Groupe de travail «Immeubles»

L'IMMEUBLE DE GL_n SUR UN CORPS $\mathfrak{p}$-ADIQUE

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K}$ désignera un corps local. Ceci signifie ici que $\mathbf{K}$ est muni d'une valuation v – discrète et normalisée ($v(\mathbf{K}^\times) = \mathbf{Z}$), que pour tout choix d'un réel a entre 0 et 1, on définit une valeur absolue (ultramétrique) par $\|x\| := a^{v(x)}$ pour laquelle $\mathbf{K}$ est complet et localement compact. $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$, c'est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ qu'on peut définir par $\mathcal{O} = \{x \in \mathbf{K} : v(x) \geq 0\}$. On choisit une uniformisante de $\mathcal{O}$ notée ϖ, de sorte que $\mathfrak{p} = \varpi\mathcal{O}$. k est le corps résiduel de $\mathbf{K}$, $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$: c'est un corps fini, par l'hypothèse de locale compacité.

Ceci étant défini, il s'agit de proposer un analogue ultramétrique de l'espace symétrique attaché à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On sait qu'ensemblistement ce dernier est formé des produits scalaires de $\mathbf{R}^n$, modulo homothétie. On va donc s'intéresser aux normes ultramétriques d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension n, modulo homothétie.

L'espace $\mathcal{N}$ des normes ultramétriques a été considéré avant toute interprétation immobilière par Goldman et Iwahori en 1963 [G-I]. De nombreuses observations avaient déjà été faites sur sa structure géométrique, topologique. Ceci a été conservé – modulo réinterprétation – au cours du développement de la théorie des immeubles affines [B-T]. En revanche, tout l'aspect métrique de l'étude de Goldman et Iwahori a été laissé de côté par Bruhat et Tits, au profit d'une approche fournissant de la courbure négative. Il ne sera pas question de cela dans cet exposé : on va parler de géométrie affine, de géométrie simpliciale, pas de distance pour l'instant. Signalons dès maintenant que l'espace $\mathcal{N}$ n'est pas à proprement parler un immeuble. On obtient un immeuble en le quotientant par la version additive de l'homothétie des normes.

Cet exposé est entièrement construit à partir d'un exposé fait par G. Rousseau quelques années auparavant [R].

1. L'espace des normes $\mathcal{N}$ de Goldman et Iwahori

On va momentanément travailler sur des normes au sens classique pour prouver des résultats techniques. Rappelons que E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1.A *Normes ultramétriques.* — On revient d'abord à des résultats de base, mais dans un cadre ultramétrique.

Définition. — *Une* norme ultramétrique *de E est une application $\| - \|: E \to \mathbf{R}$ qui vérifie :*

(i) $\| x \| = 0$ *implique* $x = 0$.
(ii) *Pour tout x de E λ de $\mathbf{K}$,* $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$.
(iii) *Pour tous x et y de E, on a* l'inégalité ultramérique *:* $\| x + y \| \leq \sup\{\| x \|, \| y \|\}$

On va essentiellement retenir deux résultats sur ces normes pour ce qu'on a en vue. On peut les voir comme analogues ultramétriques de résultats classiques dans le cas archimédien (Gram-Schmidt...).

Proposition. — (i) *Pour toute norme (ultramétrique)* $\|-\|$ *sur* E*, il existe une base* $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ *et une famille de réels* $\{c_i\}_{1\leq i\leq n}$*, tels que pour tout* x *de* E*, on ait :*

$$\| x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \| = \sup_{1\leq i\leq n} \{|c_i| \cdot |\lambda_i|\}.$$

On parle de base adaptée à l'expression *de la norme* $\|-\|$.
(ii) *Si* $\|-\|$ *et* $\|-\|'$ *sont deux normes ultramétriques, alors il existe une base adaptée à l'expression simultanée des deux normes.*

Démonstration. On fait une récurrence sur n. Pour $n=1$, l'assertion est évidente.

Partons d'une forme linéaire non nulle μ. On a alors pour tout élément x de E tel que $\mu(x) \neq 0$, $E = \mathrm{Ker}\mu \oplus \mathbf{K}x$. Cette décomposition permet d'écrire tout z de E sous la forme $z = \dfrac{\mu(z)}{\mu(x)} x + y$ avec $y \in \mathrm{Ker}\mu$. L'inégalité ultramétrique permet d'écrire :

$$\| z \| \leq \sup\{\| y \|; | \frac{\mu(z)}{\mu(x)} | \| x \|\} \quad \text{et} \quad \| y \| \leq \sup\{\| z \|; | \frac{\mu(z)}{\mu(x)} | \| x \|\}$$

On voudrait l'égalité dans la première inégalité pour enclencher la récurrence. Pour cela, il faut faire un choix plus judicieux de x. La fonction $\dfrac{|\mu(-)|}{\|-\|}$ est continue homogène sur $E \setminus \{0\}$. Elle admet un maximum sur le compact $\mathbf{P}(E)$, qui est un maximum sur $E \setminus \{0\}$ tout entier par homogénéité. Il est atteint en un point qu'on note encore x. Avec ce x qui vérifie clairement $\mu(x) \neq 0$, on a alors

$$\frac{|\mu(x)|}{\| x \|} \geq \frac{|\mu(t)|}{\| t \|} \quad \forall t \in E \setminus \{0\},$$

et donc

$$\| z \| \geq \frac{|\mu(z)|}{|\mu(x)|} \| x \|.$$

Cette dernière inégalité sert deux fois. D'une part, on l'injecte dans la seconde inégalité ultramétrique pour avoir $\| z \| \geq \| y \|$. D'autre part, combinée à $\| z \| \geq \| y \|$, on obtient l'égalité dans la première inégalité ultramétrique.

$$\| z \| = \sup\{\| y \|; | \frac{\mu(z)}{\mu(x)} | \| x \|\}$$

On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence sur $\mathrm{Ker}\lambda$.

Point (ii). Soit x qui réalise le maximum de la fonction continue homogène $\dfrac{\|-\|}{\|-\|'}$ sur le compact $\mathbf{P}(E)$. On obtient par homogénéité : $\dfrac{\| y \|}{\| x \|} \leq \dfrac{\| y \|'}{\| x \|'}$ pour tout y de E. Par bidualité (en dimension finie), on obtient :

$$\| x \| = \sup_{\mu \neq 0} \frac{|\mu(x)|}{\| x \|^*}$$

Par compacité de $\mathbf{P}(E^*)$, il existe λ dans E^* qui réalise cette norme, d'où : $\| x \| = \dfrac{|\lambda(x)|}{\| \lambda \|^*}$.
Ceci permet d'écrire pour tout y de E :

$$\frac{|\lambda(y)|}{|\lambda(x)|} \leq \frac{\| y \|}{\| x \|} \leq \frac{\| y \|'}{\| x \|'}$$

Avec ce petit raisonnement, on peut faire une récurrence du même type qu'en (i) en traitant simultanément les deux normes. □

1.B *Normes additives et espace $\mathcal{N}$.* — Partons d'une définition additive plus adaptée à la description des structures affines à venir.

Définition. — *Une* norme additive *sur E est une application γ de E dans $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ qui vérifie*
(i) $\gamma^{-1}(\{\infty\}) = \{0\}$.
(ii) *Pour tous x dans E et λ dans $\mathbf{K}$, $\gamma(\lambda x) = \gamma(x) + v(\lambda)$.*
(iii) *Pour tous x et y de E, on a $\gamma(x + y) \geq \inf\{\gamma(x); \gamma(y)\}$.*

Bien entendu, l'opposé du logarithme d'une norme ultramétrique est une norme additive. Une façon de fabriquer des normes additives à partir d'une base $\{e_i\}$ et d'une famille $\{c_i\}$ de réels, consiste à attacher à tout $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ de E le réel $\inf_{1 \leq i \leq n} \{v(\lambda_i) - c_i\}$. On note cette norme $\gamma_{\{e_i\},\{c_i\}}$. D'après ce qu'on a dit précédemment sur les normes ultramétriques, toute norme additive s'écrit de manière non unique sous cette forme. Le second point dit que pour toute paire de norme additives $\{\gamma; \delta\}$, il existe une base $\{e_i\}$ et deux familles de réels $\{c_i\}$ et (d_i) telles que $\gamma = \gamma_{\{e_i\},\{c_i\}}$ et $\delta = \gamma_{\{e_i\},(d_i)}$.

Définition. — *L'*espace $\mathcal{N}(= \mathcal{N}_E)$ de Goldman et Iwahori *est l'ensemble des normes additives de E. Il est muni d'une action à gauche de* $\mathrm{GL}(E)$ *par $(g\gamma)(x) = \gamma(g^{-1}.x)$ pour tous x de E, et g de* $\mathrm{GL}(E)$.

Cet espace n'est pas à proprement parler l'analogue de l'espace symétrique annoncé. Il manque le passage au quotient par une relation d'équivalence qui est l'analogue additif de l'homothétie. Ce passage au quotient aura lieu ultérieurement. On va dans un premier temps munir $\mathcal{N}$ d'une structure de plus en plus riche, et d'abord d'une structure affine sur des espaces privilégiés - les appartements.

2. Les croix et les appartements vides

2.A *Croix. Appartements associés.* — Commençons par quelques définitions :

Définition. — (i) *Une* croix *de E est une famille $\mathcal{C} = \{D_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de droites de E, de somme (directe) égale à E.*
(ii) *Une base* extraite de $\mathcal{C}$ *est une base obtenue en choisissant un vecteur (non nul) dans chaque droite.*
(iii) *L'*appartement $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ *associé à $\mathcal{C}$ est l'ensemble des normes de $\mathcal{N}$ qui s'expriment dans une (en fait, toute) base extraite de cette croix.*

Autrement dit, cet appartement est moins intrinsèquement décrit par :

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}} = \{\gamma_{\{e_i\},\{c_i\}} \mid \{c_i\} \in \mathbf{R}^{\mathcal{C}}\} \text{ pour une base } \{e_i\} \text{ extraite de } \mathcal{C}.$$

On peut réinterpréter une dernière fois les résultats de 1.1.

Proposition. — (i) *L'espace $\mathcal{N}$ est recouvert par ses appartements.*
(ii) *Deux normes sont toujours dans un même appartement.* □

2.B *Structures affines. Segments.* — $\mathcal{C} = \{D_i\}_{1 \leq i \leq n}$ étant donnée, l'appartement $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ est muni d'une structure affine, par l'action de $\mathbf{R}^\mathcal{C}$ sur $\mathbf{A}_\mathcal{C}$:

$$\mathbf{R}^\mathcal{C} \times \mathbf{A}_\mathcal{C} \to \mathbf{A}_\mathcal{C}$$
$$\big((d_i), \gamma_{\{e_i\},\{c_i\}}\big) \mapsto \gamma_{\{e_i\},(c_i+d_i)}$$

On peut alors envisager quelques constructions géométriques.

Proposition. — *Étant données deux normes γ et δ et un appartement $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\mathcal{C}$ les contenant, le segment $[\gamma; \delta]_\mathbf{A}$ tracé dans $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ ne dépend pas de $\mathbf{A}_\mathcal{C}$.*

Démonstration. On va définir intrinséquement un chemin dans $\mathcal{N}$ et l'étudier pour montrer qu'il s'agit en fait de tout segment de la forme $[\gamma; \delta]_\mathbf{A}$.

1. Définition du chemin

Pour tout t dans $[0; 1]$, on définit la partie de $\mathcal{N}$:

$$P_t := \{\alpha \in \mathcal{N} : \forall x \in E \quad \alpha(x) \geq t\gamma(x) + (1-t)\delta(x)\}.$$

C'est une partie non vide car elle contient $\gamma + \sup\{\mid \gamma - \delta \mid (x) \mid x \in \mathbf{P}(E)\}$. Pour chaque t, l'application

$$\beta_t : E \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto \inf_{\alpha \in P_t} \alpha(x)$$

est une norme. Voici les vérifications.

– Si $\beta_t(x) = \infty$ alors pour tout α dans P_t, $\alpha(x) = \infty$, et comme P_t est non vide, il existe α dans $\mathcal{N}$ avec $\alpha(x) = \infty$. D'où $x = 0$.
– Pour x dans E et λ dans $\mathbf{K}$, $\beta_t(\lambda x) = \inf_{\alpha \in P_t} \alpha(\lambda x) = \mid \lambda \mid \inf_{\alpha \in P_t} \alpha(x) = \mid \lambda \mid \beta_t(x)$.
– Si α est dans P_t et si x et y sont des éléments de E, alors $\alpha(x+y) \geq \inf\{\alpha(x); \alpha(y)\}$. Or par définition, $\alpha(x) \geq \beta_t(x)$ et $\alpha(y) \geq \beta_t(y)$, donc $\alpha(x+y) \geq \inf\{\beta_t(x); \beta_t(y)\}$. En passant à la borne inférieure sur α dans P_t, on obtient bien le dernier des axiomes d'une norme additive pour β_t.

Finalement, on obtient bien un chemin $t \mapsto \beta_t$ tracé dans $\mathcal{N}$ et qu'il s'agit d'identifier à tout segment de type $[\gamma; \delta]_\mathbf{A}$.

2. Identification

On choisit un appartement $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ et $\{e_i\}$ une base extraite de la croix associée, pour lesquels on a : $\gamma = \gamma_{\{e_i\},\{c_i\}}$ et $\delta = \gamma_{\{e_i\},(d_i)}$. Le segment tracé dans $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ qui nous intéresse est l'ensemble $\{\gamma_{\{e_i\},(tc_i+(1-t)d_i}\}$. On note $\gamma_t := \gamma_{\{e_i\},(tc_i+(1-t)d_i)}$.

Montrons d'abord que γ_t est dans P_t pour tout t. On a en effet :

$\gamma_t(x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \inf_i\{v(\lambda_i) - (tc_i + (1-t)d_i)\} = \inf_i\{t(v(\lambda_i) - c_i) + (1-t)(v(\lambda_i) - d_i),$

ce qui est plus grand que

$$\inf_i\{t(v(\lambda_i) - c_i)\} + \inf_i\{(1-t)(v(\lambda_i) - c_i)\} = t\gamma(x) + (1-t)\delta(x),$$

d'où $\gamma_t \in P_t$.

Finissons en montrant que pour tout x, $\gamma_t(x)$ réalise la borne inférieure qui définit $\beta_t(x)$. Soit α dans P_t. L'inégalité ultramétrique et le fait que α est dans P_t justifie les inégalités successives

$$\alpha(x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) \geq \inf_i \alpha(\lambda_i e_i) \geq \inf_i \{(1-t)(v(\lambda_i) - c_i) + t(v(\lambda_i) - d_i)\} = \gamma_t(x),$$

et achève la démonstration. $\square$

Corollaire. — *Les intersections d'appartements sont convexes.* $\square$

Du point de vue de la géométrie, on peut faire mieux que se contenter d'une structure affine sur chaque appartement.

3. Remplissage des appartements

On va distinguer une famille de normes qui vont jouer le rôle de sommets d'un complexe simplicial. En combinant cela avec les structures affines déjà évoquées, on va montrer que toute norme est dans l'enveloppe convexe de $n+1$ sommets qui l'approchent au plus près.

3.A *Réseaux.* — Ces objets sont plus souvent utilisés pour décrire concrètement l'immeuble d'un groupe linéaire sur un corps local.

Définition. — *Un* réseau *de E est un sous-$\mathcal{O}$-module libre de rang n de E. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réseaux de E.*

$\mathrm{GL}(E)$ opère de façon évidente et transitive sur $\mathcal{L}(E)$. On veut une correspondance entre les réseaux et certaines normes additives de E.

À un réseau M de E est attachée une norme γ_M définie par $\gamma_M(x) := \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid \varpi^n x \in M\}$. Réciproquement, si γ est une norme d'image égale à $\mathbf{Z}$, $M_\gamma := \gamma^{-1}([\mathbf{N} \cup \{\infty\})$ est un réseau. Il suffit pour le voir de prendre une base adaptée à l'expression de γ, et de constater que se limiter aux vecteurs de norme positive revient à poser une borne inférieure uniforme pour les coordonnées dans cette base. On obtient ainsi facilement :

Proposition/Définition. — *Les applications $\gamma \mapsto M_\gamma$ et $M \mapsto \gamma_M$ établissent un dictionnaire $\mathrm{GL}(E)$-équivariant entre les normes à valeurs entières et les réseaux. Ces normes seront appelées les* sommets *de $\mathcal{N}$, et leur ensemble sera noté $S(\mathcal{N})$.* $\square$

3.B *Appoximation des normes par des réseaux.* — Nous allons décrire un procédé de fabrication d'une famille de réseaux et d'une suite ordonnée de réels de $[0;1]$ à partir d'une norme donnée. Le résultat permettra l'approximation annoncée. Partons de quelques remarques.

1. Pour toute famille (k_i) d'entiers, on a

$$(\star) \quad \gamma_{(\varpi^{k_i} e_i),\{c_i\}} = \gamma_{(e_i),(c_i + k_i)}.$$

2. Étant donnée une croix $\mathcal{C}$, on peut envisager deux types d'opérations sur les bases extraites de $\mathcal{C}$, qui les stabilisent.

– Opérations (T) : Dilatation d'une droite de la croix par une puissance de l'uniformisante ϖ.
– Opérations (S) : Permutation des droites.

Décrivons maintenant le procédé, en partant d'une norme γ. On choisit une base $\{e_i\}$ adaptée à l'expression de γ. Alors γ vaut $\gamma_{(e_i),\{c_i\}}$ pour une suite de réels $\{c_i\}$. Par une suite d'opérations (T), on peut supposer d'après la première remarque, que les c_i sont dans $[0;1[$. Par une opération (S), on peut supposer que les c_i sont ordonnés et qu'on a : $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

On pose par commodité, $c_0 := 0$ et $c_{n+1} := 1$. Ces réels permettent de définir des réseaux $M_i := \gamma^{-1}([-c_i;\infty])$, et on note $\gamma^{(i)}$ les normes associées. Ces objets nous intéressent pour la raison suivante.

Proposition. — (i) *Quelle que soit la base $\{e_i\}$ de départ, le procédé aboutit aux mêmes réels c_i et aux mêmes réseaux M_i. En outre, les réels $\{c_i\}$ ne dépendent que de l'orbite sous* $\mathrm{GL}(E)$ *de γ.*
(ii) *Si un appartement $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ contient γ, alors il contient les $\gamma^{(i)}$, et on peut écrire*

$$(\star\star) \quad \gamma = \textstyle\sum_{i=0}^{n}(c_{i+1}-c_i)\gamma^{(i)}.$$

(iii) *Soient M_0, M_1, ... M_n des réseaux, alors pour qu'il existe une norme γ pour laquelle $M_i = M^{(i)}$ pour tout i, il est nécessaire et suffisant que ces réseaux remplissent les deux conditions :*

$$\varpi M_n \subset M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n$$

et

$$\textit{Pour tout } i \textit{ tel que } M_i \neq M_{i+1} \textit{ alors } i = \dim_k \frac{M_i}{\varpi M_n}.$$

Démonstration. Nous allons commencer par donner une description plus explicite des réseaux obtenus. On a posé : $M_i := \gamma^{-1}([-c_i;\infty])$, donc

$$x \in M_i \iff \gamma(x) \geq -c_i \iff \inf_j(v(\lambda_j)-c_j) \geq -c_i$$
$$\iff \forall j\ v(\lambda_j)-c_j \geq -c_i \iff \forall j\ v(\lambda_j) \geq \lceil c_j - c_i \rceil,$$

où $\lceil - \rceil$ désigne la partie entière par valeur supérieure. Ceci montre :

$$M_i = \textstyle\bigoplus_{j\leq i}\mathcal{O}e_j \oplus \bigoplus_{c_i=c_j}\mathcal{O}e_j \oplus \bigoplus_{c_j>c_i}\mathcal{O}\varpi e_j.$$

La norme associée est alors : $\gamma^{(i)} = \gamma_{(e_j),(\lceil c_j-c_i\rceil)}$.

Point (i). Les valeurs de la suite $\{c_i\}$ sont entièrement déterminées par l'orbite de γ puisque ce sont les opposées des valeurs prises par γ. Regardons maintenant le nombre d'occurrences d'une valeur c_i donnée. D'après la description de M_i, c'est la dimension sur le corps résiduel k de $\dfrac{M_i}{M_{i-1}}$, elle aussi bien déterminée par l'orbite de γ.

Point (ii). La première assertion est évidente par construction. On veut prouver la formule $(\star\star)$ selon laquelle la norme est dans l'enveloppe convexe des réseaux (tracée dans tout appartement). À nouveau, on fait une remarque.

Soit $x = \sum_i \lambda_i e_i$. On note i_0 le plus grand des indices j pour lequel la valuation $v(\lambda_j)$ est minimale. Alors, quelle que soit la norme $\gamma_{\{e_i\},(d_i)}$, avec $O \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n < 1$, on a $\gamma_{\{e_i\},(d_i)} = v(\lambda_{i_0}) - d_{i_0}$. (Un élément d_i inférieur à 1, ne compensera jamais un saut de 1 de la valuation).

Revenons à γ en conservant x et i_0. On sait déjà que $\gamma(x) = v(\lambda_{i_0}) - c_{i_0}$ et $\gamma_{(e_j),(\lceil c_j-c_i\rceil)}(x) = v(\lambda_{i_0}) - \lceil c_{i_0} - c_i\rceil$. On a donc :

$$\sum_{i=0}^{n}(c_{i+1}-c_i)\gamma^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{n}(c_{i+1}-c_i)\gamma^{(i)}(\sum_i \lambda_i e_i) = \sum_{i=0}^{n}(c_{i+1}-c_i)\big(v(\lambda_{i_0}) - \lceil c_{i_0}-c_i\rceil\big)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (c_{i+1} - c_i) v(\lambda_{i_0}) - \sum_{i=0}^{n} (c_{i+1} - c_i)(\lceil c_{i_0} - c_i \rceil) = v(\lambda_{i_0}) - c_{i_0} = \gamma(x).$$

Point (iii). D'après le procédé de fabrication, il est clair que la condition est nécessaire. Réciproquement, on part d'une chaîne d'inclusions de réseaux :

$$\varpi M_n \subset M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n.$$

En réduisant modulo ϖ, on obtient un k-espace vectoriel $\dfrac{M_n}{\varpi M_n}$ de dimension n, et un drapeau (éventuellement incomplet) :

$$\{0\} \subset \frac{M_0}{\varpi M_n} \subset ... \subset \frac{M_n}{\varpi M_n}.$$

Il existe une base adaptée à ce drapeau ($\bar{e}_1 := e_1 + \varpi M_n, ... \quad \bar{e}_n := e_n + \varpi M_n$), c'est-à-dire telle que $\dfrac{M_i}{\varpi M_n} \neq \dfrac{M_{i+1}}{\varpi M_n} \Rightarrow \dfrac{M_i}{\varpi M_n} = \bigoplus\limits_{1 \leq i \leq i} k\bar{e}_i$. Alors, pour tout choix d'une famille de réels $c_0 = 0 \leq c_1 \leq ... \leq c_n < c_{n+1} = 1$, vérifiant $c_i = c_{i+1}$ si et seulement si $\dfrac{M_i}{\varpi M_n} = \dfrac{M_{i+1}}{\varpi M_n}$ (soit $M_i = M_{i+1}$), la norme $\gamma_{\{e_i\},\{c_i\}}$ redonne la chaîne d'inclusions de départ par le procédé. □

3.C *Facettes et chambres.* — La construction précédente permet de remplir les appartements en définissant des chambres et des facettes.

Définition. — (i) *On appelle* facette fermée *définie par une chaîne de réseaux vérifiant les conditions* 3.2(iii) *(ou par une norme fournissant ces réseaux), l'enveloppe convexe dans $\mathcal{N}$ des normes associées aux réseaux.*
(ii) *On appelle* facette ouverte *définie par une chaîne de réseaux vérifiant les conditions* 3.2(iii) *(ou par une norme fournissant ces réseaux), l'ensemble des normes γ telles que $\gamma^{(i)} = \gamma_{M^{(i)}}$ pour tout i.*
(iii) *La* dimension *d'une facette définie par M_0, M_1, ... M_n est $\#\{M_0; M_1; ...M_n\}$.*
(iv) *Une* chambre *est une facette de dimension maximale.*

4. Action de GL(E) sur l'espace de Goldman et Iwahori

Faire opérer un groupe sur un espace dont on connaît la géométrie permet souvent de le dévisser:décomposition d'Iwasawa, de Cartan, ... C'est ce qu'on va commencer à faire ici, en examinant l'action du stabilisateur d'un appartement sur celui-ci.

4.A *Stabilisateur d'un appartement.* — Remarquons d'abord qu'un appartement $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ est entièrement déterminé par les sommets qu'il contient. En intersectant des réseaux judicieux, on retrouve des $\mathcal{O}$-droites qui reconstituent la croix $\mathcal{C}$.

Adoptons pour l'instant le point de vue des tores. Soit $T_{\mathcal{C}}$ le tore maximal attaché à $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire le sous-groupe fermé des matrices diagonales relativement à la décomposition de E suivant la croix $\mathcal{C}$. On dispose du groupe des caractères $X^*(T_{\mathcal{C}}) = \mathrm{Hom}_{gr.alg.}(T_{\mathcal{C}}, \mathbf{G}_m)$, et du groupe des sous-groupes à un paramètre multiplicatif $X_*(T_{\mathcal{C}}) = \mathrm{Hom}_{gr.alg.}(\mathbf{G}_m, T_{\mathcal{C}})$, qui sont des groupes abéliens libres de rang n, mis en $\mathbf{Z}$-dualité par l'accouplement :

$$X^*(T_{\mathcal{C}}) \times X_*(T_{\mathcal{C}}) \to \mathbf{Z}$$

$$(\xi, \lambda) \mapsto m = \xi \circ \lambda : t \mapsto t^m$$

On peut privilégier des $\mathbf{Z}$-bases en fonction de la croix : pour toute droite D_0 de $\mathcal{C}$ et tout t de $\mathbf{K}^\times$, $\lambda_{D_0}(t)$ est l'automorphisme diagonal par rapport à $\mathcal{C}$ qui dilate de t la direction D_0 en fixant les autres droites. λ_{D_0} est bien un cocaractère. De la même façon, ξ_{D_0} est le caractère de $X^*(T_\mathcal{C})$ qui attache à une matrice de $T_\mathcal{C}$ sa valeur propre suivant D_0.

Enfin, on note $N_\mathcal{C} := N(T_\mathcal{C})$ le normalisateur de $T_\mathcal{C}$ dans $\mathrm{GL}(E)$. On sait que son quotient par $T_\mathcal{C}$: $W := \dfrac{N_\mathcal{C}}{T_\mathcal{C}}$ est le groupe des permutations de droites de la croix.

Passons à la description de l'action de $N_\mathcal{C}$ sur $\mathbf{A}_\mathcal{C}$.

Proposition. — (i) *$N_\mathcal{C}$ et $T_\mathcal{C}$ opèrent de manière affine sur $\mathbf{A}_\mathcal{C}$.*
(ii) *$T_\mathcal{C}$ est transitif sur les sommets de $\mathcal{N}$ dans l'appartement.*
(iii) *$N_\mathcal{C}$ est transitif sur l'ensemble des chambres de l'appartement, et si $n \in N_\mathcal{C}$ fixe une chambre, il fixe $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ (point par point).* □

Démonstration. On fixe $\{e_i\}$, une $\mathcal{O}$-base extraite de $\mathcal{C}$ d'un réseau de $\mathbf{A}_\mathcal{C}$.

Point (i). L'action d'un élément n de $N_\mathcal{C}$ peut être décrite au moyen d'une suite d'opérations (T) puis d'une opération (S). Les opérations (T) fournissent des translations de l'appartement, alors que les opérations S permutent les coordonnées $\{c_i\}$. Il s'agit dans les deux cas d'opérations clairement affines.

Point (ii). Les réseaux de $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ sont les normes de la forme $\gamma_{\{e_i\},(n_i)}$ avec n_i dans $\mathbf{Z}$ pour tout i. Avec la formule $(\star)$, on voit qu'on atteint tous les réseaux de $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ en faisant opérer des matrices diagonales suivant $\mathcal{C}$ à coefficients des puissances de l'uniformisante (opérations (T)).

Point (iii). Une chambre de $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ est une chaîne d'inclusions de réseaux :

$$\varpi M_n = M_0 \underset{\neq}{\subset} M_1 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} M_n$$

Par conséquent, une chambre est envoyée sur une chambre du même appartement. Si un élément $n \in N_\mathcal{C}$ stabilise la chaîne d'inclusions stricte de réseaux associée à la chambre, il stabilise la chaîne d'inclusions, et donc fixe chaque réseau. Il fixe donc un repère affine de l'appartement, donc $\mathbf{A}_\mathcal{C}$ point par point. Par un élément de $T_\mathcal{C}$, on ramène tout sommet à $M_n = \bigoplus_{1\leq i\leq n} \mathcal{O}e_i$. Grâce à une permutation des droites , on peut toujours revenir à la chambre définie par $M_i = \bigoplus_{j\leq i} \mathcal{O}e_j \oplus \bigoplus_{j>i} \mathcal{O}\varpi e_j$. Cette permutation correspond à l'action d'un élément du groupe de Weyl. D'où la transitivité. □

4.B *Action de* $\mathrm{GL}(E)$. — Nous pouvons maintenant passer à l'espace $\mathcal{N}$ tout entier, pour obtenir le même type de résultat, en y ajoutant une décomposition.

Proposition. — (i) *$\mathrm{GL}(E)$ est transitif sur les chambres de $\mathcal{N}$.*
(ii) *Les orbites de $\mathrm{GL}(E)$ sont paramétrées par les suites $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n < 1$.*
(iii) *Le fixateur d'une facette dont la chaîne d'inclusions de réseaux associée est :*

$$\varpi M_n = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n,$$

avec $M_n = \bigoplus_i \mathcal{O}e_i$, est le sous-groupe formé des automorphismes g dont la matrice $[g_{ij}]$ dans $\{e_i\}$ vérifie : $g_{ij} \in \mathcal{O}$ et $g_{ij} \in \mathfrak{p}$ dès que l'on a $i \geq j$ et $c_j < c_i$.

(iv) *Soit $C \subset \mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ la donnée d'une chambre dans un appartement. On note B le fixateur de la chambre C et $N_{\mathcal{C}}$ le stabilisateur de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. Alors :*

(iv a) $\mathrm{GL}(E) = B.N_{\mathcal{C}}.B$.
(iv b) *$B \cap N_{\mathcal{C}}$ est le fixateur de l'appartement $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. Dans une $\mathcal{O}$-base d'un réseau de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$, il se décrit comme l'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $\mathcal{O}^{\times}$.*
(iv c) *B est transitif sur les appartements contenant C.*

Démonstration. Point (i). $\mathrm{GL}(E)$ opère transitivement sur les appartements (les croix), $N_{\mathcal{C}}$ permute transitivement les chambres de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$.

Point (ii). On sait déjà que les paramètres $\{c_i\}$ déterminés comme en 3.2. sont constants sur les orbites sous $\mathrm{GL}(E)$. Soient deux points x et x' auxquels est associée la même suite $\{c_i\}$. Par la transitivité de (i), on peut trouver g dans $\mathrm{GL}(E)$ qui envoie x dans la même chambre que x'. Mézalor, on sait que les points d'une chambre sont repérés par la suite $\{c_i\}$. On a donc $x' = gx$.

Point (iii). Le fixateur de la facette donnée doit fixer la chaîne de réseaux associés. Ceci justifie déjà que dans la base proposée, le fixateur est formé d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$. On peut donc ensuite raisonner par réduction modulo ϖ. Le fixateur est formé des éléments de réduction les éléments de $\mathrm{GL}_n(k)$ du fixateur du drapeau du k-espace vectoriel $\dfrac{M_n}{\varpi M_n}$ obtenu par réduction, ce qui fournit un parabolique sur k.

Point (iv a). Un élément de $N_{\mathcal{C}}$ qui fixe une chambre est nécessairement d'image triviale dans le groupe de Weyl, et par conséquent est diagonal. D'après la formule $(\star)$, les coefficients diagonaux doivent être de valuation nulle.

Point (iv c). Soit $\mathbf{A}'_{\mathcal{C}}$ un appartement contenant C. On sait qu'il existe g dans $\mathrm{GL}(E)$ tel que $\mathbf{A}'_{\mathcal{C}} = g^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. On a alors $gC \in \mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. Par conséquent, il existe $n \in N_{\mathcal{C}}$ tel que $ngC = C$. Finalement : $ng\mathbf{A}'_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ et $ng \in B$.

Point (iv b). Soit g dans $\mathrm{GL}(E)$. On sait qu'il existe un appartement $\mathbf{A}'_{\mathcal{C}}$ contenant simultanément C et gC, et que cet appartement s'écrit d'après ce qu'on vient de prouver $\mathbf{A}'_{\mathcal{C}} = b\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$, avec $b \in B$. Par conséquent, $g^{-1}b\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ contient C et à nouveau d'après (iv c) il existe b' dans B tel $b'g^{-1}b\mathbf{A}_{\mathcal{C}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. Autrement dit, $b'g^{-1}b$ est dans $N_{\mathcal{C}}$. $\square$

5. Immeuble de SL(E). Dessins

Nous allons enfin définir un immeuble en prenant le quotient de $\mathcal{N}$ par la version additive de l'homothétie des normes.

5.A *Quotient par l'homothétie.* — La version additive de l'homothétie des normes est la relation d'équivalence suivante :

$$\gamma \sim \gamma' \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma - \gamma' \text{ est constante sur E.}$$

À l'évidence, l'action de $\mathrm{GL}(E)$ est compatible à $\sim$, ce qui permet de définir une action de $\mathrm{GL}(E)$ sur le quotient. Enfin, pour toute matrice scalaire λI, on a : $(\lambda I).\gamma = \gamma - v(\lambda) \sim \gamma$, ce qui montre que le centre de $\mathrm{GL}(E)$ opère trivialement sur le quotient et qui explique qu'on fera plutôt opérer $\mathrm{PGL}(E)$ ou son revêtement $\mathrm{SL}(E)$ sur cet espace.

Définition. — *Le quotient* $\mathcal{I} = \dfrac{\mathcal{N}}{\sim}$ *est appelé* l'immeuble de $\mathrm{SL}(E)$ ou $\mathrm{PGL}(E)$. *Il hérite naturellement une action de ces groupes de celle de* $\mathrm{GL}(E)$ *sur* $\mathcal{N}$.

5.B *Dessins d'immeubles et d'appartements.* — Revenons rapidement à $\mathcal{N}$ et plus particulièrement à un appartement $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. En extrayant une base $\{e_i\}$ de $\mathcal{C}$, on a vu une description de cet appartement $\mathbf{A}_{\mathcal{C}} = \{\gamma_{\{e_i\},\{c_i\}} \mid \{c_i\} \in \mathbf{R}^{\mathcal{C}}\}$, et de son ensemble de sommets $S(\mathbf{A}_{\mathcal{C}}) = \{\gamma_{\{e_i\},\{c_i\}} \mid \{c_i\} \in \mathbf{Z}^{\mathcal{C}}\}$. Par définition des facettes ouvertes, deux normes $\gamma_{\{e_i\},\{c_i\}}$ et $\gamma_{\{e_i\},(d_i)}$ sont dans la même facette ouverte si et seulement si :

$$\forall m \in \mathbf{Z} \quad \forall i \quad c_i - m \text{ et } d_i - m \text{ ont le même signe strict}$$

$$\text{et} \quad \forall m \in \mathbf{Z} \quad \forall i \neq j \quad c_i - c_j - m \text{ et } d_i - d_j - m \text{ ont le même signe strict.}$$

Moyennant quoi, on peut faire le dessin d'un appartement de $\mathcal{N}$ dans le cas $n = 2$.

Après passage au quotient, les dessins sont un peu plus faciles (on gagne une dimension). Voici un exemple d'appartement (celui de l'immeuble de $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Q}_p)$ pour tout p).

Enfin, la géométrie de l'immeuble de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ peut être globalement suggérée, puisqu'il s'agit d'un arbre homogène de valence $p+1$. Cas $p = 2$:

6. Autres objets géométriques immobiliers

La combinatoire de $\mathrm{GL}(E)$ comme groupe réductif sur $\mathbf{K}$, en termes de racines par rapport à un tore maximal est bien connue. Le but de cette dernière section est de définir une combinatoire plus fine en utilisant la nature particulière de corps local de $\mathbf{K}$. L'introduction d'objets géométriques supplémentaires permet une formulation plus intrinsèque. Soient $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ un appartement et $\{e_i\}$ une $\mathcal{O}$-base extraite de $\mathcal{C}$ d'un réseau de cet appartement, qui fournit l'origine par rapport à laquelle on vectorialise $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. D'où des coordonnées $\{c_i\}$.

Définition. — (i) *Un* mur *de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ est une partie d'équation $c_i - c_j = r$ pour $i \neq j$ et r dans $\mathbf{Z}$. Un mur est un hyperplan affine qui sépare $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ en deux demi-espaces appelés* demi-appartements *de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$.*
(ii) *Un* mur *(respectivement* demi-espace*) de $\mathcal{N}$ est un mur (respectivement demi-espace) d'un appartement de $\mathcal{N}$.*

Remarquons que la définition de l'ensemble des murs d'un appartement ne dépend pas du choix de la $\mathcal{O}$-base, ni du réseau.

Faisons quelques rappels sur les racines de $\mathrm{GL}(E)$ relativement à tore maximal $T_{\mathcal{C}}$, en partant de quelques considérations non intrinsèques. On conserve $\{e_i\}$.

On reprend les caractères $\xi_j := \xi_{D_j}$ de 4. Les racines de $\mathrm{GL}(E)$ par rapport à $T_{\mathcal{C}}$ sont les caractères $\alpha_{ij} := \xi_i/\xi_j$ ($\xi_i - \xi_j$ en notation additive) pour $i \neq j$. Pour $i \neq j$, on définit aussi le sous-groupe unipotent U_{ij} à un paramètre additif, image du morphisme $u_{ij} : \mathbf{K} \to \mathrm{GL}(E)$ qui attache à $t \in \mathbf{K}$ la matrice $I + tE_{ij}$. (E_{ij} est le vecteur d'indice i, j de la base de $M_n(\mathbf{K})$ associé à la base $\{e_i\}$).

Les relations entre $T_{\mathcal{C}}$ et U_{ij} sont décrites par $\forall t \in T_{\mathcal{C}} \quad t.u_{ij}(k).t^{-1} = u_{ij}(\alpha_{ij}(t)k)$.

Un petit calcul montre facilement que l'action de U_{ij} sur les normes de l'appartement $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ est décrite par :

Lemme. — *Pour tout x de $\mathbf{K}$, $u = u_{ij}(x)$ fixe $\gamma_{\{e_i\},\{c_i\}}$ si et seulement si $c_i - c_j \leq v(x)$. Autrement dit, le lieu des points fixes dans $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$ sous $u_{ij}(x)$ est le demi-espace D_u d'équation $c_i - c_j \leq v(x)$.* □

C'est un passage du groupe à l'espace $\mathcal{N}$, via une prise de points fixes. Pour faire le trajet inverse en caractérisant des éléments de $\mathrm{GL}(E)$ par leur action sur $\mathcal{N}$, il est plus commode d'introduire un peu de notations. Soit D un demi-appartement de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. D est défini par une inéquation $c_i - c_j < r$ $(r \in \mathbf{Z})$. Alors il est facile de voir que le sous-groupe $\{u \in U_{ij} : v(u_{ij}^{-1}(u)) \geq r\}$, dépend au plus de l'appartement et de D.

DÉFINITION. — *Pour tout demi-appartement D de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$, on note U_D le sous-groupe ainsi obtenu.*

Le lemme qui suit permet d'interpréter les symétries par rapport aux murs :

LEMME. — *Pour tout u dans $U_{ij} \setminus \{0\}$, il existe un unique couple (u', u'') de $\big(U_{ji}\big)^2$ tel que $m(u) := u'.u.u''$ est dans $N_{\mathcal{C}}$. L'action de $m(u)$ est une symétrie par rapport au mur qui est le bord de D_u. Cette symétrie est orthogonale pour tout produit scalaire invariant sous le groupe de Weyl.* □

Le passage de l'espace $\mathcal{N}$ au groupe $\mathrm{GL}(E)$ permet d'obtenir par exemple :

THÉORÈME. — (i) *Pour tout demi-espace D de $\mathcal{N}$, le sous-groupe U_D ne dépend que de D.*
(ii) *Soit γ un élément de $\mathbf{A}_{\mathcal{C}}$. Alors le fixateur de γ dans* $\mathrm{GL}(E)$ *est engendré par le fixateur de γ dans $N_{\mathcal{C}}$ et les groupes U_D pour les demi-espaces D qui contiennent γ.* □

On peut dans cette voie obtenir des décompositions beaucoup plus fines de $\mathrm{GL}(E)$ et de certains de ses sous-groupes (sous-groupes parahoriques notamment).

Références

[B-T] F. BRUHAT, J. TITS, *Groupes réductifs sur un corps local* I. *Données radicielles valuées.* Publ. Math. IHÉS **41** (1972), 5-251.
[G-I] F. GOLDMAN, N. IWAHORI, *The space of* $\mathfrak{p}$*-adic norms*, Acta Math. **109** (1963), 137-177.
[R] G. ROUSSEAU, *Notes d'exposé.*

Bertrand RÉMY