Groupe de travail «Immeubles»

SYSTÈMES DE CHAMBRES ET SYSTÈMES DE TITS

1. Immeubles et distance combinatoire

Dans tout ce qui suit, $M = [m_{st}]_{s,t\in S}$ désigne une matrice de Coxeter indexée par l'ensemble S; W est le groupe associé. On va donner la définition d'un *immeuble de type* M, qui fait appel à une application à valeurs dans le groupe W. C'est un point de vue qui met en avant les chambres plutôt que les appartements, et qui permet de définir les jumelages. La référence pour cette section est [R, §3].

1.A *W-distance.* — Voici la définition des immeubles en termes de *W-distance.*

Définition. — *Un* immeuble de type M *est un couple* $(\mathcal{I}, d)$ *où* $\mathcal{I}$ *est un ensemble et* d *est une application «W-distance»* $d : \mathcal{I}\times\mathcal{I} \to W$ *qui vérifie pour tous* x *et* y *de* $\mathcal{I}$ *les conditions suivantes (pour la notation* $w = d(x, y)$*):*

(IM1) $w = 1$ *si et seulement si* $x = y$.
(IM2) *Si* z *dans* $\mathcal{I}$ *vérifie* $d(y, z) = s$ *pour* s *dans* S, *alors* $d(x, z)$ *vaut* ws *ou* w.
En outre, si $\ell(ws) > \ell(w)$, *alors* $d(x, z)$ *vaut* ws.
(IM3) *Pour tout* s *de* S, *il existe* z *dans* $\mathcal{I}$ *tel que* $d(y, z) = s$ *et* $d(x, z) = ws$.

Une (W-)isométrie *entre immeubles de type* M *est une application qui préserve la W-distance. On parle d'*automorphisme *quand but et source coïncident.*

On peut attacher un immeuble de type M à un immeuble au sens des systèmes d'appartements. Soit $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ un tel immeuble. La matrice de Coxeter M est celle d'un appartement quelconque du système $\mathcal{A}$. Si $(x = c_0, c_1, \ldots c_n = y)$ est une galerie minimale de type $(s_1, \ldots s_n) \in S^n$, on pose $d(x, y) := s_1 \ldots s_n$. Pour la vérification les axiomes de W-distance sur d, on choisit des appartements contenant les galeries minimales. Ces choix sont justifiés par la théorie des rétractions.

Enfin, il existe une variante de cette définition plus propice à la traduction géométrique.

1.B *Systèmes de chambres.* — Les systèmes de chambres possèdent une définition très large, presque naïve...

Définition. — *Un* système de chambres *sur un ensemble* I *est un ensemble* E *muni d'une relation d'équivalence pour chaque élément* i *de* I, *qu'on appelle* i-adjacence. *Les éléments de* E *sont appelés les* chambres; *on parle de chambres* i-adjacentes *(resp.* adjacentes*) si elles sont équivalentes par la relation d'indice* i *(resp. par une des relations).*

Le fait de parler d'adjacence permet de développer le vocabulaire des galeries.

Définition. — (i) *Pour* J *une partie de* I, *on appelle* J-galerie *une suite de chambres telles que deux consécutives d'entre elles sont* i*-adjacentes pour un* i *dans* J.
(ii) *Une partie est dite* J-connexe *si deux chambres de cette partie sont toujours reliées par une* J*-galerie.*

(iii) *Les composantes J-connexes de E sont appelés* les résidus de type J *de* E. *Le résidu de type J d'une chambre c sera noté $\Sigma_J(c)$.*

L'exemple essentiel de système de chambres est le suivant. Si G est un groupe, B un sous-groupe, et $(P_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-groupes contenant B, on peut munir d'une structure de système de chambres sur I les classes gB en décrétant gB i-adjacente à hB si et seulement si $gP_i = hP_i$.

On peut voir un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ de type M comme un système de chambres sur S en déclarant deux éléments s-adjacents si et seulement s'ils sont égaux ou à distance s. On sait en outre quelles propriétés requérir pour caractériser les systèmes de chambres ainsi produits à partir d'un immeuble de type M. C'est le point de vue du livre de M. Ronan.

1.C *Complexes de Coxeter. Racines.* — Le *complexe de Coxeter* associé au système de Coxeter (W, S) est le système de chambres construit comme pour l'exemple précédent, à partir de la donnée:

$$G = W,\ B = \{1\},\ I = S \text{ et } P_s = \{1; s\}.$$

Dans ce cas, les chambres sont les éléments w de W, les paires de chambres distinctes s-adjacentes sont les paires $\{w; ws\}$. Pour les groupes de Coxeter, le système de chambres ainsi formé est un immeuble (la $W-$distance est donnée par $d(x, y) = x^{-1}y$). Cet immeuble possède la particularité que les $\{s\}$-résidus - les *cloisons* - sont formés d'exactement deux chambres. On parle d'immeuble *mince*. Enfin, l'action du groupe de Coxeter W par translations à gauche sur l'immeuble W en fait un groupe d'automorphismes.

On dispose aussi d'une notion abstraite de *racine* dans un complexe de Coxeter.

Définition. — *La* racine simple *d'indice s de W est l'ensemble de chambres:*

$$\alpha_s := \{w \in W \mid \ell(sw) > \ell(w)\} (\subset W).$$

Une racine *de W est une translatée à gauche de racine simple par W, elle est dite* positive *si elle contient* 1, négative sinon. *Φ désigne l'ensemble des racines de W, Φ_+ celui des racines positives.*

L'intérêt des racines est de pouvoir traiter de manière combinatoire des notions géométriques en faisant «comme si» W était un groupe de réflexions, l'immeuble mince W remplaçant l'espace vectoriel réel. *Grosso modo*, les racines jouent le rôle de demi-espaces, les galeries minimales celui des segments, ce qui permet de donner un sens à la notion de convexité combinatoire.

1.D *Appartements et résidus.* — On va définir deux sortes de sous-immeubles dans l'immeuble $\mathcal{I}$. Commençons par les *appartements*, qui sont des immeubles minces et qui constituent des sortes de tranches dans $\mathcal{I}$.

Définition. — *Un* appartement *de $(\mathcal{I}, d)$ est une image isométrique de W dans $\mathcal{I}$.*

L'intérêt est qu'on peut transporter le vocabulaire de la section précédente (racines, ...) aux immeubles épais (*i.e* non minces). Le tout est de savoir qu'il existe assez d'appartements dans un immeuble. D'où l'importance de ce théorème de prolongement.

Théorème. — *Toute isométrie d'une partie de l'immeuble W dans un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ se prolonge en une isométrie de W dans $\mathcal{I}$.* □

La seconde famille de sous-immeubles est constituée des résidus, en vertu de:

PROPOSITION. — *Pour toute chambre c de $\mathcal{I}$ et toute partie J de S, le résidu $\Sigma_J(c)$ est un immeuble de type $[m_{st}]_{s,t\in J}$.* □

On peut maintenant dire un mot sur la construction d'un immeuble au sens des systèmes d'appartements, à partir de l'immeuble $(\mathcal{I}, d)$. Il s'agit de définir un complexe simplicial étiqueté: on choisit l'ensemble des résidus, étiqueté par le type et ordonné par la relation d'inclusion renversée. Alors, le théorème de prolongement des isométries assure que ce complexe simplicial vérifie les axiomes avec l'ensemble de tous les appartements comme système d'appartements.

2. Systèmes de Tits

La combinatoire des *systèmes de Tits* pour les groupes permet de relier ceux-ci aux immeubles. Pour l'instant, on va étudier cette structure pour elle-même. La référence pour cette section est le chapitre IV.2. de [Bbk].

2.A *BN-paires.* — Les axiomes d'un système de Tits sont de nature purement combinatoire, ce qui permet de les utiliser dans des situations très variées (groupes réductifs algébriques, finis de type Lie, $\mathfrak{p}$-adiques, groupes de Kac-Moody...).

DÉFINITION. — *On appelle* système de Tits *un quadruplet (G, B, N, S), où G est un groupe, B et N sont deux sous-groupes de G et S est une partie de $W := N/(B \cap N)$, le tout satisfaisant aux axiomes suivants:*

(BN1) $G = \langle B \cup N \rangle$ *et* $(B \cap N) \lhd N$.
(BN2) *S est formé d'éléments d'ordre deux et engendre W.*
(BN3) *Pour tous w de W et s de S, on a $sBw \subset BwB \cup BswB$.*
(BN4) *Pour tout s de S, on a $sBs \not\subset B$.*

*Le couple (B, N) constitue une BN-*paire *dans G. W est appelé le* groupe de Weyl *de la BN-paire. On note T le sous-groupe $B \cap N$.*

Ces simples axiomes permettent de dresser une longue liste de propriétés. En pratique, pour mettre en évidence un système de Tits, on est souvent amené à en prouver une certaine partie.

2.B *Propriétés des BN-paires.* — Le premier résultat est une décomposition globale du groupe G.

THÉORÈME. — *On a $G = BWB$, et l'application qui attache à tout w de W la double classe BwB établit une bijection entre W et l'ensemble des doubles classes modulo B.*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB \quad \text{– Décomposition de Bruhat –}$$

□

Le deuxième résultat met en évidence un système de Coxeter.

THÉORÈME. — *Le couple (W, S) est un système de Coxeter, et on a en outre:*

$$BswB = BsBwB \quad \text{si et seulement si} \quad \ell(sw) > \ell(w).$$

□

Le résultat qui suit explicite une structure de treillis pour l'ensemble des sous-groupes de G qui contiennent B.

Théorème. — (i) *Pour toute partie X de S, la réunion de doubles classes $G_X := BW_XB$ avec $W_X := \langle s \mid s \in X \rangle$, est un sous-groupe de G. C'est le sous-groupe engendré par les doubles classes BsB pour s dans X.*
(ii) *L'application $X \mapsto BW_XB$ établit une bijection de l'ensemble des parties de S sur l'ensemble des sous-groupes de G contenant B, croissante pour l'inclusion.*
(iii) *Soit g dans G et soit X une partie de S. Alors, si gBg^{-1} est dans G_X, g est nécessairement dans G_X.* □

Enfin, on a des relations précises et analogues sur une plus vaste classe de sous-groupes. On peut même étudier les relations d'incidence de ces sous-groupes.

Définition. — *Un* sous-groupe parabolique *de G est un sous-groupe qui contient un conjugué de B. Un* sous-groupe parabolique standard *de G est un sous-groupe qui contient B, qui est donc de la forme $G_X = BW_XB$.*

Sur la normalisation des sous-groupes paraboliques:

Théorème. — *Soit P un sous-groupe de G.*
(i) *Pour que P soit parabolique il faut et il suffit qu'il existe une partie X de S telle que P soit conjugué de G_X.*
(ii) *Soient X et X' des parties de S, et g, g' des éléments de G tels que $P = gG_Xg^{-1} = g'G_{X'}g'^{-1}$. Alors, $X = X'$ et $g'g^{-1}$ est dans P.* □

Sur les intersections:

Théorème. — (i) *Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G d'intersection parabolique, et soit g dans G tel que gPg^{-1} est dans P'. Alors g est dans P' et P est inclus dans P'.*
(ii) *Deux sous-groupes paraboliques distincts d'intersection parabolique ne peuvent être conjugués.*
(iii) *Si Q et Q' sont deux sous-groupes paraboliques contenus dans un même sous-groupe P, alors tout élément qui conjugue Q sur Q' est dans P.*
(iv) *Tout sous-groupe parabolique est égal à son normalisateur.*
(v) *L'intersection de deux sous-groupes paraboliques de G contient toujours un conjugué de T.*
□

La structure de BN-paire constitue en quelque sorte la combinatoire minimale commune à toute une zoologie de raffinements possibles.

2.C *Raffinements.* — Il existe différentes voies de spécialisation des BN-paires. La notion de *donnée radicielle génératrice* fait encore partie des combinatoires assez générales. On se donne Φ un système de racines fini réduit dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel V. On note Φ_+ un système positif, Π la base correspondante et W le groupe de Weyl.

Définition. — *Soient G un groupe, N un sous-groupe de G, T un sous-groupe distingué de N et $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ une famille de sous-groupes de G. On note $U_+ := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_+ \rangle$ et $U_- := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_- \rangle$. On dit que $\big(N, T, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$ est une* donnée radicielle *dans G si les axiomes suivants sont vérifiés:*

(DR1) $\forall \alpha \in \Phi \quad U_\alpha \neq \{1\}$.
(DR2) $\forall \alpha, \beta \in \Phi_+ \quad [U_\alpha, U_\beta] \subset \langle U_{\lambda\alpha+\mu\beta} \mid \lambda\alpha + \mu\beta \in \Phi,\ \lambda, \mu \in \mathbf{N}^* \rangle$.

(DR3) *Il existe un épimorphisme* $\nu : N \twoheadrightarrow W$ *de noyau* T *tel que pour tout* n *de* N *et pour toute racine* α *on ait* $nU_\alpha n^{-1} = U_{\nu(n)\alpha}$.
On note alors M_α *l'ensemble des éléments de* N *qui relèvent modulo* T *la symétrie de* W *associée à* α.
(DR4) $\forall \alpha \in \Phi \quad U_{-\alpha} \setminus \{1\} \subset U_\alpha M_\alpha U_\alpha$.
(DR5) $TU_+ \cap U_- = \{1\}$.
La donnée radicielle est dite génératrice *si* G *est engendré par* T *et les* U_α.

On a comme annoncé:

Proposition. — *Si* $\big(N, T, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$ *est une donnée radicielle génératrice dans* G, *alors* (G, TU_+, N, S) *est un système de Tits pour* $S := \{M_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}/T$. □

L'hypothèse Φ fini n'est pas essentielle. Pour tout système (W, S), il existe une représentation fidèle de W dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de base les symboles α_s ($s \in S$), et une correspondance bijective entre les éléments $w\alpha_s$ et les racines de W, pour laquelle Φ_+ (respectivement Φ_-) désigne l'ensemble des racines à coefficients tous positifs (respectivement négatifs) dans la base $\{\alpha_s\}_{s\in S}$. On peut alors définir des combinatoires raffinant les BN-paires et indexées par des systèmes de racines de groupes de Coxeter infinis. Elles concernent notamment les groupes de Kac-Moody.

Enfin, il existe une combinatoire adaptée au cas des groupes réductifs $\mathfrak{p}$-adiques qui axiomatise la filtration des groupes radiciels héritée de celle du corps local de définition (*données radicielles valuées* de la théorie de Bruhat et Tits).

2.D *Exemples algébriques.* — Prouver qu'un groupe réductif sur un corps algébriquement clos possède une BN-paire constitue une partie conséquente de la théorie de ces groupes. Le théorème de structure de la théorie de Borel-Chevalley peut être formulé ainsi.

Théorème. — *Soit* G *un groupe algébrique réductif connexe et défini sur un corps algébriquement clos* $\overline{\mathbf{K}}$. *On note* T *un tore maximal,* N *son normalisateur et* $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ *la famille de ses sous-groupes radiciels. Alors,* $\big(N, T, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$ *est une donnée radicielle génératrice dans* G. □

En outre, les sous-groupes paraboliques qui sont définis de manière intrinsèque comme les sous-groupes P de G tels que le quotient G/P est une variété complète, correspondent aux sous-groupes paraboliques abstraits.

La formulation de la combinatoire semble ajustée précisément à cette situation. En fait, dans le cas d'un corps base $\mathbf{K}$ non algébriquement clos et d'un groupe G isotrope mais non nécessairement déployé sur $\mathbf{K}$, son intérêt est plus évident. On résume un résultat important de la théorie de Borel-Tits par ce théorème.

Théorème. — *Soit* G *un groupe algébrique réductif connexe et isotrope sur un corps* $\mathbf{K}$. *On se donne* S *un tore* $\mathbf{K}$*-déployé maximal,* N *son normalisateur, et* P *un sous-groupe parabolique défini sur* $\mathbf{K}$*, minimal et contenant* S. *L'indice* $_{\mathbf{K}}$ *désigne la prise des points rationnels. Alors,* $(P_{\mathbf{K}}, N_{\mathbf{K}})$ *est une* BN*-paire dans* $G_{\mathbf{K}}$. □

On pourrait en aménageant légèrement les axiomes des données radicielles, fournir un énoncé complètement analogue au premier théorème. (Pour cela, il faudrait juste rendre compte du caractère éventuellement non réduit du système de racines).

3. Immeubles de groupes

Dans tout ce qui suit, $(\mathcal{I}, d)$ désigne un immeuble de type M (matrice de Coxeter) et G un groupe muni d'une BN-paire, d'où l'usage de toutes les notations précédentes. La référence pour cette section est [R, §5], hormis le commentaire sur les groupes algébriques.

3.A *Groupe fortement transitif sur un immeuble.* — Il est d'abord commode d'introduire la définition d'action *fortement transitive* d'un groupe d'automorphismes sur un immeuble.

Définition. — *Un groupe d'automorphismes G d'un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ est dit* fortement transitif *(relativement à un appartement $\mathbf{A}$) s'il vérifie les deux conditions suivantes.*

(FT1) *Pour tout w de W, G est transitif sur les paires de chambres à distance w.*
(FT2) *Le stabilisateur de $\mathbf{A}$ dans G est transitif sur les chambres de $\mathbf{A}$.*

La forte transitivité va apparaître tantôt comme sous-produit, tantôt comme condition dans le dictionnaire $\{\text{Immeubles}\} \leftrightarrow \{BN-\text{paires}\}$.

3.B *Immeuble d'une BN-paire.* — Voici le procédé de fabrication d'immeubles à partir des BN-paires.

Théorème. — *Pour tout système de Tits (G, B, N, S) de groupe de Weyl W, l'application $d : G/B \times G/B \to W$ qui attache au couple (gB, hB) l'élément w tel que $g^{-1}h$ est dans la double classe de Bruhat BwB, fait de $(G/B, d)$ un immeuble de type (W, S).*
Pour s dans S, la relation de s-adjacence $\sim_s$ se lit de la façon suivante:

$$gB \sim_s hB \Leftrightarrow g^{-1}h \in B\langle s\rangle B.$$

G opérant par translations à gauche, est un groupe fortement transitif d'automorphismes de $(G/B, d)$ pour l'appartement $\{wB\}_{w\in W}$. N est le stabilisateur de cet appartement, B le fixateur de la chambre B. □

On peut voir ce résultat comme la version combinatoire de la démarche qui consiste à faire opérer un groupe de Lie semi-simple réel sur son espace symétrique riemannien. D'ailleurs, pour les groupes réductifs $\mathfrak{p}$-adiques possédant un système de Tits affine, la réalisation métrique de Bruhat-Tits de l'immeuble associé rend des services analogues (classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux, cohomologie des groupes discrets...).

Reprenons l'exemple de 2.4. d'un groupe algébrique G, réductif connexe sur un corps algébriquement clos $\overline{\mathbf{K}}$. La description des objets immobiliers dans cette situation prend une tournure plus concrète. Ainsi, si on voit B comme une chambre pour la structure d'immeuble ci-dessus, l'application:

$$U_w := U_+ \cap w^{-1}U_-w \to \mathcal{I}$$

$$u \mapsto uwB$$

établit une bijection entre le sous-groupe U_w et les chambres à distance w de B. Le J-résidu de B est précisément BW_JB/B et son stabilisateur est le sous-groupe parabolique BW_JB. Les appartements de $\mathcal{I} = G/B$ sont les ensembles $\{gwB\}_{w\in W}$ pour g dans G. Le fixateur d'un tel appartement est l'intersection des fixateurs de chacune des chambres de cet appartement, autrement dit $\bigcap_{w\in W} gwB(gw)^{-1} = gTg^{-1}$. Par conjugaison des tores maximaux, la prise de fixateur établit donc une bijection G-équivariante entre les sous-groupes de Cartan de G et les appartements de son immeuble.

3.C *Trajet inverse.* — La forte transitivité apparaît logiquement comme hypothèse pour le trajet inverse.

THÉORÈME. — *Soit G un groupe d'automorphismes de l'immeuble $(\mathcal{I}, d)$, fortement transitif pour l'appartement $\mathbf{A}$. On se donne c une chambre de $\mathbf{A}$, et on note N le stabilisateur de $\mathbf{A}$, B le fixateur de c. Alors, (B, N) est une BN-paire dans G.* □

On peut chercher à manipuler des groupes d'automorphismes un peu plus larges. Par exemple, dans le cas d'un immeuble provenant déjà d'un groupe algébrique, autoriser la permutation des adjacences par des automorphismes de diagramme permet de gérer des actions de Galois sur ce groupe (et donc d'éventuelles descentes).

Références:

[Bo] A. BOREL, Linear algebraic groups, Springer, 1990.
[Bbk] N. BOURBAKI, Lie IV-VI, Masson, 1980.
[H] J. HUMPHREYS, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge University Press, 1990.
[R] M. RONAN, Lectures on buildings, Academic Press, 1989.

Bertrand RÉMY