INTRODUCTION AUX IMMEUBLES

Il s'agit de présenter les immeubles. Pour faire court, on va se limiter à une façon de les définir, le point de vue des *systèmes d'appartements.* Des exemples et des applications sont présentés rapidement comme motivation, où interviennent espaces symétriques et groupes p-adiques. Ces notes sont organisées comme suit. Le premier paragraphe – purement combinatoire – décrit les complexes de Coxeter, qui seront des «tranches» dans les immeubles. Le second paragraphe, lui aussi combinatoire, définit les immeubles en toute généralité ainsi que leur lien avec l'axiomatique de groupe des *systèmes de Tits.* Le chapitre 3 traite les exemples classiques sphériques et affines. Ils permettent d'étudier la classe des groupes algébriques semi-simples sur un corps quelconque et sur un corps local respectivement. Le dernier chapitre présente des specimens plus exotiques d'immeubles, qui ont conduit à des progrès récents en théorie des groupes et géométrie.

1. Groupes et complexes de Coxeter

1.A *Groupes de Coxeter* [H, V.1]. — Une *matrice de Coxeter* est une matrice symétrique $M = [m_{st}]_{s,t \in S} \in (\mathbf{N} \cup \{\infty\})^{S \times S}$ dont les coefficients diagonaux valent 1, et dont les coefficients hors diagonale sont ≥ 2. On supposera toujours l'ensemble d'indice S fini. Le *groupe de Coxeter* associé est le groupe défini par la présentation:

$$W := \langle s \mid (st)^{m_{st}=1} \text{ quand } m_{st} < \infty \rangle.$$

Les groupes symétriques, les groupes de Weyl de groupes algébriques sont des groupes de Coxeter finis. Pour mieux comprendre les groupes de Coxeter quelconques, on attache à chaque tel groupe un complexe simplicial abstrait admettant une action naturelle qui permet de le dévisser.

1.B *Complexes de Coxeter* [Br, III]. — Ensemblistement, le *complexe de Coxeter* de (W, S) est

$$\Sigma = \Sigma(W, S) := \{wW_J : w \in W, J \subset S\},$$

où W_J est le sous-groupe engendré par les générateurs canoniques de $J \subset S$. Σ est un complexe simplicial pour la relation d'inclusion renversée. L'action par translations de W sur Σ permet d'en définir un étiquetage naturel en décrétant le simplexe wW_J de type J. Les *chambres* de ce complexe sont les singletons $\{w\}$. De manière générale, les translatés wW_J des sous-groupes $W_J = \langle J \rangle$ sont appelés *facettes.* La facette wW_J est *(de type) sphérique* si le sous-groupe W_J est fini, autrement dit si son stabilisateur $wW_I w^{-1}$ est fini.

La géométrie des immeubles est modelée sur les complexes de Coxeter. Une façon de définir un immeuble consiste à dire qu'il est la réunion d'une collection de copies d'une de ces géométries, cette collection étant soumise à certaines propriétés d'incidence. Typiquement, les complexes de Coxeter se présenteront comme des «tranches» dans les immeubles.

1.C *Exemples et réalisations géométriques.* — Tout complexe de Coxeter admet au moins deux représentations géométriques intéressantes.

D'une part, on peut utiliser le *cône de Tits* défini dans Bourbaki [Bbk, V.4]. Les chambres y sont des cônes simpliciaux, ce qui donne une bonne intuition pour les arguments de convexité.

Cependant, la réalisation n'est pas localement finie en général, car une infinité de chambres s'accumule autour de chaque facette non sphérique. D'autre part, il existe une représentation par un complexe cellulaire qui possède de belles propriétés métriques. Ce complexe est dû à G. Moussong [M], qui l'a défini pour déterminer lesquels des groupes de Coxeter sont hyperboliques au sens de Gromov. Du point de vue des immeubles, cette construction autorise l'usage du théorème de point fixe de Bruhat-Tits [BT, 3.2]. On peut en effet voir les immeubles comme des espaces singuliers à courbure négative ou nulle: les triangles géodésiques y sont au moins aussi fins que que les triangles du plan euclidien.

Un autre point de vue – qui ne concerne pas tous les groupes de Coxeter – consiste à partir de la géométrie, et à constater ensuite qu'elle procure des représentations de groupes de Coxeter. Une source abondante de réalisations de complexes de Coxeter est le théorème de Poincaré: le groupe d'isométries engendré par les inversions relativement aux côtés d'un polyèdre (sphérique, euclidien ou hyperbolique) convenable, est un groupe de Coxeter qui opère sur un pavage. On retrouve ainsi les pavages euclidiens comme celui de $\mathbf{R}^2$ par des triangles équilatéraux. On obtient aussi les pavages du plan hyperbolique par des r-gones réguliers à angles droits, pour $r \geq 5$.

2. Immeubles du point de vue abstrait

2.A *Complexes simpliciaux.* — Voici la définition historiquement la plus ancienne des immeubles [Br, VI.1]. Elle fait appel à la géométrie des complexes de Coxeter évoquée au §1.

Définition. — *Un* immeuble *est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ qui peut être recouvert par la réunion d'une famille de sous-complexes Σ – les* appartements *– vérifiant:*

(I0) *Chaque appartement est un complexe de Coxeter.*
(I1) *Deux simplexes quelconques de $\mathcal{I}$ sont toujours contenus dans un appartement.*
(I2) *Si Σ et Σ' sont deux appartements contenant deux simplexes fixés A et B de $\mathcal{I}$, il existe un isomorphisme $\Sigma \simeq \Sigma'$ fixant $A \cup B$.*

Toute collection $\mathcal{A}$ de sous-complexes de $\mathcal{I}$ vérifiant les trois axiomes précédents est appelée système d'appartements *de $\mathcal{I}$. Le groupe de Coxeter qui modèle la géométrie des appartements est le* groupe de Weyl *de l'immeuble. L'immeuble est dit* sphérique *si son groupe de Weyl est fini. Les simplexes d'un immeuble sont appelés ses* facettes. *Les facettes maximales en sont les* chambres.

Par exemple, un complexe de Coxeter est un immeuble dans lequel chaque facette de codimension 1 est dans l'adhérence d'exactement deux chambres. Toute copie dans l'immeuble du complexe de Coxeter associé au groupe de Weyl est encore appelée *appartement.* L'ensemble de tous les appartements est un système d'appartements, éventuellement plus gros et qui contient tous les autres: c'est le *système complet d'appartements.* Cependant dans le cas sphérique, le seul système d'appartements de l'immeuble est le système complet [Br, IV.5].

Les facettes de codimension 1 sont appelées *cloisons*; le nombre de chambres qui contiennent une cloison dans leur adhérence est l'*épaisseur* de la cloison. On s'intéressera désormais aux immeubles *épais*, c'est-à-dire ceux dans lesquels toutes les épaisseurs sont ≥ 3. Le *type* d'une facette est à nouveau bien défini, c'est une application des facettes vers les parties de l'ensemble S des générateurs du groupe de Weyl. Les chambres sont du type $\varnothing$, les types des cloisons sont les singletons $\{s\}$, pour s dans S.

Deux chambres sont *s-adjacentes* si elles partagent une cloison de type $\{s\}$. On peut toujours relier deux chambres d'un immeuble par une *galerie*, c'est-à-dire une suite de chambres consécutivement adjacentes. Chaque galerie connectant deux chambres fixées définit un mot grâce au type des cloisons. Cela dit, en vertu d'une théorie combinatoire des homotopies, ces mots définissent le même élément du groupe de Weyl W. C'est la (W-)*distance* entre les deux chambres en question. Pour définir les immeubles, il est possible de prendre comme point de départ les propriétés de la W-distance entre chambres. C'est le point de vue du livre de M. Ronan [R]. Il est adapté à la théorie des *immeubles jumelés* qui s'applique aux groupes de Kac-Moody.

Finissons en définissant le *link* d'une facette F. C'est l'ensemble des facettes dans lesquelles F est contenue. Le link $\mathrm{lk}(F)$ est un sous-immeuble de l'immeuble ambiant. Si F est de type $I \subset S$, son groupe de Weyl est isomorphe au sous-groupe W_I. Il existe donc deux façons de faire apparaître des sous-immeubles: considérer un appartement ou un link. Les sous-immeubles du premier type sont toujours *minces*, *i.e.*, d'épaisseur constante égale à 2; ceux du second type sont épais dès que l'immeuble ambiant l'est.

2.B *Combinatoire de groupes: BN-paires* [Bbk, IV.2]. — L'intérêt des immeubles est qu'ils apparaissent naturellement comme espaces sur lesquels opèrent des groupes appartenant à une large famille. Cette classe se caractérise par une liste précise d'axiomes combinatoires. Bien qu'assez techniques, ces axiomes sont pertinents dans de nombreuses situations de théorie des groupes: finis, algébriques, de Lie...

DÉFINITION. — *On appelle* système de Tits *un quadruplet (G, B, N, S), où G est un groupe, B et N sont deux sous-groupes de G et S est une partie de $W := N/(B \cap N)$, le tout satisfaisant les axiomes suivants.*

(BN1) *$G = \langle B \cup N \rangle$ et $(B \cap N) \triangleleft N$.*
(BN2) *S est formé d'éléments d'ordre 2 et engendre W.*
(BN3) *Pour tous w de W et s de S, on a $sBw \subset BwB \cup BswB$.*
(BN4) *Pour tout s de S, on a $sBs \not\subset B$.*

*Le couple (B, N) constitue une BN-*paire *dans G. W est appelé le* groupe de Weyl *de la BN-paire. On note $H := B \cap N$.*

En fait, suivant la situation précise dans laquelle on se trouve, on ajuste un raffinement *ad hoc* de la structure combinatoire de BN-paire. On verra au §3 ce qu'il est bon de faire dans le cas des groupes algébriques semi-simples, quand le corps de base est quelconque et aussi quand ce corps est local.

De cette situation purement combinatoire, on peut déjà déduire formellement de nombreuses propriétés pour le groupe G. Le premier résultat est une décomposition globale du groupe G.

THÉORÈME. — *On a $G = BWB$, et l'application qui attache à tout w de W la double classe BwB établit une bijection entre W et l'ensemble des doubles classes modulo B.*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB \quad \text{– Décomposition de Bruhat –}$$

$\square$

Le deuxième résultat met en évidence un système de Coxeter.

Théorème. — *Le couple* (W, S) *est un système de Coxeter, et on a en outre:*

$$BswB = BsBwB \quad \text{si et seulement si} \quad \ell(sw) > \ell(w).$$

$\square$

Le résultat qui suit explicite une structure de treillis pour l'ensemble des sous-groupes de G qui contiennent B.

Théorème. — (i) *Pour toute partie* J *de* S*, la réunion de doubles classes* $P_J := BW_JB$ *avec* $W_J = \langle s \mid s \in J \rangle$*, est un sous-groupe de* G*. C'est le sous-groupe engendré par les doubles classes* BsB *pour* s *dans* J*.*
(ii) *L'application* $J \mapsto BW_JB$ *établit une bijection de l'ensemble des parties de* S *sur l'ensemble des sous-groupes de* G *contenant* B*. Elle est croissante pour l'inclusion.*
(iii) *Soit* g *dans* G *et soit* J *une partie de* S*. Alors, si* gBg^{-1} *est dans* P_J*,* g *est nécessairement dans* P_J*.* $\square$

Finissons par un peu de terminologie.

Définition. — *Un* sous-groupe parabolique *de* G *est un sous-groupe qui contient un conjugué de* B*. Un* sous-groupe parabolique standard *de* G *est un sous-groupe qui contient* B*, qui est donc de la forme* $P_J = BW_JB$*.*

2.C *Dictionnaire* [Br, VI.1]. — On veut maintenant circuler du point de vue des BN-paires à celui des immeubles, et inversement. Soit $\mathcal{I}$ un immeuble de type M – la matrice de Coxeter décrivant les appartements de $\mathcal{I}$. On doit d'abord introduire la définition d'action *fortement transitive* d'un groupe d'automorphismes sur un immeuble.

Définition. — *Un groupe d'automorphismes* G *d'un immeuble* $\mathcal{I}$ *est dit* fortement transitif *(relativement à un appartement* $\mathbf{A}$*) s'il vérifie les deux conditions suivantes.*

(FT1) *Pour tout* w *de* W*,* G *est transitif sur les paires de chambres à distance* w*.*
(FT2) *Le stabilisateur de* $\mathbf{A}$ *dans* G *est transitif sur les chambres de* $\mathbf{A}$*.*

La forte transitivité apparaît tantôt comme sous-produit, tantôt comme condition dans le dictionnaire (non-univoque) $\{\text{Immeubles}\} \leftrightarrow \{BN\text{−paires}\}$. Bien entendu, plusieurs groupes peuvent opérer sur un immeuble donné de façon à produire une combinatoire de BN-paire.

Théorème. — *Soit* G *un groupe d'automorphismes de l'immeuble* $\mathcal{I}$*, fortement transitif pour l'appartement* $\mathbf{A}$*. On se donne* c *une chambre de* $\mathbf{A}$*, et on note* N *le stabilisateur de* $\mathbf{A}$*,* B *le fixateur de* c*. Alors,* (B, N) *est une* BN*-paire dans* G*.* $\square$

Réciproquement, l'immeuble associé à un groupe G – muni d'une BN-paire – est ensemblistement formé des translatés gP_I, pour $g \in G$, I une partie de S et P_I le sous-groupe parabolique standard de type I. Ordonné par l'inverse de l'inclusion, cet ensemble est un complexe simplicial. Les propriétés formelles des BN-paires permettent aussi de vérifier que l'on a ainsi construit un immeuble. Le sous-ensemble de translatés $\mathbf{A} := \{wP_I\}_{w \in W, I \subset S}$ est en bijection avec le complexe de Coxeter associé à W. On parle d'*appartement standard.* L'ensemble des translatés $g\mathbf{A}$ $(g \in G)$ est un système d'appartements.

3. Exemples et usages classiques

3.A *Immeuble sphérique d'un groupe réductif sur un corps quelconque.* — Il existe différentes voies de spécialisation des BN-paires. La notion de *donnée radicielle génératrice* fait encore partie des combinatoires assez générales. On se donne Φ un système de racines fini réduit dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel V. On note Φ_+ un système positif, Π la base correspondante et W le groupe de Weyl.

DÉFINITION. — *Soient G un groupe, N un sous-groupe de G, T un sous-groupe distingué de N et $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ une famille de sous-groupes de G. On note $U_+ := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_+\rangle$ et $U_- := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_-\rangle$. On dit que $\big(N, T, \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}\big)$ est une* donnée radicielle *dans G si les axiomes suivants sont vérifiés:*

(DR1) $\forall \alpha \in \Phi \quad U_\alpha \neq \{1\}$.
(DR2) $\forall \alpha, \beta \in \Phi_+ \quad [U_\alpha, U_\beta] \subset \langle U_{\lambda\alpha+\mu\beta} \mid \lambda\alpha + \mu\beta \in \Phi,\ \lambda, \mu \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\rangle$.
(DR3) *Il existe un épimorphisme $\nu : N \twoheadrightarrow W$ de noyau T tel que pour tout n de N et pour toute racine α on ait $nU_\alpha n^{-1} = U_{\nu(n)\alpha}$. On note alors M_α l'ensemble des éléments de N qui relèvent modulo T la symétrie de W associée à α.*
(DR4) $\forall \alpha \in \Phi \quad U_{-\alpha} \setminus \{1\} \subset U_\alpha M_\alpha U_\alpha$.
(DR5) $TU_+ \cap U_- = \{1\}$.

La donnée radicielle est dite génératrice *si G est engendré par T et les U_α.*

Avant de passer plus concrètement aux groupes algébriques, voici le résultat qui justifie le terme de «raffinement» des BN-paires pour cette structure combinatoire.

PROPOSITION. — *Si $\big(N, T, \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}\big)$ est une donnée radicielle génératrice dans G, alors (G, TU_+, N, S) est un système de Tits pour $S := \{M_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}/T$.* □

Prouver qu'un groupe réductif sur un corps algébriquement clos possède une BN-paire constitue une partie conséquente de la théorie de ces groupes. Le théorème de structure de la théorie de Borel-Chevalley peut être formulé ainsi [BT, 6.1.3].

THÉORÈME. — *Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique réductif connexe et défini sur un corps algébriquement clos $\overline{\mathbf{K}}$. On note $\underline{T}$ un tore maximal, $\underline{N}$ son normalisateur et $\{\underline{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}$ la famille de ses sous-groupes radiciels. Alors, $\big(N, T, \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Phi}\big)$ est une donnée radicielle génératrice dans G.* □

Les lettres soulignées désignent des groupes algébriques, alors que les lettres non soulignées indiquent le passage aux points sur $\overline{\mathbf{K}}$. Dans ce contexte, les sous-groupes paraboliques sont définis de manière intrinsèque comme les sous-groupes $\underline{P} < \underline{G}$ tels que $\underline{G}/\underline{P}$ soit une variété complète. En fait, ils correspondent aux sous-groupes paraboliques combinatoires (via passage aux points).

La formulation de la combinatoire semble ajustée précisément à cette situation. En fait, dans le cas d'un corps de base $\mathbf{K}$ non algébriquement clos et d'un groupe $\underline{G}$ isotrope mais non nécessairement déployé sur $\mathbf{K}$, son intérêt est plus évident. On résume un résultat important de la théorie de Borel-Tits par ce théorème [BT, 6.1.3].

THÉORÈME. — *Soit $\underline{G}$ un groupe algébrique réductif connexe et isotrope sur un corps $\mathbf{K}$. On se donne $\underline{S}$ un tore $\mathbf{K}$-déployé maximal, $\underline{N}$ son normalisateur, et $\underline{P}$ un sous-groupe parabolique défini sur $\mathbf{K}$, minimal et contenant $\underline{S}$. L'indice $_{\mathbf{K}}$ désigne la prise des points rationnels. Alors, $(P_{\mathbf{K}}, N_{\mathbf{K}})$ est une BN-paire dans $G_{\mathbf{K}}$.* □

En aménageant légèrement les axiomes des données radicielles, on peut fournir un énoncé complètement analogue au premier théorème. Pour cela, il faut juste rendre compte du caractère éventuellement non réduit du système de racines [BT, 6.1.1].

3.B *Immeuble euclidien d'un groupe réductif sur un corps local* [BT]. — Il existe aussi une combinatoire raffinant celle des BN-paires et adaptée au cas des groupes réductifs p-adiques. Elle axiomatise la filtration des groupes radiciels héritée de celle du corps local de définition: ce sont les *données radicielles valuées* de la théorie de Bruhat et Tits. On ajoute pour cela une liste d'axiomes à celle des données radicielles génératrices.

Supposons qu'on est dans la situation algébrique précédente. En outre, le corps $\mathbf{K}$ est local, non archimédien, localement compact et le groupe algébrique semi-simple $\underline{G}$ est simplement connexe. Alors, un résultat majeur de la théorie de Bruhat-Tits est que ce groupe admet un *système de Tits affine*, c'est-à-dire à groupe de Weyl affine. En fait, le groupe de Weyl infini est un affinisé du groupe de Weyl fini classiquement associé à $\underline{G}$. En vertu du dictionnaire de 2.C, $G_{\mathbf{K}}$ opère donc sur un immeuble pour lequel la géométrie des appartements est modelée sur un groupe de réflexions affines. Le choix du pavage euclidien comme réalisation des appartements conduit par recollement à une réalisation globale de l'immeuble qu'on appelle *immeuble de Bruhat-Tits*. On peut voir ce résultat comme la version combinatoire de la démarche qui consiste à faire opérer un groupe de Lie semi-simple réel sur son espace symétrique riemannien.

3.C *Utilisations.* — Voici maintenant une application par type classique – sphérique ou euclidien – d'immeuble [T].

1. On vient de voir que les immeubles euclidiens associés aux groupes réductifs sur les corps locaux pouvaient être considérés comme les analogues non archimédiens des espaces symétriques riemanniens du cas réel. L'analogie est profonde puisque vu comme espace métrique, cet espace est à courbure négative ou nulle au sens singulier. Ceci signifie que les triangles géodésiques sont au moins aussi fins que ceux du plan euclidien. Ainsi, le théorème de point fixe de Bruhat-Tits [BT, 3.2] – qui généralise celui d'É. Cartan – permet de régler la détermination des classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux. Dans la même situation que 3.B et si r est le $\mathbf{K}$-rang de G, il y a $r+1$ classes de conjugaison.

2. Un espace symétrique (riemannien non compact) X aussi bien qu'un immeuble de Bruhat-Tits possède un *bord visuel* $X(\infty)$. C'est un ensemble de classes d'équivalence de rayons géodésiques [Br, VI.9]. Dans ces deux cas, ce bord est l'immeuble sphérique associé au système de Tits sphérique du groupe d'isométries de l'espace. On parle d'*immeuble sphérique à l'infini* de l'espace. Dans le cas des espaces symétriques, l'immeuble sphérique à l'infini intervient dans la preuve par Mostow de la rigidité forte des réseaux cocompacts de groupes de Lie semi-simples de rang ≥ 2 [T §6]. Ce résultat dit qu'un isomorphisme abstrait entre tels réseaux implique un isomorphisme des groupes de Lie ambiants, et qu'après identification l'isomorphisme abstrait provient d'une conjugaison. Un point essentiel est qu'un isomorphisme entre réseaux donne lieu à une application entre bords visuels qui respecte les structures d'immeubles. Or, il se trouve que Tits pour classer les immeubles sphériques, a eu besoin d'une vaste généralisation du théorème fondamental de la géométrie projective [T, §2] (c'est ici que l'hypothèse de rang supérieur intervient). On obtient par ce résultat une vraie isométrie entre espaces symétriques, qui conjugue un réseau sur l'autre.

4. Immeubles exotiques

4.A *Arbres non Bruhat-Tits.* — Les arbres sont des immeubles: le groupe de Coxeter en question est le groupe diédral infini. Pour obtenir un groupe d'isométries assez grand, il faut lui imposer une régularité suffisante. Les arbres *semi-homogènes* sont ceux qui possèdent au plus deux orbites de sommets sous le groupe complet d'isométries. Lubotzky et Mozes [LM] ont prouvé l'annulation à l'infini des coefficients matriciels de représentations unitaires – propriété de Howe-Moore – pour le groupe d'automorphismes complet d'un arbre homogène. Lubotzky, Mozes et Zimmer ont prouvé des résultats de type super-rigidité du commensurateur [LMZ]. Enfin, Burger et Mozes ont mis en évidence des propriétés locales concernant les actions sur des arbres [BM1]. Elles permettent de discuter des propriétés fondamentales pour les groupes correspondants: simplicité topologique, (non) finitude résiduelle... En considérant des réseaux de produits d'arbres cette fois, ils arrivent à construire les premiers specimens de groupes simples de présentation finie sans torsion [BM2]. Dans tous ces travaux, il n'est fait aucune hypothèse sur les valences. Au contraire, il peut être important qu'elles ne soient pas nécessairement des cardinaux de droites projectives sur des corps finis (comme dans le cas Bruhat-Tits).

4.B *Immeubles hyperboliques* [GP]. — Revenons au théorème de Poincaré: le groupe des inversions relatives aux faces d'un polyèdre convenable est un groupe de Coxeter, qui opère naturellement sur un pavage de l'espace ambiant (euclidien, hyperbolique) par ce polyèdre. On parlera de *polyèdres de Poincaré*. Du point de vue géométrique, les immeubles hyperboliques se définissent plutôt comme des réalisations géométriques.

Définition. — *Soit P un polyèdre de Poincaré dans $\mathbb{H}^n$. Un* immeuble hyperbolique de type P *est un complexe polyédral, union d'une famille de sous-complexes qu'on appelle* appartements, *qui sont tous isomorphes au pavage de $\mathbb{H}^n$ par P et qui vérifient les axiomes d'incidence suivants.*

(i) *Par deux points passe toujours un appartement.*
(ii) *Si Σ et Σ' sont deux appartements, il existe un isomorphisme polyédral fixant $\Sigma \cap \Sigma'$.*

Ce sont des espaces métriques CAT(-1), donc hyperboliques au sens de Gromov. Les structures d'incidences additionnelles en font des espaces à la géométrie très riche et pour lesquels il est intéressant d'avoir des réseaux. D'après M. Bourdon, D. Gaboriau, F. Paulin, l'approche géométrique permet de construire des réseaux cocompacts. La théorie de Kac-Moody montre que certains de ces immeubles admettent aussi des réseaux non cocompacts.

Exemples. — 1. Les *immeubles fuchsiens* [Bou1] constituent un cas particulier de cette définition. Ils sont construits à partir de paramètres $(R, \underline{q})$ où $\underline{q}$ est une suite $(q_i)_{1 \leq i \leq r}$ de r entiers ≥ 2 et R est un polytope à r côtés de $\mathbb{H}^2$ dont les faces (resp. les sommets) sont étiqueté(e)s circulairement par $\mathbf{Z}/r$ (resp. par les paires $\{i, i+1\}$, i dans $\mathbf{Z}/r$). On requiert en outre que l'angle au sommet $\{i, i+1\}$ soit de la forme $\pi/m_{i,i+1}$ $(m_{i,i+1} \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\})$. Pour i dans $\mathbf{Z}/r$, le link de tout sommet de type $\{i; i+1\}$ est un $m_{i,i+1}$-gone généralisé de paramètres (q_i, q_{i+1}). Les appartements sont des pavages de $\mathbb{H}^2$ par R.
2. Les immeubles $I_{p,q}$ sont des cas particuliers du premier exemple. On les obtient en prenant pour R le p-gone régulier d'angle $\pi/2$, ce qui impose $p \geq 5$. Les links de tous les sommets sont des q-graphes bipartis complets et $\underline{q}$ est constante égale à $q-1$. Leurs bords $\partial I_{p,q}$ sont connus topologiquement et aussi du point de vue de la géométrie quasi-conforme [Bou2]. Des techniques d'analyse singulière sur les $\partial I_{p,q}$ permettent à M. Bourdon et H. Pajot de mettre

en évidence des inégalités de Poincaré et de prouver la rigidité des quasi-isométries des $I_{p,q}$ [BP1,2].

4.C *Remarques finales.* — Les *groupes de Kac-Moody* constituent une vaste source de nouveaux immeubles. Une présentation succinte de ces groupes se trouve par exemple à l'adresse suivante: http://www.iecn.u-nancy.fr/~remy/francaise.htm (voir par exemple les notes de soutenance). Cette page personnelle propose aussi des notes d'exposés d'un groupe de travail sur les immeubles (Nancy, 1997-1998).

Références

[Bbk] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie IV-VI, Masson, 1981.

[BM1] M. Burger, S. Mozes, *Groups acting on trees: from local to global structure*, preprint IHÉS, 1999.

[BM2] M. Burger, S. Mozes, *Lattices in products of trees*, preprint IHÉS, 1999.

[Bou1] M. Bourdon, *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow*, GAFA **7** (1997), 245-268.

[Bou2] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isométrie*, Erg. Th. and Dynam. Sys. **20** (2000), 1-22.

[BP1] M. Bourdon, H. Pajot, *Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings*, Proc. AMS **127** (1999), 2315-2324.

[BP2] M. Bourdon, H. Pajot, *Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings*, preprint.

[Br] K. Brown, Buildings, Springer (1989).

[BT] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local* I. *Données radicielles valuées*, Publ. Math. IHÉS **41** (1972), 5-251.

[GP] D. Gaboriau, F. Paulin: *Sur les immeubles hyperboliques*, preprint Université Paris 11, 1998.

[H] J. Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge University Press, 1990.

[LM] A. Lubotzky, S. Mozes, *Asymptotic properties of unitary representations of tree automorphisms*, in Harmonic Analysis and Discrete Potential Theory (Frascati 1991), Plenum Press, 1992.

[LMZ] A. Lubotzky, S. Mozes, R.J. Zimmer, *Superrigidity for the commensurability subgroup of tree lattices.* Comm. Math. Helvetici **69** (1994), 523-548.

[M] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, PhD Ohio State University, 1988.

[R] M. Ronan, Lectures on buildings, Academic press, 1989.

[T] J. Tits, *On buildings and their applications*, Proceedings ICM Vancouver (1974), 209-220.

Bertrand RÉMY 10 mars 2000