$$

avec  $x_0$  dans  $H_0$  et  $e_i$  vecteur unitaire normal à  $H_i$  pointant vers  $C$ . En multipliant le produit scalaire, on peut supposer que  $\langle e_0, x_0 \rangle = 1$ . On considère alors l'image  $C'$  de  $C$  par  $\phi$ , à partir de laquelle on fait les mêmes opérations dans  $|\Sigma(W', S')|$ , ce qui introduit les mêmes objets désignés par les mêmes notations agrémentées d'un  $'$ . Or, la matrice de Coxeter de  $\Sigma(W, S)$  renferme aussi bien les informations de géométrie combinatoire de  $\Sigma(W, S)$  que le produit scalaire (via la forme  $B$ ) :  $2m_{ij}$  est le nombre de chambres contenant une facette de type  $S \setminus \{i, j\}$ . Ceci impose que  $\langle e_i, e_j \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle'$ , d'où la possibilité de définir une application linéaire  $\Phi : E \rightarrow E'$  par  $\Phi(e_i) = e'_i$  pour  $i \geq 1$ . De la conservation du produit scalaire découle  $\Phi(e_0) = e'_0$ , et  $\Phi(H_i) = H'_i$ . Ainsi  $\Phi s_i \Phi^{-1} = s'_i$ , et donc  $\Phi$  fournit un isomorphisme de

complexes de Coxeter  $\Phi_*$  de réalisation géométrique  $|\phi|$ . Par l'argument d'unicité standard (ces deux isomorphismes envoient  $C$  sur  $C'$  et  $A_i$  sur  $A'_i$ ), on a  $\phi = \Phi_*$ . La seule modification effectuée pour obtenir un automorphisme unitaire est une dilatation de produit scalaire, d'où le résultat.  $\square$

Des résultats similaires seront utilisés concernant les rétractions sur un appartement ou sur une chambre, au cours de l'étude de la réalisation métrique des immeubles affines.

## 2. Métrique sur un immeuble euclidien

On sait déjà que l'immeuble  $\Delta$  est un complexe simplicial, et qu'à ce titre il possède une réalisation géométrique au sens de la section 1.B. Cette réalisation n'est pas *a priori* très agréable, mais on sait au moins que les facettes (resp. les appartements) sont homéomorphes à des simplexes au sens usuel (resp. à des espaces affines euclidiens). La référence pour cette section est [B, VI.1-3].

**2.A** *Le candidat canonique.* — On sait mesurer des distances dans chaque appartement de l'immeuble en le munissant de sa métrique canonique. On peut donc mesurer la distance de deux points quelconques en choisissant un appartement les contenant (qui existe toujours par un axiome des immeubles). C'est un autre axiome des immeubles qui va justifier que le choix est indifférent, sans donner immédiatement d'information supplémentaire sur la fonction  $d$  qu'on définit de cette façon.

Si  $x$  et  $y$  sont des points de  $|\Delta|$ , on sait qu'il existe une réalisation géométrique d'appartement  $E$  qui les contient. On pose alors  $d(x, y) := d_E(x, y)$ . Supposons qu'il existe une autre réalisation géométrique d'appartement qui contient ces deux points, et notons  $E'$  sa réalisation géométrique. Par un des axiomes des immeubles, il existe un isomorphisme simplicial entre les appartements sous-jacents, qui fixe les facettes ouvertes définies par les points.

On sait qu'on peut relever par 1.D cet isomorphisme en une isométrie de  $E$  sur  $E'$ , qui fixe les points  $x$  et  $y$ . Par conséquent :  $d(x, y)$  est indépendant de la réalisation géométrique d'appartement choisie pour contenir les deux points, d'où :

LEMME/DÉFINITION. — *Il existe une unique application*

$$d : |\Delta| \times |\Delta| \rightarrow \mathbf{R}$$

*qui coïncide avec la métrique canonique de chaque réalisation métrique d'appartement. On appelle  $d$  la métrique canonique de  $|\Delta|$ .*  $\square$

Remarquons que nous ne savons rien d'autre de cette application, contrairement à ce que laisse penser son appellation.

**2.B** *Rétraction sur un appartement et inégalité triangulaire.* — La démarche ici est un peu surprenante, puisqu'on va prouver que les rétractions sont contractantes pour la fonction  $d$ , ce qui permettra ensuite de montrer que cette fonction est précisément une distance.

LEMME. — (i) *Soient  $\mathbb{A}$  un appartement de réalisation métrique  $E$ ,  $C$  une chambre de  $\mathbb{A}$  et  $\rho$  la rétraction sur  $\mathbb{A}$  centrée en  $C$ . Alors  $\rho$  se relève en une application  $\rho : |\Delta| \rightarrow E$  telle que*

$$\forall x, y \in |\Delta| \quad d(\rho x, \rho y) \leq d(x, y), \text{ avec égalité dès que l'un des points est dans } |C|.$$

*De plus, la restriction de  $\rho$  à chaque chambre est isométrique.*

(ii) La fonction  $d$  est une distance sur  $|\Delta|$ .

*Démonstration.* Point (i). Remarquons tout d'abord que  $\rho$  étant un isomorphisme simplicial entre  $\mathbb{A}$  et tout appartement contenant  $C$ , il se relève en une isométrie entre réalisations métriques de ces appartements, qui est la restriction de la réalisation métrique de  $\rho$ . Ceci prouve que  $\rho$  conserve la valeur de la fonction  $d$  sur deux points d'une même chambre  $D$  puisque celle-ci est toujours dans un appartement contenant  $C$ .

Donnons-nous maintenant deux points  $x$  et  $y$  et un appartement les contenant. Le segment qui les joint dans cet appartement peut être découpé en un nombre fini de segments contenus dans des chambres fermées. On note  $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$  la subdivision obtenue. Alors :

$$d(\rho x, \rho y) \leq \sum_{i=1}^m d(\rho x_{i-1}, \rho x_i) = \sum_{i=1}^m d(x_{i-1}, x_i) = d(x, y)$$

l'inégalité provient de l'inégalité triangulaire (euclidienne) dans un appartement et l'égalité centrale de la remarque précédente.

Point (ii). Il suffit de prouver l'inégalité triangulaire, par construction de  $d$ . Soient  $x, y$  et  $z$  trois points de  $|\Delta|$ . On peut choisir un appartement  $E$  de  $|\Delta|$  qui contient  $x$  et  $y$ , et une chambre quelconque de cet appartement, pour définir une rétraction  $\rho$ . Alors :

$$d(x, y) \leq d(x, \rho z) + d(\rho z, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (*)$$

La première inégalité est l'inégalité triangulaire dans un espace euclidien, les deux autres proviennent du fait que  $\rho$  est contractante.  $\square$

**2.C Définition intrinsèque des segments.** — Elle est à vérifier puisque plusieurs appartements peuvent contenir une paire de points donnés.

LEMME. — Soient  $x$  et  $y$  des points de  $|\Delta|$ , contenus dans un appartement  $E$ . Alors, le segment  $[x, y]$  tracé dans  $E$  ne dépend pas de  $E$  et possède la caractérisation intrinsèque suivante :

$$[x, y] = \{z \in |\Delta|, d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}.$$

*Démonstration.* On reprend les notations de 2.D. On suppose qu'on a pour les trois points précédents, l'égalité :  $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ . Ceci signifie qu'il y a égalité dans les deux inégalités de (\*). La première égalité signifie que  $\rho z$  est dans le segment  $[x; y]$  de  $E$ . On peut même préciser cette assertion à partir de la seconde égalité qui fournit en fait deux égalités, et qui indique que  $\rho z$  est le point  $p_t := (1 - t)x + ty$  avec  $t = d(x, z)/d(x, y)$ . Pour définir la rétraction  $\rho$ , on avait choisi une chambre quelconque de  $E$ , c'est-à-dire qu'on peut choisir une chambre fermée de  $E$  qui contient ce point  $p_t$ . Puisque  $p_t$  est dans la chambre de la rétraction  $\rho$ , on a égalité :  $d(\rho z, \rho p_t) = d(z, p_t)$ . Mais le premier membre vaut  $d(\rho z, p_t)$  soit 0 par ce qui précède. D'où  $z = p_t$ , et la caractérisation du segment.  $\square$

**2.D Courbure négative et contractilité.** — Du point de vue topologique, on faire mieux que vérifier la simple connexité. Cette remarque a son intérêt en cohomologie des groupes.

LEMME. — (i) Étant donnés deux points  $x, y$  de  $|\Delta|$  et un paramètre  $t$  de  $[0; 1]$ , on peut définir le point de  $[x; y]$   $p_t := (1 - t)x + ty$ . Alors, pour tout point  $z$  de  $|\Delta|$  :

$$d^2(z, p_t) \leq (1 - t)d^2(z, x) + td^2(z, y) - t(1 - t)d^2(x, y)$$

(ii) *L'application*

$$\begin{aligned} |\Delta| \times |\Delta| \times [0; 1] &\rightarrow |\Delta| \\ (x, y, t) &\mapsto (1-t)x + ty \end{aligned}$$

*est continue. En particulier,  $|\Delta|$  est un espace topologique contractile.*

*Démonstration.* Point (i). On se replace dans la configuration d'un appartement  $E$  contenant  $x, y$ , et une chambre  $|C|$  contenant  $p_t$ , par rapport à laquelle on centre la rétraction  $\rho$  sur  $E$ . Si  $z'$  est dans  $E$ , en voyant  $E$  comme un espace euclidien centré en  $z'$  et en faisant un calcul de produit scalaire, on obtient l'égalité :

$$d^2(z', p_t) = (1-t)d^2(z', x) + td^2(z', y) - t(1-t)d^2(x, y).$$

Il suffit alors d'appliquer l'égalité précédente à  $z' = \rho z$ , d'utiliser les majorations

$$d(\rho z, x) \leq d(z, x), \quad (\rho z, y) \leq d(z, y),$$

et l'égalité  $d(\rho z, p_t) = d(z, p_t)$ .

Point (ii). Soit un triplet  $(x', y', t')$  de  $|\Delta| \times |\Delta| \times [0; 1]$ . Il suffit d'appliquer l'inégalité de (i) à  $z = (1-t')x' + t'y'$  et d'examiner chacun des trois termes de la majoration. On remarque que quand  $(x', y', t')$  tend vers  $(x, y, t)$ ,  $d(z, x)$ , proche de  $d(z, x')$  qui vaut  $t'd(x', y')$ , tend vers  $td(x, y)$ , et donc que le premier terme tend vers  $(1-t)t^2d^2(x, y)$ . On constate ainsi que le majorant tend vers 0. Ainsi,  $z'$  tend vers  $p_t = (1-t)x + ty$ .  $\square$

**2.E Rétraction sur une chambre et complétude.** — La complétude est l'argument complémentaire de la courbure négative pour l'existence de points fixes.

LEMME. — (i) *Étant donnée une chambre  $|C|$  de  $|\Delta|$ , la réalisation géométrique  $\lambda$  de la rétraction sur  $C$  est contractante pour  $d$ . On l'appelle encore application type même si elle est à valeurs dans  $|C|$ .*

(ii) *Pour  $y$  un point de  $|C|$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout point  $x$  de  $|\Delta|$  de type  $y$  (au sens de (i)), l'ensemble des simplexes fermés de  $|\Delta|$  contenant  $x$  contient toute la boule fermée centrée en  $x$  de rayon  $\delta$ . Ainsi, l'ensemble des points de type fixé est discret dans  $|\Delta|$ .*

(iii) *L'espace  $|\Delta|$  est complet.*

*Démonstration.* Point (i). Il suffit de montrer que l'application proposée est isométrique de chambre à chambre pour conclure par le même argument de découpage qu'en 2.A(i). Le fait qu'un immeuble est étiquetable assure l'existence d'une unique rétraction combinatoire de  $\Delta$  sur  $C$ , qui se réalise comme suit de chambre à chambre : si  $D$  est une autre chambre, alors on choisit un appartement contenant  $C$  et  $D$ , et par unicité, l'action de la rétraction coïncide avec l'action de l'élément du groupe  $W$  qui ramène  $D$  sur  $C$ . Or, un élément de  $W$  opère isométriquement sur l'appartement.

Point (ii). On conserve l'appartement contenant  $C$ . On définit  $\delta$  comme étant le minimum de la distance de  $y$  aux murs de cet appartement qui ne le contiennent pas. Puisque cette famille d'hyperplans est localement fini,  $\delta$  est strictement positif. On va montrer qu'il convient.

Soit  $y'$  dans l'appartement et à distance inférieure ou égale à  $\delta$  de  $y$ . Par construction,  $]y; y'[$  ne coupe aucun mur, donc  $y$  et  $y'$  sont dans une même facette fermée.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général, en considérant un point  $x'$  de  $|\Delta|$  à distance inférieure ou égale à  $\delta$  de  $x$ . On choisit un appartement contenant  $x$  et  $x'$  : on sait qu'il existe

une isométrie simpliciale  $\phi$  de cet appartement sur le précédent qui envoie  $x$  sur  $y$ . Alors,  $d(\phi(x'), y) \leq \delta$ , donc par le cas particulier précédent, on sait que  $\phi(x')$  est dans un simplexe fermé contenant  $y$ , donc par  $\phi^{-1}$  que  $x'$  est dans un simplexe fermé contenant  $x$ .

Point (iii). Partons d'une suite de Cauchy  $(x_m)_{m \geq 0}$  dans  $|\Delta|$ .  $(\lambda(x_m))_{m \geq 0}$  est encore une suite de Cauchy, cette fois dans  $|C|$  qui est un espace complet. Cette suite converge vers un type  $y$  de  $|C|$ . On choisit pour chaque  $m$  une chambre  $C_m$  qui contient  $x_m$  et dans cette chambre, l'unique point  $y_m$  de type  $y$ . Alors, la distance  $d(x_m, y_m) = d(\lambda(x_m), y)$  tend vers 0 à l'infini, ce qui montre que  $(y_m)_{m \geq 0}$  est également une suite de Cauchy, mais à valeurs dans un ensemble discret, donc stationnaire. Il est clair que la suite  $(x_m)_{m \geq 0}$  de départ converge vers la limite de cette suite stationnaire.  $\square$

La complétude et la courbure négative sont les ingrédients de démonstration du théorème de point fixe de Bruhat-Tits.

### 3. Courbure négative. Théorème de point fixe

Voici ce que nous appellerons *propriété de courbure négative* pour l'espace métrique  $|\Delta|$  : «Pour tous points  $x$  et  $y$  de  $|\Delta|$ , il existe un point  $m$  de  $|\Delta|$  tel que pour tout  $z$  de  $|\Delta|$  :

$$(NC) \quad d^2(z, m) \leq 1/2(d^2(z, x) + d^2(z, y)) - 1/4d^2(x, y).»$$

La référence pour cette section est [B, VI.4].

**3.A Rayons et centres de boules circonscrites.** — La stratégie de preuve du théorème de point fixe est la suivante : on va définir certains objets par une propriété métrique, d'où l'invariance de l'ensemble qu'ils forment. Si on arrive par ailleurs à montrer que cet ensemble est non vide réduit à un point, on aura obtenu un point fixe.

DÉFINITION. — Soit  $A$  une partie bornée non vide de  $|\Delta|$ .

- (i) Pour tout point  $x$  de  $|\Delta|$ , on note  $r(x, A) := \sup_{a \in A} d(x, a)$ .
- (ii) Le rayon de boule circonscrite à  $A$  est  $r(A) := \inf_{x \in |\Delta|} r(x, A)$ .
- (iii) Un centre de boule circonscrite pour  $A$  est un point de  $|\Delta|$  qui réalise le rayon ci-dessus, i.e., tel que  $r(x, A) = r(A)$ .  $\square$

**3.B Théorème de point fixe de Bruhat-Tits.** — Voici le théorème de point fixe qui généralise celui d'Élie Cartan (action d'un groupe compact sur une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative).

THÉORÈME. — Soit  $G$  un groupe d'isométries d'un espace métrique complet possédant la propriété de courbure négative. Alors, si  $G$  stabilise une partie non vide bornée, il possède un point fixe.

En vertu de la remarque de début de chapitre, ce théorème est conséquence de la «version Serre» suivante :

THÉORÈME. — Toute partie bornée non vide d'un espace métrique complet possédant la propriété de courbure négative admet un unique centre de boule circonscrite.

*Démonstration.* On se donne deux points  $x$  et  $y$  quelconques de  $|\Delta|$ . On va mettre en place une majoration de  $d(x, y)$  en fonction des quantités introduites en 3.A. Grâce au point  $m$  de la propriété de courbure négative, on obtient en passant à la borne supérieure sur  $z$  dans  $A$  :

$$r^2(m, A) \leq 1/2(r^2(x, A) + r^2(y, A)) - 1/4d^2(x, y).$$

D'où, puisque  $r(A) \leq r(m, A)$  :

$$d^2(x, y) \leq 2(r^2(x, A) + r^2(y, A) - 2r^2(A)).$$

Appliquer cette inégalité à deux points qui réalisent le circumrayon prouve l'unicité du centre de boule circonscrite. L'appliquer à une suite d'éléments  $(x_n)_{n \geq 0}$  tels que  $r(x_n, A)$  tend vers  $r(A)$  montre que cette suite est de Cauchy donc convergente. La limite est un centre de boule circonscrite.  $\square$

Ce théorème a de nombreuses applications : classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de certains groupes  $\mathfrak{p}$ -adiques, descente galoisienne...

### Références

[B] K. BROWN : Buildings, Springer, 1990.

[G] P. GARRETT : Buildings and classical groups, Chapman and Hall, 1997.

Bertrand RÉMY