Séminaire BOURBAKI Novembre 2007
60ème année, 2007-2008, n$^{\rm o}$ 984

COVOLUME DES GROUPES S-ARITHMÉTIQUES ET FAUX PLANS PROJECTIFS [d'après Mumford, Prasad, Klingler, Yeung, Prasad-Yeung]

par **Bertrand RÉMY**

INTRODUCTION

À la fin des années 1980, G. Prasad a mis en évidence une formule calculant le covolume (convenablement normalisé) d'un groupe S-arithmétique dans le groupe topologique (produit de groupes algébriques) qui le contient naturellement [49]. Il y a un peu plus d'un an, G. Prasad et S.K. Yeung ont prouvé que les possibilités de construction de faux plans projectifs (des surfaces de type général définies par des conditions topologiques simples) étaient extrêmement restreintes, tout en exhibant de nouveaux exemples [50]. Le but de cet exposé est d'expliquer le lien entre ces deux résultats et de faire un résumé succinct de chacune de leurs preuves. Autrement dit, c'est l'occasion d'aborder des mathématiques assez variées : groupes algébriques sur les corps locaux, géométrie complexe, arithmétique des corps de nombres... ayant néanmoins toutes un rapport avec les sous-groupes discrets des groupes de Lie, ou les généralisations obtenues en considérant le groupe fondamental de variétés particulières. On revient notamment sur la formule de G. Prasad, publiée peu de temps après le calcul des nombres de Tamagawa des groupes réductifs sur les corps de nombres [35]. On évoque aussi des problèmes encore ouverts en matière de réseaux de groupes de Lie [37, Appendix C], ainsi que d'autres résultats de finitude et de comptage, concernant par exemple le nombre de classes des groupes algébriques sur les corps globaux et le comptage asymptotique (suivant le volume) des variétés couvertes par un espace symétrique donné.

Commençons par les considérations géométriques. Un *faux plan projectif* est une surface analytique complexe lisse, compacte et avec les mêmes nombres de Betti que $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$, mais non homéomorphe à celui-ci. Des arguments classiques permettent de voir qu'un faux plan projectif est une variété projective (2.1). En outre, les travaux de S.-T. Yau sur les métriques de Kähler-Einstein permettent de voir que c'est aussi une variété localement symétrique (le revêtement universel est la boule hyperbolique complexe). Les faux plans projectifs existent : D. Mumford a construit le premier exemple par uniformisation non archimédienne (3.5) ; ils sont en nombre fini : on peut le déduire d'arguments de rigidité (2.2). Soit donc X une telle surface. Le groupe fondamental Γ de X est un sous-groupe discret, cocompact et sans torsion de $\mathrm{PU}(2,1)$. Le lien entre la formule de covolume des groupes S-arithmétiques (1.2) et les faux plans projectifs est bien sûr fourni par Γ. Encore faut-il savoir que c'est un groupe arithmétique. Ceci signifie, en gros, qu'on peut le voir comme un groupe de matrices à coefficients dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres. C'est un problème difficile, qui a été résolu il y a peu par B. Klingler et S.K. Yeung, indépendamment (voir le théorème 2.9 pour une mise en contexte).

THÉORÈME 0.1 (B. Klingler [34] et S.K. Yeung [71]). — *Les faux plans projectifs sont des quotients arithmétiques de la boule hyperbolique complexe* $\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$.

La réduction de ce résultat d'arithméticité à la preuve de résultats de super-rigidité est classique, et due à G.A. Margulis. La *super-rigidité*, pour une classe d'homomorphismes d'un sous-groupe discret donné (contenu dans un groupe algébrique donné) vers des groupes de Lie simples, est le phénomène selon lequel tout homomorphisme dans cette classe ou bien est d'image relativement compacte, ou bien s'étend en un homomorphisme de groupes algébriques. Les démonstrations de super-rigidité pour le théorème ci-dessus utilisent la notion d'application harmonique qui a été présentée par P. Pansu dans un précédent séminaire Bourbaki [45]. B. Klingler et S.K. Yeung doivent utiliser de récents développements dans lesquels les espaces d'arrivée des applications harmoniques sont des complexes simpliciaux. Ici les espaces singuliers en question sont des immeubles de Bruhat-Tits, c'est-à-dire des analogues d'espaces symétriques pour les groupes de Lie semi-simples non archimédiens.

Passons au volume des quotients de groupes algébriques par des sous-groupes discrets. Un problème proche est celui du calcul des nombres de Tamagawa [68] : il porte sur les quotients de groupes adéliques. Nous nous intéressons au problème analogue, mais avec un groupe ambiant qui est un produit fini de groupes de points rationnels d'un groupe algébrique sur un corps global. Précisément, soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique défini sur un corps de nombres k. On note V_f (resp. V_∞) l'ensemble des places finies (resp. infinies) de k et $G_S = \prod_{v \in V_S} \mathbf{G}(k_v)$ le produit des points de $\mathbf{G}$ aux places $v \in S$, pour S une partie finie de places telle que $V_\infty \subseteq S$. On suppose que $\mathbf{G}$ est *absolument presque simple*, i.e., $\mathbf{G}(\mathbf{C})$ n'a pas de sous-groupe normal non trivial, fermé et connexe pour la topologie de Zariski. Pour chaque $v \notin S$, la théorie de Bruhat-Tits distingue une famille de sous-groupes compacts et ouverts, les sous-groupes parahoriques, qui possèdent de bonnes propriétés combinatoires (1.1). Un sous-groupe *S-arithmétique principal* de G_S est par définition la projection dans G_S d'un groupe $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \notin S} P_v$ pour une famille $(P_v)_{v \notin S}$ de sous-groupes parahoriques $P_v \subset \mathbf{G}(k_v)$ telle que $G_S \times \prod_{v \notin S} P_v$ soit ouvert dans le groupe adélique $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$.

THÉORÈME 0.2 (G. Prasad [49]). — *On suppose que le k-groupe algébrique* $\mathbf{G}$ *est simplement connexe. Alors, pour une normalisation convenable des mesures de Haar, il existe une formule explicite pour le volume du quotient de G_S par un sous-groupe S-arithmétique principal.*

Cette formule, qui est valide aussi pour les corps de fonctions (voir le théorème 1.1 pour les détails techniques), est un produit de cinq facteurs. Tous ces facteurs sont de nature arithmétique (via les valeurs absolues des discriminants de k et d'une extension de déploiement, ou les nombres de Tamagawa) ou relèvent de la théorie de Lie (via divers systèmes de racines liés à $\mathbf{G}$). L'un d'eux est un produit infini indexé par les $v \notin S$, dont les facteurs sont liés au volume des sous-groupes parahoriques ; il peut s'interpréter en termes de fonctions ζ et de fonctions L d'extensions du corps de base k. C'est le facteur le plus intéressant et le plus difficile à appréhender ; dans le cas où $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_2$ et $k = \mathbf{Q}$, il vaut $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Le comptage des faux plans projectifs utilise les deux théorèmes déjà cités. Le lien entre ces surfaces complexes et la théorie de Lie est une formule de Gauss-Bonnet mise en évidence par J.-P. Serre dans le cadre général des variétés localement symétriques [58] : la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface peut être interprétée comme le covolume (convenablement normalisé) du groupe fondamental dans le groupe des isométries du revêtement universel. Il s'agit donc de compter les corps de nombres k et les k-groupes algébriques dont les points aux places réelles sont des groupes compacts, sauf en une place où l'on obtient $\mathrm{PU}(2,1) = \mathrm{Isom}(\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}})$. Il s'agit aussi de dénombrer, par des méthodes de théorie des nombres, les familles de sous-groupes parahoriques $(P_v)_{v \in V_\infty}$ qui donnent lieu à des groupes arithmétiques sans torsion et de covolume imposé par la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface. Voici un résumé du résultat final (voir le théorème 3.5 pour les détails techniques).

Théorème 0.3 (G. Prasad et S.K. Yeung [50], [51]). — *Il y a exactement* 22 *classes de faux plans projectifs construits grâce à des formes de* $\mathrm{SU}(2,1)$ *définies par des algèbres à involutions cubiques sur un corps de nombres. Tout autre faux plan projectif proviendrait de l'autre type possible de forme de* $\mathrm{SU}(2,1)$ *; il y a au plus* 3 *telles possibilités.*

L'intérêt de ce théorème réside tout autant dans sa partie constructive que dans la classification qu'il énonce : on connaissait très peu d'exemples auparavant, tous construits par une méthode détournée (3.5). On s'attend en fait à ce que les faux plans projectifs se répartissent dans les 22 classes déjà répertoriées, et dans elles seules. Le fait de pouvoir décrire ces surfaces par la construction arithmétique explicite de leur groupe fondamental permet de prouver de nombreuses propriétés géométriques inconnues auparavant : homologie entière, groupes d'automorphismes, plongements dans des espaces projectifs...

Nous avons pris la liberté d'ajouter quelques pages à ce rapport (déjà bien long) en survolant rapidement d'autres problèmes de comptage. Il s'agit d'une part des propriétés de finitude liées aux groupes algébriques et arithmétiques, qu'A. Borel et G. Prasad avaient déduites au moment où ce dernier avait démontré la formule du covolume. L'une des finitudes est une conjecture de J. Tits très forte sur la finitude, sans fixer le corps de base, du nombre de situations donnant lieu à des groupes S-arithmétiques principaux de covolume majoré par une constante donnée ; l'autre porte sur des estimations effectives du nombre de classes des groupes algébriques. L'autre série de résultats évoqués est le problème du comptage asymptotique des variétés couvertes par un espace symétrique donné, en fonction du volume riemannien. Il s'agit de travaux de M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky et Sh. Mozes dans le cas des variétés hyperboliques réelles et de T. Gelander dans le cas symétrique (presque) général. Évoquer ces travaux est l'occasion de démontrer que le spectre des mathématiques couverts par les questions de covolumes de groupes arithmétiques est bien large (le cas limite, non couvert par les résultats de comptage de géométrie différentielle ci-dessus, s'explique par des arguments de géométrie hyperbolique de dimension 3).

Terminons par deux remarques. Tout d'abord, nous imaginons que pour un spécialiste de réseaux de groupes de Lie, il sera plaisant de se pencher sur l'exemple très spécifique des faux plans projectifs pour au moins une raison. Cette classification est en effet l'occasion de revenir de façon quantitative, ou tout du moins précise, sur des outils ordinairement utilisés de façon qualitative en théorie des groupes : lemme de Selberg pour les sous-groupes d'indice fini sans torsion, finitude des groupes d'automorphismes de variétés localement symétriques... Enfin, nous espérons que bien qu'elle n'ait pas fait l'objet ici d'une présentation isolée et construite, la théorie de Bruhat-Tits des groupes réductifs sur les corps locaux apparaîtra comme un outil important, au-delà de la théorie des groupes. Cette théorie apparaît en effet à plusieurs endroits : sous forme algébrique, à travers les structures entières des sous-groupes parahoriques utilisées pour calculer le volume de ces derniers (1.4), et sous forme géométrique, en voyant des immeubles euclidiens comme espaces d'arrivée d'applications harmoniques (2.5) et comme « squelettes » d'espaces analytiques rigides dans la construction de D. Mumford du premier faux plan projectif (3.5).

Ce rapport est construit de la façon suivante. Dans la section 1, on énonce précisément la formule du covolume et on esquisse sa preuve. Dans la section 2, c'est la preuve de l'arithméticité des groupes fondamentaux des faux plans projectifs qui est résumée ; on y cite aussi des résultats utiles à l'explication des résultats géométriques de la section 4. Dans la section 3, on explique la stratégie générale pour classer les faux plans projectifs. Enfin la section 4 évoque les autres comptages, relevant de la géométrie différentielle et des groupes algébriques ; on y mentionne aussi les généralisations en cours portant sur les analogues en dimension supérieure des faux plans projectifs.

Introduisons enfin quelques notations et conventions valables dans tout ce rapport.

Corps de base : nous désignons par k un corps global, c'est-à-dire un corps de nombres ou le corps des fonctions rationnelles d'une courbe définie sur un corps fini. On désigne par D_k la valeur absolue du discriminant de k et par V l'ensemble de toutes les places de k. L'ensemble des places archimédiennes est noté V_∞ et celui des places finies est noté V_f. Pour chaque place $v \in V$, on désigne par $|\cdot|_v$ la valeur absolue associée et par k_v le corps local complété de k en v. Si $v \in V_f$, on note $\mathscr{O}_v$ l'anneau de valuation et ϖ_v une uniformisante de k_v, et κ_v le corps résiduel $\mathscr{O}_v/(\varpi_v)$. On désigne par k_v^{nr} une extension non ramifiée maximale de k_v et on normalise les valeurs absolues de façon à disposer de la formule du produit [69]. Sauf mention du contraire (e.g. pour l'approximation forte), S désigne un ensemble fini de places de k tel que $V_\infty \subseteq S$, et on note $S_f = V_f \cap S$.

Espaces symétriques : un espace symétrique général sera désigné par $\widetilde{X}$ afin de souligner le fait que nous le voyons comme revêtement universel. Nous notons en particulier $(\mathbb{B}^n_{\mathbf{C}}, g_{\mathrm{hyp}})$ l'espace symétrique consistant en la boule unité de $\mathbf{C}^n$ munie de la métrique hyperbolique g_{hyp} à courbure sectionnelle pincée entre -4 et -1 ; le groupe des isométries de $(\mathbb{B}^n_{\mathbf{C}}, g_{\mathrm{hyp}})$ est le groupe de Lie réel $\mathrm{PU}(n,1)$.

Variétés : sauf mention expresse du contraire, les variétés évoquées dans ce texte, y compris les variétés algébriques, sont supposées lisses.

Réseaux : rappelons finalement qu'un sous-groupe discret Γ dans un groupe topologique localement compact G est appelé un *réseau* de G si l'espace homogène G/Γ porte une mesure invariante de volume total fini. Quand le groupe ambiant G est un groupe de Lie, les références standard pour ces notions sont [53], [37] et [72].

Remerciements. Je remercie avec grand plaisir D. Harari et V. Maillot pour leur aide bibliographique, M. Bourdon et A. Thuillier pour leur relecture de ce texte. Je dois enfin des remerciements tout particuliers à G. Prasad pour sa patience, sa disponibilité et son indulgence à l'égard de mes erreurs et imprécisions.

1. COVOLUME DES GROUPES S-ARITHMÉTIQUES

Dans cette première section, on décrit les grandes lignes de la démonstration de la formule calculant le covolume d'un groupe S-arithmétique (1.2). On s'attache surtout à expliquer l'apparition de chacun des facteurs. C'est aussi l'occasion de mentionner des résultats bien connus, mais utiles pour la suite : finitude du covolume et approximation forte (1.5). Dans toute cette section, $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique absolument presque simple, simplement connexe [62, 8.1.11] et défini sur le corps global k.

1.1. Notations et normalisations

Rappelons un certain nombre de notations de [49, §0] et quelques points de théorie de Bruhat-Tits.

D'après la classification de J. Tits [65], il existe un groupe algébrique $\mathscr{G}$ défini et quasi-déployé sur k, et un isomorphisme $\varphi : \mathbf{G} \to \mathscr{G}$ défini sur une extension galoisienne k'/k, tels que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(k'/k)$ l'automorphisme $\varphi^{-1} \circ {}^\sigma\varphi$ de $\mathbf{G}$ soit intérieur [62, 12.3.7]. On choisit ω une forme extérieure invariante de degré maximal sur $\mathscr{G}$ et définie sur k, ce qui fournit une forme extérieure de degré maximal $\omega^* = \varphi^*(\omega)$ sur $\mathbf{G}$ *qui est elle aussi définie sur k*. Pour chaque $v \in V$, on note ω_v^* (resp. ω_v) la forme extérieure invariante de degré maximal sur $\mathbf{G}(k_v)$ (resp. sur $\mathscr{G}(k_v)$) déduite de ω^* (resp. de ω) par extension des scalaires.

Rappelons qu'à isomorphisme sur k près, il existe une plus petite extension ℓ de k qui déploie le groupe $\mathscr{G}$; cette extension est de degré $\leqslant 3$ sauf pour les groupes trialitaires (auquel cas le degré est 6). Dans [49, 0.4], G. Prasad associe à $\mathscr{G}$ un entier $\mathfrak{s}(\mathscr{G})$, nul par définition si $\mathscr{G}$ est déployé et qui autrement, à une exception près, est la somme du nombre des racines courtes et du nombre des racines courtes simples de $\mathscr{G}$. L'exception, qui sera le cas pertinent pour les faux plans projectifs, est le cas des systèmes de racines non réduits $\mathrm{BC}_{\frac{r}{2}}$ avec r pair ; on pose alors $\mathfrak{s}(\mathscr{G}) = \frac{1}{2}r(r+3)$. Dans ce rapport, on peut se contenter de retenir que $\mathfrak{s}(\mathscr{G})$ est un nombre entier qui ne dépend que du système de racines relatif de $\mathscr{G}$.

Pour la théorie de Bruhat-Tits des groupes tels que $\mathbf{G}(k_v)$, notamment pour les immeubles euclidiens associés à ces groupes, la référence est [66] (nous citerons également quelques points techniques de [15] et [16]).

Rappelons que la classe des *sous-groupes d'Iwahori* de $\mathbf{G}(k_v)$ peut être caractérisée, sans recours à l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathbf{G}$ sur k_v, comme la classe des normalisateurs des pro-p sous-groupes maximaux de $\mathbf{G}(k_v)$ [46, Theorem 3.10]. Un sous-groupe *parahorique* de $\mathbf{G}(k_v)$ est un sous-groupe compact contenant un sous-groupe d'Iwahori. C'est un sous-groupe compact et ouvert, par conséquent deux sous-groupes parahoriques sont toujours *commensurables* : ils partagent un sous-groupe qui est d'indice fini dans chacun d'eux. La classe des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}(k_v)$ coïncide avec la classe des sous-groupes parahoriques maximaux.

L'*immeuble de Bruhat-Tits* Δ de $\mathbf{G}(k_v)$ est un produit direct de complexes simpliciaux, avec un facteur par facteur simple de $\mathbf{G}$, admettant une $\mathbf{G}(k_v)$-action cellulaire naturelle. Le complexe cellulaire Δ admet une métrique $\mathbf{G}(k_v)$-invariante qui en fait un espace complet à courbure $\leqslant 0$; il est la réunion des $\mathbf{G}(k_v)$-transformés d'un pavage euclidien décrit par le *groupe de Weyl affine* W^{aff} de $\mathbf{G}$ [13, §V], extension du groupe de Weyl sphérique par un groupe abélien libre de rang la dimension de Δ (qui est aussi le k_v-rang de $\mathbf{G}$). Ces sous-complexes, appelés *appartements*, sont en bijection avec les tores k_v-déployés maximaux de $\mathbf{G}$. Une conséquence de la courbure $\leqslant 0$ est que la classe des sous-groupes compacts maximaux de $\mathbf{G}(k_v)$ coïncide avec celle des fixateurs de sommets [15, §3].

Un sommet v, ou le sous-groupe compact maximal P_v qui lui est associé (le fixateur de v), est dit *spécial* si une chambre de Weyl d'un appartement peut être choisie comme domaine fondamental pour l'action de P_v sur Δ tout entier. Notons $\widehat{\Delta}$ l'immeuble de $\mathbf{G}$ sur l'extension non ramifiée maximale k_v^{nr} ; cet immeuble contient naturellement Δ. Si le groupe $\mathbf{G}$ se déploie sur k_v^{nr}, un sommet spécial de Δ qui reste un sommet spécial dans $\widehat{\Delta}$, est appelé *hyperspécial*. Quand ils existent, les sous-groupes parahoriques hyperspéciaux sont les sous-groupes parahoriques de volume maximal pour une mesure de Haar donnée sur $\mathbf{G}(k_v)$.

Un des points délicats de la théorie de Bruhat-Tits est que l'on peut associer à chaque sous-groupe parahorique P_v (resp. $\mathscr{P}_v$) de $\mathbf{G}(k_v)$ (resp. de $\mathscr{G}(k_v)$) un schéma en groupes affine sur $\mathscr{O}_v$, noté $\mathbf{G}_{P_v}$ (resp. $\mathscr{G}_{\mathscr{P}_v}$), de fibre générique $\mathbf{G}$ (resp. $\mathscr{G}$) et tel que $\mathbf{G}_{P_v}(\mathscr{O}_v) = P_v$ (resp. $\mathscr{G}_{\mathscr{P}_v}(\mathscr{O}_v) = \mathscr{P}_v$). Nous nous intéresserons notamment à des calculs de volume de sous-groupes parahoriques au moyen de ces structures entières.

1.2. La formule du covolume

Voici la formule pour le volume des espaces homogènes naturellement associés aux groupes S-arithmétiques [49, Theorem 3.7]. Notons qu'on suppose le groupe $\mathbf{G}$ simplement connexe.

Pour chaque place v, on choisit convenablement un sous-groupe parahorique P_v dans $\mathbf{G}(k_v)$ et $\mathscr{P}_v$ dans $\mathscr{G}(k_v)$. Précisément, on choisit des familles $(P_v)_{v\in V_f}$ et $(\mathscr{P}_v)_{v\in V_f}$ *cohérentes* dans le sens où $\left(\prod_{v\in V_\infty}\mathbf{G}(k_v)\right)\cdot\left(\prod_{v\in V_f}P_v\right)$ est ouvert dans le groupe adélique $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$ et $\left(\prod_{v\in V_\infty}\mathscr{G}(k_v)\right)\cdot\left(\prod_{v\in V_f}\mathscr{P}_v\right)$ est ouvert dans le groupe adélique $\mathscr{G}(\mathbf{A}_k)$. Pour la famille $(\mathscr{P}_v)_{v\in V_f}$, on a besoin de faire des hypothèses techniques supplémentaires [49, 1.2].

Pour chaque $v\in V_f$, on choisit $c_v\in k_v^\times$ ajusté de sorte que $c_v\omega_v$ soit définie sur $\mathscr{O}_v$, mais de réduction $\neq 0$ modulo ϖ_v (par rapport au $\mathscr{O}_v$-schéma en groupes $\mathscr{G}_{\mathscr{P}_v}$). On note $\gamma_v = |c_v|_v$: ce nombre réel >0 ne dépend pas du choix de c_v. Par ailleurs, les sous-groupes d'Iwahori sont ouverts et conjugués dans $\mathbf{G}(k_v)$; on peut donc définir une mesure $\mathbf{G}(k_v)$-invariante privilégiée, notée $\mu_{\mathrm{T},v}$ et appelée *mesure de Tits*, en partant de n'importe quelle mesure de Haar sur $\mathbf{G}(k_v)$ et en la normalisant de sorte que le volume pour $\mu_{\mathrm{T},v}$ de tout sous-groupe d'Iwahori soit égal à 1. Pour ce qui est des mesures aux places archimédiennes, pour chaque $v\in V_\infty$, on note c_v le nombre réel >0 tel que le volume de tout sous-groupe compact maximal de la restriction de Weil $\mathscr{R}_{k_v/\mathbf{R}}(\mathscr{G})(\mathbf{C})$ soit égal à 1 pour la mesure associée à $c_v\omega_v$; on pose : $\gamma_v = |c_v|_v$ et on appelle mesure de Tits en $v\in V_\infty$ la mesure donnée par $c_v\omega_v$.

Les fibres spéciales, i.e., réductions modulo ϖ_v, des schémas en groupes $\mathbf{G}_{P_v}$ et $\mathscr{G}_{\mathscr{P}_v}$ de 1.1 ne sont pas des groupes réductifs en général. Cependant, des facteurs de Lévi de ces fibres spéciales, disons $\overline{\mathbf{M}}_v$ et $\overline{\mathscr{M}}_v$ respectivement, sont des groupes réductifs finis sur le corps résiduel κ_v. Ces groupes ont une interprétation géométrique agréable : si P_v est le fixateur de la facette σ dans l'immeuble Δ de $\mathbf{G}$ sur k_v, alors les facettes fermées de Δ contenant σ forment un immeuble fini, qui n'est autre que celui de $\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)$ [16, §5]. Pour chaque $v\in V_f$, notons $\overline{\mathbf{T}}_v$ (resp. $\overline{\mathscr{T}}_v$) un centralisateur de sous-tore déployé maximal de $\overline{\mathbf{M}}_v$ (resp. de $\overline{\mathscr{M}}_v$). Enfin, désignons par r_v le rang absolu du groupe $\overline{\mathscr{M}}_v$ (on donnera d'autres interprétations de cet entier par la suite).

Théorème 1.1 (G. Prasad). — *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe algébrique absolument presque simple, simplement connexe, défini sur le corps global* k. *Soit* S *un ensemble fini de places de* k *tel que* $V_\infty\subseteq S$. *On note* $G_S=\prod_{v\in S}\mathbf{G}(k_v)$ *et* Λ *la projection naturelle de* $\mathbf{G}(k)\cap\prod_{v\notin S}P_v$ *dans* G_S. *On suppose* G_S *non compact. Soit* μ_S *la mesure produit des mesures de Tits pour* $v\in S$. *Alors, on a la formule suivante :*

$$\mu_S(G_S/\Lambda) = D_k{}^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k{}^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathscr{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} | \prod_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} |_v\right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \mathscr{E},$$

où :

D_k *désigne la valeur absolue du discriminant du corps global* k*,*

D_ℓ *Êdésigne la valeur absolue du discriminant du corps global* ℓ*,*

$\mathfrak{s}(\mathscr{G})$ *est le nombre entier défini ci-dessus à partir du système de racines de* $\mathscr{G}$*,*

m_i *est le i-ième exposant du groupe de Weyl absolu de* $\mathbf{G}$*,*

$\tau_k(\mathbf{G})$ *est le nombre de Tamagawa de* $\mathbf{G}$*,*

$\mathscr{E}$ *Êest le produit infini défini comme suit :*

$$\mathscr{E} = \prod_{v \in S_f} \frac{q_v{}^{\frac{1}{2}(r_v + \dim(\overline{\mathscr{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)} \cdot \prod_{v \notin S} \frac{q_v{}^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v) + \dim(\overline{\mathscr{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}$$

à partir des sous-groupes parahoriques P_v *dans* $\mathbf{G}(k_v)$ *et* $\mathscr{P}_v$ *dans* $\mathscr{G}(k_v)$ *ci-dessus.*

Remarque 1.2. — Dans le cas où k est un corps de nombres et où $\mathbf{H}$ est un k-groupe réductif, $\tau_k(\mathbf{H})$ est égal au rapport de l'ordre du groupe de Picard sur celui du groupe de Shafarevich Ш$(\mathbf{H})$ (voir [35], et aussi [57], notamment pour la structure de groupe sur Ш$(\mathbf{H})$). En particulier, si $\mathbf{H}$ est semi-simple simplement connexe, on a $\tau_k(\mathbf{H}) = 1$. Voir le séminaire Bourbaki de L. Clozel [20] pour un rapport plus complet sur cet autre problème de calcul de volume d'espace homogène, et voir (1.5) pour une formule pour $\tau_k(\mathbf{G})$.

L'exemple le plus simple de calcul de facteur eulérien $\mathscr{E}$ est le suivant. Choisissons pour $\mathbf{G}$ le groupe SL_2 sur le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels et prenons $S = \{\infty\}$. Puisque SL_2 est déployé, on a aussi $\mathscr{G} = \mathrm{SL}_2$ (et les discriminants impliqués dans la formule, ainsi que le nombre de Tamagawa, sont tous égaux à 1). Pour chaque place finie, i.e., pour chaque nombre premier p, on a $\overline{\mathbf{M}}_p = \mathrm{SL}_2$ et donc $\#\overline{\mathbf{M}}_p(\kappa_p) = \#\mathrm{SL}_2(p) = (p-1)p(p+1)$. Finalement, on trouve que dans ce cas $\mathscr{E} = \prod_{p\,\text{premier}} \frac{p^3}{(p-1)p(p+1)} = \zeta(2)$. C'est un fait bien connu qu'on peut calculer le volume du quotient du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$ par $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ en termes de la fonction ζ de Riemann.

Avant de revenir sur la preuve de cette formule, nous allons mentionner deux résultats intermédiaires, précisément les deux ingrédients principaux qui serviront dans l'esquisse de démonstration du résultat ci-dessus.

1.3. Formes volumes sur les groupes quasi-déployés

Le premier résultat intermédiaire [49, Theorem 1.6] relève d'un contexte assez proche du calcul des nombres de Tamagawa (du moins de leur définition [68]). Il s'agit du calcul du produit des facteurs de normalisation γ_v (1.1).

Théorème 1.3. — *On a :*

$$\prod_{v \in V} \gamma_v = \left(\frac{D_\ell}{D_k{}^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathscr{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} | \prod_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} |_v\right).$$

Preuve (esquisse) — L'idée est d'utiliser plusieurs formes volumes en étant attentif aux divers facteurs de normalisation. Dans ces facteurs apparaissent les constantes γ_v qui nous intéressent. On désigne par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathscr{G}$ et on note $n = \dim(\mathscr{G})$. On va travailler avec diverses bases de $\mathfrak{g}_\ell = \mathfrak{g} \otimes_k \ell$.

Première étape : mise en place de deux premières formes volumes.

Puisque ℓ déploie $\mathscr{G}$, on dispose de la base duale $\mathscr{X}^1, \mathscr{X}^2, \dots\ \mathscr{X}^n$ d'une base $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \dots\ \mathscr{X}_n$ d'un réseau de Chevalley de $\mathfrak{g}_\ell$, et donc d'une forme volume

$$\omega^{\mathrm{Ch}} = \mathscr{X}^1 \wedge \mathscr{X}^2 \wedge \dots \wedge \mathscr{X}^n.$$

On peut aussi choisir une k-base $X_1, X_2, \dots\ X_n$ de $\mathfrak{g}$, et en notant $X^1, X^2, \dots\ X^n$ sa base duale, définir la forme volume

$$\omega^{\mathrm{Ta}} = X^1 \wedge X^2 \wedge \dots \wedge X^n,$$

qui est définie sur k. Puisque $\dim(\Lambda^n \mathfrak{g}^*) = 1$, il existe $\alpha \in \ell$ tel que $\omega^{\mathrm{Ch}} = \alpha \cdot \omega^{\mathrm{Ta}}$. Par conjugaison des réseaux de Chevalley, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\ell/k)$ on a : $\sigma(\omega^{\mathrm{Ch}}) = \pm\omega^{\mathrm{Ch}}$, et donc $\sigma(\alpha)\omega^{\mathrm{Ta}} = \pm\alpha \cdot \omega^{\mathrm{Ta}}$; ceci prouve que α^2 appartient à k.

Deuxième étape (archimédienne) : volumes de groupes compacts.

C'est l'étape qui fait apparaître le facteur $\prod_{v \in V_\infty} \mid \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \mid_v$. On travaille aux places archimédiennes ; soit $v \in V_\infty$ une telle place. On va comparer des mesures en calculant des volumes de groupes compacts. Rappelons que si $k_v = \mathbf{R}$ (resp. si $k_v = \mathbf{C}$), tout sous-groupe compact maximal des points complexes $\mathscr{R}_{k_v/\mathbf{R}}(\mathscr{G})(\mathbf{C})$ de la restriction de Weil $\mathscr{R}_{k_v/\mathbf{R}}(\mathscr{G})$ est isomorphe à une copie (resp. à deux copies) de la forme compacte du groupe complexe de même type que $\mathscr{G}$. On choisit $Y_1^v, Y_2^v, \dots\ Y_n^v$ une base la « plus orthonormale possible » pour la forme de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{g} \otimes_k k_v$ [49, p. 97]. Notons m la valeur absolue du déterminant de la matrice $[\langle \mathscr{X}_i, \mathscr{X}_j \rangle]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. La base duale $Y_v^1, Y_v^2, \dots\ Y_v^n$ donne lieu elle aussi à une forme volume ω_v^{Ki} sur $\mathbf{G}(k_v)$ pour laquelle un calcul, classique en topologie, dit que le volume du sous-groupe compact maximal est :

$$\mid \sqrt{m} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{(2\pi)^{m_i+1}}{m_i!} \mid_v.$$

Or $\omega_v^{\mathrm{Ki}} \otimes \omega_v^{\mathrm{Ki}} = \pm\mathfrak{d} \cdot (\omega_v^{\mathrm{Ta}} \otimes \omega_v^{\mathrm{Ta}})$ avec $\mathfrak{d} = \det\left([\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X_i \circ \mathrm{ad}X_j)]_{i,j}\right)$, donc le facteur de normalisation archimédien γ_v (1.1) est :

$$\gamma_v = \left(\sqrt{\mid \mathfrak{d} \mid_v}\right) \cdot \left(\mid \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \mid_v\right).$$

On tire de $\omega^{\mathrm{Ch}} = \alpha \cdot \omega^{\mathrm{Ta}}$ l'égalité : $\mid m \cdot \alpha^2 \mid_v = \mid \mathfrak{d} \mid_v$, ce qui permet d'écrire :

$$\gamma_v = \left(\sqrt{\mid \alpha^2 \mid_v}\right) \cdot \left(\mid \prod_{i=1}^r \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \mid_v\right)$$

pour chaque place archimédienne v. Finalement, on a :

$$\prod_{v\in V} {\gamma_v}^2 = \left(\prod_{v\in V_\infty} \mid \prod_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \mid_v {}^2\right)\cdot\left(\prod_{v\in V_\infty} \mid \alpha^2 \mid_v\right)\cdot\left(\prod_{v\in V_f} {\gamma_v}^2\right).$$

On a pris soin de passer au carré, ce qui permet d'utiliser la formule du produit pour α^2 et d'écrire :

$$\prod_{v\in V} {\gamma_v}^2 = \left(\prod_{v\in V_\infty} \mid \prod_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} \mid_v {}^2\right)\cdot\left(\prod_{v\in V_f} \mid \alpha^2 \mid_v^{-1} {\gamma_v}^2\right).$$

Troisième étape (non archimédienne) : usage de structures entières.

Nous ne détaillerons pas cette étape, mais c'est la plus longue et la plus technique. Il s'agit de voir que le produit aux places finies $\prod_{v\in V_f}(\mid \alpha^2 \mid_v^{-1} {\gamma_v}^2)$ est égal à la contribution des discriminants. Dans un premier temps, G. Prasad montre qu'aux places $v \in V_f$ où $\mathscr{G}$ est déployé sur l'extension non ramifiée maximale de k_v, on a : $\mid \alpha^2 \mid_v = \gamma_v^2$ (la constante α réalise la normalisation locale en v dans la définition de la mesure de Tamagawa). Il reste à considérer ensuite les places v (en nombre fini) où $\mathscr{G}$ ne se déploie sur aucune extension non ramifiée de k_v ; dans ce cas, il faut faire des ajustements de bases de Chevalley pour obtenir des formes volumes explicites. Les distinctions de cas sur le type des systèmes de racines apparaissent à cet endroit, et les valeurs absolues des discriminants s'expriment en termes des constantes d'ajustement. □

1.4. Volumes des sous-groupes parahoriques

Le second résultat intermédiaire [49, Proposition 2.10] relève d'une partie assez subtile de la théorie de Bruhat-Tits (les structures entières associées aux facettes d'un immeuble [16]). Nous travaillons ici avec les points rationnels de $\mathbf{G}$ sur une complétion non archimédienne fixée k_v. Un des arguments pour le théorème ci-dessous est de calculer des indices pour des inclusions de sous-groupes d'Iwahori dans des sous-groupes parahoriques, en se ramenant à des indices pour des inclusions analogues de groupes algébriques finis. Cela se fait grâce aux structures entières associées aux facettes des immeubles de $\mathbf{G}$ et $\mathscr{G}$ sur k_v. Soit I_v (resp. $\mathscr{I}_v$) un sous-groupe d'Iwahori de $\mathbf{G}$ (resp. $\mathscr{G}$) contenu dans P_v (resp. $\mathscr{P}_v$) : on note $\mathbf{G}_{I_v}$ (resp. $\mathscr{G}_{\mathscr{I}_v}$) le schéma en groupes sur $\mathscr{O}_v$ qui lui est associé par la théorie de Bruhat-Tits (1.1).

Voici un cas très simple. Dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}_p)$, un exemple de sous-groupe d'Iwahori est donné par exemple l'image réciproque $\mathscr{I}_n$ du groupe $B_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ (des matrices $n\times n$ triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) par l'homomorphisme de réduction $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p) \to \mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$. La mesure de Tits μ_p (1.1) sur $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}_p)$ est la mesure de Haar pour laquelle $\mathscr{I}_n$ est de volume 1. On a alors : $\mu_p(\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)) = [\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p) : \mathscr{I}_n] = [\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) : B_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})]$. Ce dernier indice est le cardinal d'une variété de drapeaux finie, et peut se calculer par décomposition de Bruhat dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

Théorème 1.4. — *En notant $\mid\omega\mid$ la mesure de Haar associée à une forme extérieure invariante de degré maximal ω sur un groupe de Lie, on a dans notre situation :*

$$\mathrm{Vol}(I_v, \gamma_v. \mid \omega_v^* \mid) = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{q_v^{\frac{1}{2}(r_v + \dim(\overline{\mathscr{M}}_v))}} \quad et \quad \mathrm{Vol}(P_v, \gamma_v. \mid \omega_v^* \mid) = \frac{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}{q_v^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v) + \dim(\overline{\mathscr{M}}_v))}}.$$

Preuve (esquisse) — La preuve est une jolie combinaison de l'usage d'une formule de volume en termes de structure entière de forme extérieure de degré maximal, de l'usage de structures entières pour les sous-groupes parahoriques et de comptage dans les groupes réductifs finis. Les deux premiers arguments permettent de faire une comparaison de mesures avec le cas quasi-déployé, connue sans doute de bien des spécialistes de formes automorphes : les techniques sont similaires à celles qu'utilise R. Kottwitz [35, Theorem 1] quand il travaille avec les mesures d'Euler-Poincaré (2.2). On va aussi utiliser plusieurs fois le fait que le cardinal d'un radical unipotent de dimension d sur un corps fini de cardinal q est égal à q^d.

Première étape : compatibilité de mesures sur $\mathbf{G}(k_v)$ et $\mathscr{G}(k_v)$.

Puisque le corps résiduel κ_v est fini, un théorème de R. Steinberg implique que le groupe $\mathbf{G}$ se quasi-déploie sur k_v^{nr} [63] ; autrement dit, $\mathbf{G}$ et $\mathscr{G}$ sont isomorphes sur k_v^{nr} et donc $\dim(\overline{\mathscr{T}_v}) = \dim(\overline{\mathbf{T}}_v) = k_v^{\mathrm{nr}}\text{-rg}(\mathbf{G}) = k_v^{\mathrm{nr}}\text{-rg}(\mathscr{G})$. On dispose aussi d'un isomorphisme φ_v : $\mathbf{G} \to \mathscr{G}$ défini sur k_v^{nr} tel que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(k_v^{\mathrm{nr}}/k_v)$ l'automorphisme $\varphi_v^{-1} \circ {}^{\sigma}\varphi_v$ de $\mathbf{G}$ soit intérieur. En outre, $\omega_v^* = \varphi_v^*(\omega_v)$ est définie sur k_v. Notons $\mathscr{O}_v^{\mathrm{nr}}$ l'anneau de valuation de k_v^{nr} ; alors les groupes $\mathbf{G}_{I_v}(\mathscr{O}_v^{\mathrm{nr}})$ et $\mathscr{G}_{\mathscr{I}_v}(\mathscr{O}_v^{\mathrm{nr}})$ sont encore des sous-groupes d'Iwahori de $\mathbf{G}$ et $\mathscr{G}$, respectivement. Par conjugaison de ces sous-groupes, on se ramène à avoir $\varphi_v\left(\mathbf{G}_{I_v}(\mathscr{O}_v^{\mathrm{nr}})\right) = \mathscr{G}_{\mathscr{I}_v}(\mathscr{O}_v^{\mathrm{nr}})$, quitte à composer φ_v par un automorphisme convenable. On en déduit que φ_v est défini sur $\mathscr{O}_v^{\mathrm{nr}}$. Ceci prouve, voir la preuve de [49, Prop 2.3], que

$$|\omega_v^*|(I_v) = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathscr{T}}_v(\kappa_v)} |\omega_v|(\mathscr{I}_v).$$

Deuxième étape : comptage de points dans les groupes finis.

En ce qui concerne les sous-groupes parahoriques P_v et $\mathscr{P}_v$, on déduit de la formule ci-dessus que : $\dfrac{\mid \omega_v^* \mid (P_v)}{\mid \omega_v \mid (\mathscr{P}_v)} = \dfrac{[P_v : I_v]}{[\mathscr{P}_v : \mathscr{I}_v]} \cdot \dfrac{\#\overline{T}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathscr{T}}_v(\kappa_v)}$. En passant aux facteurs de Lévi $\overline{\mathbf{M}}_v$ et $\overline{\mathscr{M}}_v$ des fibres spéciales des structures entières de P_v et $\mathscr{P}_v$, et en introduisant des sous-groupes de Borel $\overline{\mathbf{B}}_v$ et $\overline{\mathscr{B}}_v$, on obtient : $[P_v : I_v] = [\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v) : \overline{\mathbf{B}}_v(\kappa_v)]$ et $[\mathscr{P}_v : \mathscr{I}_v] = [\overline{\mathscr{M}}_v(\kappa_v) : \overline{\mathscr{B}}_v(\kappa_v)]$, ce qui permet d'utiliser la structure des groupes réductifs pour calculer des indices de sous-groupes d'Iwahori dans des sous-groupes parahoriques.

Par ailleurs, une formule bien connue pour les nombres de Tamagawa [44, I.2.5], appliquée à $\mathscr{P}_v$ fournit :

$$\mid c_v.\omega_v \mid (\mathscr{P}_v) = \#\overline{\mathscr{M}_v}(\kappa_v) \cdot q_v^{-\dim(\overline{\mathscr{M}_v})}.$$

Alors on peut écrire :

$$\mid c_v.\omega_v^* \mid (I_v) = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathscr{T}}_v(\kappa_v)} \cdot \frac{\mid c_v.\omega_v \mid (\mathscr{P}_v)}{[\mathscr{P}_v : \mathscr{I}_v]} = \frac{\#\overline{\mathbf{T}}_v(\kappa_v)}{\#\overline{\mathscr{T}}_v(\kappa_v)} \cdot \frac{\#\overline{\mathscr{B}_v}(\kappa_v)}{q_v^{\dim(\overline{\mathscr{M}_v})}}.$$

Ce qui permet de passer de cette égalité aux formules de l'énoncé est essentiellement le fait que la dimension d'un groupe réductif fini est la somme de la dimension d'un tore maximalement déployé et de deux fois la dimension du radical unipotent d'un sous-groupe de Borel. □

1.5. Stratégie du calcul

Rappelons tout d'abord deux résultats généraux, et en quelque sorte complémentaires, concernant les inclusions de groupes obtenues en évaluant un k-groupe algébrique donné sur divers anneaux définis à partir de k (tels que k lui-même, des anneaux de S-entiers de k, les adèles $\mathbf{A}_k$ de k). Le théorème de Mostow-Tamagawa, contemporain du théorème de Borel-Harish Chandra [7], traite de l'inclusion du groupe des k-points dans le groupe des points adéliques ; la version Behr-Harder traite du cas des corps de fonctions.

Théorème 1.5 (Borel-Harish Chandra [7], Mostow-Tamagawa [40], Behr-Harder [4], [29])

Soit $\mathbf{H}$ *un groupe réductif défini sur le corps global* k*. Alors :*

(i) *la mesure invariante sur* $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{H}(k)$ *est de volume total fini si, et seulement si, le groupe* $\mathbf{H}$ *n'a pas de caractère défini sur* k *;*

(ii) *l'espace homogène* $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{H}(k)$ *est compact si, et seulement si, le groupe* $\mathbf{H}$ *est anisotrope sur* k*.*

La condition de (i) est automatiquement satisfaite si le groupe $\mathbf{H}$ est semi-simple, et (ii) est une version adélique de ce qu'on appelle souvent le *critère de compacité de Godement*. Dire que le k-groupe $\mathbf{H}$ est *anisotrope* sur k signifie qu'il ne contient pas de tore déployé sur k non trivial. L'anisotropie a une interprétation plus concrète quand on travaille avec un corps local plutôt qu'un corps global : le groupe $\mathbf{H}$ est anisotrope sur un complété k_v (archimédien ou non) si, et seulement si, le groupe topologique $\mathbf{H}(k_v)$ est compact (pour le cas réel, c'est un résultat d'É. Cartan ; pour le cas non archimédien, voir [56] ou [48]).

Dans la situation précédente, on a considéré le plongement diagonal (discret) du groupe $\mathbf{H}(k)$ dans le groupe adélique $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)$, produit restreint $\prod'_v \mathbf{H}(k_v)$ des points rationnels de $\mathbf{H}$ en toutes les complétions de k. Le résultat suivant se place dans la situation où l'on considère le sous-groupe $\mathbf{H}(k) \cdot \prod_{v\in S} \mathbf{H}(k_v)$ de $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)$, produit du sous-groupe diagonal $\mathbf{H}(k)$ avec un nombre fini de facteurs $\mathbf{H}(k_v)$, $v \in S$. Par rapport à la situation précédente, si le produit $\prod_{v\in S} \mathbf{H}(k_v)$ est non compact, i.e. s'il contient un facteur isotrope, alors l'inclusion change complètement de nature topologique.

Théorème 1.6 (Approximation forte – M. Kneser, V. Platonov, G. Prasad et autres)

Soit $\mathbf{H}$ *un groupe presque simple simplement connexe défini sur le corps global* k*. Soit* S *un ensemble de places tel que* $\prod_{v\in S} \mathbf{H}(k_v)$ *soit non compact. Alors le groupe* $\mathbf{H}(k) \cdot \prod_{v\in S} \mathbf{H}(k_v)$ *est dense dans* $\mathbf{H}(\mathbf{A}_k)$*.*

Une preuve élégante de ce théorème, utilisant une définition dynamique des sous-groupes paraboliques et valable en toute caractéristique, est donnée dans [47].

Nous pouvons maintenant esquisser la preuve de la formule du covolume au moyen de ces quelques rappels et des deux sous-sections précédentes. Nous en utilisons d'ailleurs librement toutes les notations.

Preuve de la formule du covolume (esquisse) — Nous sommes en position d'appliquer le théorème d'approximation forte. On a :

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}_k) = G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v \cdot \mathbf{G}(k).$$

Notons $p_S : G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v \twoheadrightarrow G_S$ la projection associée à S et $\Lambda = p_S\Big((G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) \cap \mathbf{G}(k)\Big)$ le sous-groupe S-arithmétique principal de G_S qu'elle permet de définir. Composons l'isomorphisme d'approximation forte :

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k) \simeq (G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v)/\Big((G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) \cap \mathbf{G}(k)\Big)$$

avec l'homomorphisme surjectif

$$(G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v)/\Big((G_S \cdot \prod_{v \notin S} P_v) \cap \mathbf{G}(k)\Big) \twoheadrightarrow G_S/\Lambda,$$

afin d'obtenir une fibration principale $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k) \twoheadrightarrow G_S/\Lambda$ de fibre compacte $\prod_{v \notin S} P_v$. Prenons alors la mesure adélique du premier espace homogène :

$$\omega_{\mathbf{A}(k)}\big(\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k)\big) = \omega_S^*(G_S/\Lambda) \cdot \prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v).$$

En se rappelant la définition du nombre de Tamagawa de $\mathbf{G}$ sur k, à savoir que l'on a $\tau_k(\mathbf{G}) = {D_k}^{-\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \omega_{\mathbf{A}(k)}\big(\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)/\mathbf{G}(k)\big)$, nous obtenons :

$$\omega_S^*(G_S/\Lambda) = {D_k}^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v)^{-1}.$$

Rappelons que la normalisation qui permet de déduire la mesure μ_S de ω_S^* est la suivante :

$$\mu_S(G_S/\Lambda) = (\prod_{v \in V_\infty} |\, c_v \,|_v) \cdot (\prod_{v \in S_f} \omega_v^*(I_v)^{-1}) \cdot \omega_S^*(G_S/\Lambda).$$

Ainsi, en reprenant la notation $\gamma_v = |\, c_v \,|_v$ (1.1), nous obtenons :

$$\mu_S(G_S/\Lambda) = {D_k}^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \frac{\prod_{v \in V_\infty} \gamma_v}{(\prod_{v \in S_f} \omega_v^*(I_v)) \cdot (\prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v))}$$

en vertu de ce qui précède.

Travaillons enfin sur le produit des trois derniers facteurs. En faisant apparaître les facteurs γ_v aux places finies et en les compensant au dénominateur, nous obtenons :

$$\frac{\prod_{v \in V_\infty} \gamma_v}{(\prod_{v \in S_f} \omega_v^*(I_v)) \cdot (\prod_{v \notin S} \omega_v^*(P_v))} = \frac{\prod_{v \in V} \gamma_v}{(\prod_{v \in S_f} \gamma_v \omega_v^*(I_v)) \cdot (\prod_{v \notin S} \gamma_v \omega_v^*(P_v))}.$$

Le numérateur du membre de droite vaut $\left(\dfrac{D_\ell}{{D_k}^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathscr{G})} \cdot \prod_{v\in V_\infty} | \prod_{i=1}^{r} \dfrac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} |_v$ par le théorème 1.3. Pour le dénominateur, c'est-à-dire pour le facteur eulérien de la formule, il reste à appliquer les formules du théorème 1.4. □

2. FAUX PLANS PROJECTIFS : ARITHMÉTICITÉ

Dans cette section, on présente les faux plans projectifs et on esquisse la preuve du fait que le groupe fondamental d'une telle surface complexe est un sous-groupe arithmétique du groupe des isométries $\mathrm{PU}(2,1)$ de $(\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}, g_{\mathrm{hyp}})$ (2.3). Nous faisons aussi quelques digressions sur le comptage des variétés localement symétriques générales (2.2), ce qui nous sera utile pour la dernière partie de ce rapport.

2.1. Géométrie des faux plans projectifs

Présentons d'abord les variétés complexes qui nous intéressent, en partant de conditions très faibles, c'est-à-dire topologiques, dans la définition.

DÉFINITION 2.1. — *Un* faux plan projectif *est une surface analytique complexe lisse, compacte et avec les mêmes nombres de Betti que* $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$*, mais non homéomorphe à celui-ci.*

Historiquement, F. Severi a conjecturé qu'une surface complexe homéomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ doit lui être isomorphe en tant que variété algébrique. Cette conjecture n'a été démontrée qu'après les travaux de S.-T. Yau concernant l'existence de métriques de Kähler-Einstein sur les variétés compactes à première classe de Chern négative (preuve de la conjecture de Calabi [70]). On a d'ailleurs le renforcement suivant : une surface compacte avec les mêmes nombres de Betti que le plan projectif est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ dès lors que son groupe fondamental est fini [3, V.1]. Quelques années plus tard, D. Mumford a introduit les faux plans projectifs comme dans la définition ci-dessus [41, Introduction] et a construit un exemple explicite, mais issu d'un raisonnement assez détourné (3.5). Il s'agit de belles surfaces complexes dans la mesure où elles cumulent les propriétés d'être algébriques et localement symétriques ; en outre, ce sont des surfaces de type général de caractéristique d'Euler topologique minimale.

Donnons-nous maintenant un faux plan projectif X. Par hypothèse, la caractéristique d'Euler topologique $\chi_{\mathrm{top}}(X)$ de X vaut 3 et n'est autre que la classe de Chern $c_2(X)$ puisque X est compacte ; autrement dit : $c_2(X) = 3$. Concernant les classes caractéristiques de X, la formule de Todd-Hirzebruch (formule de Noether), implique d'ailleurs :

$$ {c_1}^2(X) + c_2(X) \in 12\mathbf{Z}, $$

soit

$$(*) \quad {c_1}^2(X) = -3 \text{ modulo } 12.$$

En outre, une égalité formelle entre classes caractéristiques [30, 4.6.1] implique que ${c_1}^2(X) - 2c_2(X)$ n'est autre que la classe de Pontryagin $p_1(X)$, et une égalité de cobordisme (formule de Thom-Hirzebruch [30, 8.2.2]) fournit :

$$p_1(X) = 3\tau(X),$$

où $\tau(X)$ est la signature de X, c'est-à-dire la signature de la forme d'intersection $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{R}) \times \mathrm{H}^2(X, \mathbf{R}) \to \mathrm{H}^4(X, \mathbf{R})$. Étant donné que $b_2(X) = 1$, on a $\tau(X) = \pm 1$, et finalement :

$$(**) \quad {c_1}^2(X) = 6 + 3 \times \mathrm{signe}(\tau(X)),$$

En combinant $(*)$ et $(**)$, on en conclut que ${c_1}^2(X) = 9$, ce qui implique que X est une variété projective.

Remarque 2.2. — Dans le même registre, essentiellement grâce à la formule de Noether et à la formule d'adjonction, on peut prouver qu'une surface algébrique avec les mêmes nombres de Betti que $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ et de fibré canonique négatif ou nul, est isomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ [25, pp. 487-488].

Désormais, nous allons plutôt voir un faux plan projectif sous le point de vue de la géométrie différentielle, c'est-à-dire comme une variété localement symétrique.

2.2. Finitude non quantitative : un premier usage de la rigidité

Une première façon d'utiliser les outils de la théorie des réseaux de groupes de Lie pour étudier les faux plans projectifs, consiste à prouver que les classes d'isomorphisme de ces surfaces sont en nombre fini. Nous allons expliquer que c'est une conséquence d'un théorème de H.-C. Wang et du théorème de rigidité forte de Mostow.

THÉORÈME 2.3 (H.-C. Wang). — *Soit G un groupe de Lie sans facteur compact, non localement isomorphe à* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ *ou* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. *On fixe une mesure de Haar sur G. Pour tout nombre réel $C > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de réseaux irréductibles de G dont le covolume soit majoré par C.*

Remarque 2.4. — L'énoncé de [67, 8.1] est erroné car il n'exclut pas les groupes localement isomorphes à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, comme cela est signalé dans [6, 8.3]. L'interprétation en géométrie hyperbolique de dimension 3 éclaire cette dernière situation (4.3). A. Borel, en étudiant dans [loc. cit.] les valeurs de la fonction volume sur les variétés riemanniennes couvertes par des espaces $(\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}})^m \times (\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}})^n$, rectifie l'énoncé. Il utilise notamment la notion de réseau *irréductible* (i.e., à projections denses sur les facteurs simples), voir [23, 13.4] et (4.4).

La démonstration est une astucieuse combinaison du théorème de rigidité locale de Calabi-Weil, de l'existence d'une présentation finie pour les réseaux des groupes de Lie connexes [67, 7.1] et du principal argument, dû à D. Kazhdan et G. Margulis, prouvant l'existence d'une borne inférieure strictement positive sur le covolume des réseaux d'un groupe de Lie semi-simple donné.

Preuve (esquisse) — Précisément :

(i) Êun théorème de Weil dit que les petites déformations de l'inclusion d'un réseau Γ dans G sont des conjugaisons de Γ (voir [53, 6.7] et [37, VII.5.25] pour les énoncés précis) ;
(ii) un théorème de Kazhdan-Margulis fournit un voisinage, disons U, de l'élément neutre 1_G tel que pour tout sous-groupe discret Δ de G on ait $g\Delta g^{-1} \cap U = \{1_G\}$ pour un $g \in G$ convenable [53, 11.8].

On raisonne par l'absurde. Par compacité, et au prix de quelques extractions, on dispose d'une suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 0}$ de réseaux de G, deux à deux non conjugués, intersectant trivialement U et tels que :

1. Êla suite des covolumes $\{\mathrm{Vol}(G/\Gamma_n)\}_{n \geqslant 0}$ est convergente, de limite $b > 0$;
2. la suite $\{\Gamma_n\}_{n \geqslant 0}$ est convergente pour la topologie (compacte) de Chabauty sur les sous-groupes fermés de G [12, VIII.5].

Notons Γ le sous-groupe limite : en utilisant U on voit que Γ est discret dans G. Par semi-continuité du covolume [53, 1.20], on a : $\mathrm{Vol}(G/\Gamma) \leqslant b$. En particulier Γ est un réseau ; il admet donc une présentation finie, disons de générateurs $h^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, et de relateurs $w_j(h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots.\ h^{(r)})$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Par définition de la convergence de Chabauty, on a des suites $\{h_n^{(i)}\}_{n \geqslant 0}$, avec $h_n^{(i)} \in \Gamma_n$, telles que $\lim_{n \to \infty} h_n^{(i)} = h^{(i)}$. Pour n assez grand, les mots $w_j(h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots.\ h^{(r)})$ sont dans $\Gamma_n \cap U = \{1\}$, ce qui permet de définir une suite d'homomorphismes $r_n : \Gamma \to \Gamma_n$, qui converge (dans la variété des homomorphismes de Γ dans G) vers l'inclusion $\Gamma \subset G$. Par rigidité locale, pour n assez grand l'homomorphisme r_n est une conjugaison. Ceci implique que la suite $\{\frac{\mathrm{Vol}(G/\Gamma)}{\mathrm{Vol}(G/\Gamma_n)} = \frac{\mathrm{Vol}(G/r_n(\Gamma))}{\mathrm{Vol}(G/\Gamma_n)}\}_{n \geqslant 0}$ est une suite stationnaire de nombres entiers positifs, de limite $\frac{\mathrm{Vol}(G/\Gamma)}{b} \geqslant 1$. Ainsi $\mathrm{Vol}(G/\Gamma) = b$ et donc $[\Gamma_n : r_n(\Gamma)] = 1$ pour n assez grand. Ceci implique que les sous-groupes Γ_n sont conjugués entre eux à partir d'un certain rang : contradiction. □

Revenons à la géométrie différentielle et donnons-nous un espace symétrique $\widetilde{X}$ de type non compact sans facteur euclidien, i.e., dont le groupe d'isométries $H = \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$ est semi-simple, sans facteur compact. La variété $\widetilde{X}$ est à courbure sectionnelle $\leqslant 0$, donc est contractile. Soit X une variété revêtue par $\widetilde{X}$. Par le lemme de point fixe de Bruhat-Tits [15, 3.2], dû à É. Cartan pour les espaces symétriques, le groupe fondamental Γ de X (agissant librement sur $\widetilde{X}$) est sans torsion ; on peut donc parler de sa caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ et on a $\chi(\Gamma) = \chi(X)$. En fait, il est possible et très utile de définir la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\Gamma)$ d'un réseau quelconque Γ de H, en posant :

$\chi(\Gamma) = \frac{\chi(\Delta)}{[\Gamma:\Delta]}$ où Δ est un sous-groupe d'indice fini sans torsion de Γ (un tel sous-groupe existe car Γ est de type fini et linéaire en caractéristique 0 : c'est le *lemme de Selberg*).

Comme dans la formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces, il y a un lien entre volume et caractéristique d'Euler-Poincaré. Étant donné un groupe de Lie réductif connexe H, d'après J.-P. Serre [58, §3] il existe une unique mesure invariante μ sur H (éventuellement nulle) telle que pour tout sous-groupe Γ discret, cocompact et sans torsion de H, on ait : $\chi(\Gamma) = \mu(H/\Gamma)$. On parle de *mesure d'Euler-Poincaré* pour H ; cette mesure est non nulle si, et seulement si, le rang de H est égal au rang de l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal de H.

Le problème de comptage des faux plans projectifs est un problème de comptage de variétés localement symétriques à caractéristique d'Euler fixée. Par le paragraphe précédent, ce problème se généralise en celui de compter des variétés localement symétriques à volume normalisé majoré. Le théorème de H.-C. Wang ci-dessus assure que dans H, il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de groupes fondamentaux de variétés localement symétriques revêtues par $\widetilde{X}$ et de volume (normalisé) majoré par une constante donnée. Le théorème fondamental qui permet de passer du type d'homotopie au type d'isométrie d'une variété localement symétrique est le théorème de *rigidité forte* de G.D. Mostow [39] :

Théorème 2.5 (G.D. Mostow). — *Soient X, X' des variétés localement symétriques complètes à courbure $\leqslant 0$, de dimension $\geqslant 3$, de même volume et irréductibles. On suppose qu'il existe un isomorphisme abstrait $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X')$. Alors X et X' sont isométriques.*

Revenons enfin aux faux plans projectifs et donnons-nous X et X' deux telles surfaces non isomorphes en tant que variétés algébriques. La structure complexe d'un espace symétrique hermitien étant naturellement associée à la métrique riemannienne, on peut voir X et X' comme des variétés de même volume (car $\chi(X) = \chi(X') = 3$), toutes deux revêtues par $\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$, mais non isométriques. Par rigidité de Mostow, cela fournit deux réseaux (cocompacts, sans torsion) de $\mathrm{PU}(2,1)$, de même covolume mais non isomorphes (en particulier non conjugués). Le théorème de H.-C. Wang implique donc la finitude du nombre de classes d'isomorphisme de faux plans projectifs.

Remarque 2.6. — Dans [3, V.1.2], un argument de composantes connexes de schéma de Chow est donné pour prouver la finitude des classes d'isomorphisme de faux plans projectifs, mais il faut commencer par utiliser le théorème de Calabi-Vesentini qui a été la motivation du théorème de rigidité locale d'A. Weil. Nous avons choisi un traitement relevant complètement des réseaux de groupes de Lie car c'est le bon contexte pour les comptages géométriques qu'on veut présenter en 4.3 et 4.4.

L'article de G. Prasad et S.K. Yeung [50] fournit une version quantitative très précise de cette finitude. Le point de départ est bien entendu le lien entre caractéristique d'Euler et covolume du groupe fondamental. Pour être effectif, il s'agit de calculer précisément le covolume en question, et c'est ce qui est permis par la formule de 1.2. Mais il faut auparavant s'assurer que le groupe fondamental d'un faux plan projectif est un groupe arithmétique. C'est ce qui a été prouvé indépendamment par B. Klingler et S.K. Yeung. Jusqu'à la fin de cette section, nous allons revenir rapidement sur la démonstration de ce fait.

2.3. Arithméticité du groupe fondamental

Commençons par rappeler ce qu'est un réseau arithmétique dans un groupe de Lie réel.

Définition 2.7. — *Un réseau* Γ *d'un groupe algébrique réel semi-simple* G *est dit* arithmétique *s'il existe un sous-groupe algébrique* $\mathbf{H}$ *d'un groupe* SL_m*, défini sur* $\mathbf{Q}$*, et pour lequel il existe un homomorphisme* $p : \mathbf{H}(\mathbf{R}) \to G$ *surjectif, à noyau compact et tel que* Γ *et* $p\,(\mathbf{H}(\mathbf{Q}) \cap \mathrm{SL}_m(\mathbf{Z}))$ *soient commensurables.*

La réduction de la preuve de l'arithméticité d'un groupe discret à celle de diverses super-rigidités, aujourd'hui classique, est une des plus belles idées des travaux de Margulis sur les réseaux de groupes de Lie [37, IX.2]. Rappelons aussi ce qu'est la super-rigidité, et pour cela revenons justement à la rigidité de Mostow (2.2). Voyons l'isomorphisme de groupes fondamentaux $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X')$ comme une représentation linéaire de $\pi_1(X)$ dans le groupe de Lie $\mathrm{Isom}(\widetilde{X}')$, où $\widetilde{X}'$ est le revêtement universel de X'. Le groupe $\mathrm{Isom}(\widetilde{X}')$ est un groupe algébrique réel, disons $\mathbf{H}$, adjoint (et simple vu l'hypothèse d'irréductibilité faite sur X'). La flèche $\varphi : \pi_1(X) \to \mathbf{H}(\mathbf{R})$ ainsi obtenue est d'image discrète, mais surtout elle est non compacte pour la topologie forte et dense pour la topologie de Zariski. La densité pour la topologie de Zariski des sous-groupes fermés de covolume fini est non triviale, c'est un théorème d'A. Borel (une jolie preuve mesurable de cela est due à H. Furstenberg [72, 3.2]). Bref, on peut se placer dans une situation plus générale : on considère des homomorphismes de groupes $\varphi : \Gamma \to \mathbf{H}(F)$, où Γ est un réseau des points réels d'un $\mathbf{R}$-groupe algébrique simple $\mathbf{G}$, où $\mathbf{H}$ est un groupe algébrique simple adjoint défini sur un corps local F (archimédien ou non) et où l'image $\varphi(\Gamma)$ est Zariski-dense, mais non nécessairement discrète. On dit que l'inclusion du réseau Γ dans $\mathbf{G}(\mathbf{R})$ est *super-rigide* si pour toute flèche $\varphi : \Gamma \to \mathbf{H}(F)$ d'image Zariski-dense, ou bien $\varphi(\Gamma)$ est relativement compact, ou bien F est archimédien et φ se prolonge en un homomorphisme de groupes algébriques $\mathbf{G} \to \mathbf{H}$. Si seule l'arithméticité est en vue, on peut en réalité se limiter à prouver que certaines flèches bien spécifiques vers des formes de $\mathbf{G}$ sont super-rigides.

Expliquons maintenant pourquoi la géométrie hyperbolique complexe est le cas limite (et encore ouvert) de bien des résultats de théorie des groupes et de géométrie. Tout d'abord, les résultats de super-rigidité de Margulis sont valides en rang supérieur, ce qui implique que du point de vue de l'arithméticité, le cas des réseaux (irréductibles) de tous les groupes de Lie de rang $\geqslant 2$ est élucidé. Il reste donc le cas des espaces symétriques de rang 1, c'est-à-dire des espaces hyperboliques. Pour ceux-ci, on peut constater toute une gradation de phénomènes de rigidité et d'arithméticité, les géométries les plus rigides étant celles des espaces hyperboliques quaternioniques et le plan des octaves de Cayley (il s'agit des géométries de rang 1 dont le groupe d'isométrie possède la propriété (T) de Kazhdan [72, §7]). Dans ce cas, les réseaux sont super-rigides (donc arithmétiques) d'après K. Corlette [21] pour le cas archimédien et d'après M. Gromov et R. Schoen [28] pour le cas non archimédien. Contrairement au cas du rang supérieur, les techniques ne sont pas ergodiques mais font appel à la notion d'application harmonique [45] ; on y reviendra (2.4 et 2.5). Le fait que la courbure sectionnelle soit constante en géométrie hyperbolique réelle rend assez faciles les recollements de variétés modelées sur ces espaces. C'est ce qui a permis à M. Gromov et I. Piatetski-Shapiro d'utiliser une ingénieuse technique d'hybridation de (demi-)variétés hyperboliques arithmétiques à bord, construites à partir de réseaux non commensurables. Le résultat est la preuve de l'existence, en toute dimension, de variétés à courbure -1 et à groupe fondamental non arithmétique [27].

Il reste donc le cas des espaces hyperboliques complexes $(\mathbb{B}^n_{\mathbf{C}}, g_{\mathrm{hyp}})$ qui sont encore difficiles à comprendre finement (voir toutefois [24]). Aussi bien du point de vue de la théorie des groupes que de la géométrie, ces espaces soulèvent beaucoup de questions et de problèmes. Par exemple, les hyperplans médiateurs ne sont pas totalement géodésiques, mais surtout la géométrie riemannienne de ces espaces est compliquée par le fait que la courbure sectionnelle n'est pas constante (du point de vue des groupes de Lie, le système de racines de $\mathrm{PU}(n,1)$ est non réduit). Les recollements sont beaucoup plus difficiles et d'ailleurs la question de l'existence de variétés à groupe fondamental non arithmétique en toute dimension est largement ouverte (on ne connaît de tels exemples qu'en basse dimension [22]).

Ceci étant dit, il est bien tentant de combiner des techniques de géométrie complexe avec les outils des réseaux de groupes de Lie pour approfondir la connaissance des réseaux de $\mathrm{PU}(n,1)$. Dans cet esprit, énonçons maintenant la conjecture de J. Rogawski [54], qui est le fil conducteur de beaucoup de travaux portant sur les groupes fondamentaux de surfaces hyperboliques complexes.

Conjecture 2.8 (J. Rogawski). — *Soit X une surface algébrique complexe revêtue par la boule hyperbolique complexe $\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$. On fait les hypothèses cohomologiques suivantes :*

le premier nombre de Betti $b_1(X)$ est nul ;

on a $\dim_{\mathbf{Q}}\big(\mathrm{H}^{1,1}(X) \cap \mathrm{H}^2(X,\mathbf{Q})\big) = 1$.

Alors le groupe fondamental de X est un sous-groupe arithmétique du groupe de Lie réel $\mathrm{PU}(2,1)$ *et il se construit à partir d'une algèbre à division involutive de dimension* 3 *sur* $\mathbf{Q}$.

L'idée générale qui sous-tend cette conjecture est qu'il faut faire des hypothèses supplémentaires et définir certaines classes spécifiques de réseaux hyperboliques complexes pour espérer prouver des résultats d'arithméticité. Les hypothèses sont de nature cohomologique. Par exemple, l'annulation du premier nombre de Betti peut être vue comme une version faible de la propriété (T) de Kazhdan, qui elle-même est équivalente à l'annulation de la 1-cohomologie à coefficients dans toute représentation unitaire du groupe considéré. Le résultat le plus frappant dans cette direction est bien entendu celui des faux plans projectifs, dû indépendamment à B. Klingler [34] et S.K. Yeung [71]. Chacun de ces auteurs isole dans son travail d'intéressants résultats intermédiaires. Voici donc le résultat qui va être l'objet des deux prochaines sous-sections.

Théorème 2.9 (B. Klingler et S.K. Yeung). — *Soit X un faux plan projectif et soit Γ son groupe fondamental. Alors Γ est un sous-groupe arithmétique de* $\mathrm{PU}(2,1)$.

Remarque 2.10. — Finissons par mentionner un autre domaine reliant théorie des groupes discrets et géométrie complexe : l'étude des groupes de Kähler, c'est-à-dire des groupes fondamentaux de variétés kählériennes compactes (pour lesquels la première question ouverte est de savoir s'ils forment une classe plus vaste que celle des groupes fondamentaux de variétés projectives). Les problèmes sont un peu différents puisque D. Toledo construit dans ce cadre des groupes de type fini non linéaires (car non résiduellement finis). Une référence est [1], mais elle ne rend pas compte de travaux récents de F. Campana, Th. Delzant, M. Gromov...

Désormais, nous nous intéressons essentiellement aux super-rigidités du groupe fondamental Γ d'un faux plan projectif X.

2.4. Super-rigidité archimédienne du groupe fondamental

Dans cette partie, il s'agit de travailler sur des représentations linéaires de Γ à valeurs dans les points d'un groupe algébrique archimédien qui est une forme du groupe PSL_3. En effet le groupe Γ est un sous-groupe de $\mathrm{PU}(2,1)$, et ce groupe de Lie simple est de type A_2. En fait, la partie archimédienne des super-rigidités qui nous intéressent est la suivante :

Soit X un faux plan projectif. Soit $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ une représentation d'image Zariski-dense. Alors ρ se prolonge en une représentation algébrique $\mathrm{PU}(2,1) \to \mathrm{PSL}_3$.

On va voir que cette situation ressemble un peu à celle où l'on regarde un réseau d'un groupe de Lie simple et où l'on cherche à le déformer dans un groupe de Lie plus gros (par exemple, le résultat n'est pas le même suivant qu'on déforme un réseau de $\mathrm{SO}(n,1)$ dans $\mathrm{SO}(n+1,1)$, ou un réseau de $\mathrm{SU}(n,1)$ dans $\mathrm{SU}(n+1,1)$). Cependant, le problème n'est pas ici de démontrer des résultats de rigidité, mais plutôt de contrôler les déformations en distinguant au départ une bonne classe de représentations des groupes de Kähler ; cette classe de représentations provient de la théorie de Hodge.

Plus précisément, B. Klingler [34, §3] utilise des *domaines de Griffiths* [26]. Il s'agit d'espaces homogènes G/V où G est le groupe unitaire d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel H de dimension finie muni d'une forme hermitienne h, et où V est un sous-groupe compact, en fait le stabilisateur d'une somme directe $H = \bigoplus_{r \in \mathbf{Z}} H^r$ sur les termes de laquelle h est un produit scalaire hermitien (au signe près). En termes de théorie de Lie, on associe à $H = \bigoplus_{r\in\mathbf{Z}} H^r$ un drapeau. Le groupe de Lie complexe $Q_{\mathbf{C}}$ stabilisateur de ce drapeau est un sous-groupe parabolique du groupe de Lie complexifié $G_{\mathbf{C}}$ et $V_{\mathbf{C}}$ est un facteur de Lévi de $Q_{\mathbf{C}}$. L'espace $D = G/V$ est la base d'une fibration $G/K \to G/V$ où K est un sous-groupe compact maximal de G bien déterminé par V ; c'est aussi la source d'un plongement ouvert $D \hookrightarrow \check{D}$ où $\check{D}$ est la variété de drapeaux $G_{\mathbf{C}}/Q_{\mathbf{C}}$. Si M est une variété kählérienne compacte, une *représentation de Hodge* de $\pi_1(M)$ dans H est une représentation $\rho : \pi_1(M) \to G$ munie d'une application holomorphe ρ-équivariante $f : \widetilde{M} \to D$, de source le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M et satisfaisant à une certaine condition de transversalité (on aurait pu aussi adopter le point de vue des variations de structures de Hodge complexes sur M).

L'intérêt des représentations de Hodge a été mis en avant par les travaux fondamentaux de C. Simpson selon lesquels toute représentation de groupe fondamental d'une variété projective peut être déformée en une telle représentation [59, §4]. C'est A. Reznikov qui, semble-t-il le premier, a pensé à utiliser la théorie de C. Simpson pour la conjecture de J. Rogawski [54]. À ce stade, il reste à comprendre les représentations de Hodge dans les cas particuliers qui nous intéressent. B. Klingler, plutôt que de faire des calculs de fibrés de Higgs comme A. Reznikov, a introduit les domaines de Griffiths, ce qui lui permet de prouver les résultats suivants [34, Proposition 3.3] :

Proposition 2.11. — *Soit X une surface projective satisfaisant les hypothèses de la conjecture de Rogawski, de groupe fondamental Γ et de revêtement universel $\widetilde{X}$.*

(i) *Soit $\rho : \Gamma \to \mathrm{PU}(p,q)$ une représentation de Hodge avec $p+q=3$. Alors, ou bien ρ est unitaire, ou bien son image est conjuguée à $\mathrm{PU}(2,1)$ dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$. Dans ce dernier cas, il existe une application holomorphe, localement immersive et ρ-équivariante de $\widetilde{X}$ vers $\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$.*

(ii) *Si $\widetilde{X} = \mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$ et si le groupe de Néron-Severi modulo torsion $\mathrm{H}^{1,1}(X) \cap \mathrm{H}^2(X,\mathbf{Z})/\mathrm{tors}$ est engendré par la classe de la métrique de Kähler à courbure sectionnelle holomorphe constante égale à -2, alors ρ est conjuguée dans $\mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ à l'inclusion naturelle $\Gamma \hookrightarrow \mathrm{PU}(2,1)$.*

Pour l'instant, nous n'avons pas fait d'hypothèse de densité de Zariski concernant l'image des représentations $\Gamma \to \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$. L'étape suivante fait justement cette hypothèse [34, Proposition 3.4] : si X est un faux plan projectif et si $\Gamma \to \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ est Zariski-dense, alors la représentation est rigide dans l'espace de représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C}))$, i.e., toute déformation de cette représentation est une conjugaison [53, VI]. Pour la super-rigidité archimédienne, on conclut alors de la façon suivante. Si X est un faux plan projectif et si $\Gamma \to \mathrm{PSL}_3(\mathbf{C})$ est Zariski-dense, alors cette représentation se déforme (par Simpson) sur une représentation de Hodge ; mais comme elle est rigide par ce qui précède, elle est elle-même de Hodge. Par le point (ii) de la Proposition 2.11, elle se prolonge en une représentation algébrique $\mathrm{PU}(2,1) \to \mathrm{PSL}_3$.

2.5. Super-rigidité non archimédienne du groupe fondamental

La partie non archimédienne des super-rigidités qui nous intéressent est la suivante :

Soit X un faux plan projectif. Soient F un corps local et $\mathbf{G}$ une forme sur F de PSL_3*. On se donne $\rho : \pi_1(X) \to \mathbf{G}(F)$ une représentation d'image Zariski-dense. Alors ρ est d'image relativement compacte dans $\mathbf{G}(F)$.*

Remarque 2.12. — Dans les groupes algébriques non archimédiens, il n'y a pas de contradiction pour un sous-groupe entre être relativement compact et être Zariski-dense, comme l'illustre l'inclusion de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z}_p)$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Q}_p)$. Dans les points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbf{R}$, les semi-groupes compacts ne sont jamais denses pour la topologie de Zariski.

La principale technique est celle des applications harmoniques à valeurs dans des espaces singuliers, qui a été inaugurée par M. Gromov et R. Schoen [28]. L'idée est de considérer les applications ρ-équivariantes du revêtement universel $\widetilde{X}$ vers l'immeuble de Bruhat-Tits Δ de $\mathbf{G}$ sur F. L'immeuble affine Δ admet une métrique pour laquelle il est complet et à courbure $\leqslant 0$ (techniquement, on parle d'espace complet, géodésique et CAT(0) [14], en référence semble-t-il à Cartan-Alexandrov-Toponogov). Alors qu'ils sont originellement définis par Bruhat-Tits à partir des tores F-déployés maximaux de $\mathbf{G}$, on peut caractériser métriquement les *appartements* de Δ comme les sous-espaces plats (i.e., isométriques à des espaces euclidiens) maximaux de Δ ; c'est une analogie de plus avec les espaces symétriques du cas archimédien. On définit sur l'espace des applications ρ-équivariantes $\widetilde{X} \to \Delta$ localement lipschtziennes, une fonctionnelle d'énergie, qui est convexe parce que l'espace but est à courbure $\leqslant 0$. L'hypothèse de Zariski-densité de l'image de ρ implique l'existence d'une application, disons f, qui est ρ-équivariante, lipschitzienne et qui minimise localement l'énergie : une telle application est dite *harmonique*. Dans le cas d'un espace d'arrivée lisse, on retrouve la définition différentielle classique [45]. Quand on suppose que ρ est non bornée, l'application f est non constante, hypothèse sous laquelle on travaille désormais afin d'aboutir à une contradiction.

Voici maintenant une notion propre au cas où l'espace d'arrivée est singulier. Un point de $x \in \widetilde{X}$ est dit *régulier* pour f s'il admet un voisinage U tel que $f(U)$ soit contenu dans un appartement de Δ, sinon il est dit *singulier*. On note $R(\widetilde{X}, \rho)$ le lieu des points réguliers pour f. C'est une partie ouverte dans $\widetilde{X}$ et stable par Γ. On note $R(X, \rho)$ l'image de $R(\widetilde{X}, \rho)$ dans X : d'après [28, Theorem 6.4] le complémentaire $S(X, \rho)$ de $R(X, \rho)$ dans X est de codimension de Hausdorff $\geqslant 2$, ce qui autorise beaucoup de calcul différentiel classique dans cette situation.

Ce qu'on vient de décrire dans le paragraphe précédent peut être construit sans que X porte une structure complexe. En revanche, dans le cas (qui est le nôtre) où X est une variété projective complexe, il existe un revêtement de X, appelé *revêtement spectral*, dont la définition est assez technique et met en jeu le système des racines de $\mathbf{G}$ vues comme formes affines sur un appartement. Ce revêtement permet de prouver que le lieu singulier $S(X,\rho)$ est une sous-variété algébrique de X [32, Lemma 2.1]. B. Klingler travaille au début avec des surfaces complexes, non nécessairement couvertes par $\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$, mais satisfaisant les hypothèses cohomologiques de la conjecture de Rogawski (2.3) ; sous ces hypothèses plus générales, il peut démontrer que le lieu $S(X,\rho)$ des points singuliers est en fait une réunion finie de points.

En revanche, S.K. Yeung travaille dès le début avec des réseaux Γ de $\mathrm{PU}(2,1)$, ce qui lui permet d'utiliser une conséquence de la rigidité de Weil impliquant que le groupe Γ est contenu dans les points rationnels d'une forme $\mathbf{H}$ de PSL_3 sur un corps de nombres, disons K (ce raisonnement, dû à A. Weil, qui consiste à déduire une propriété d'algébricité d'un résultat de rigidité [53, 6.6] est en quelque sorte l'ancêtre de celui qui prouve l'arithméticité à partir de super-rigidités). Il s'agit ensuite de démontrer que Γ est en fait formé de matrices à coefficients dans les entiers $\mathscr{O}_K$ de K, ce qu'on appelle un réseau *entier*. Cette notion permet de bien comprendre le rôle de la super-rigidité non-arithmétique : le fait pour Γ de ne pas être entier dans $\mathbf{H}(K)$ est équivalent à l'existence d'une place non archimédienne pour laquelle l'inclusion de Γ dans $\mathbf{H}(K_v)$ est non bornée. Enfin, un réseau entier $\Gamma \subset \mathbf{H}(\mathscr{O}_K)$ est arithmétique si le seul facteur non compact de la restriction de Weil $\mathscr{R}_{K/\mathbf{Q}}(\mathbf{H})$ est le facteur non tordu, voir par exemple [72, pp. 120-121]. C'est à ce stade, pour passer de l'intégralité à l'arithméticité d'un réseau, que la super-rigidité archimédienne est utile.

Voici une partie du principal résultat de S.K. Yeung [71] (l'orateur n'a pas eu le temps de vérifier les détails de sa preuve). On a en outre omis les énoncés portant sur la construction arithmétique explicite du groupe fondamental, i.e., la dernière partie de la conjecture de Rogawski (2.3).

Théorème 2.13. — *Soit Γ un réseau sans torsion cocompact de* $\mathrm{PU}(2,1)$ *tel que la surface $X = \Gamma \setminus \mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$ satisfasse aux hypothèses de la conjecture de Rogawski. Alors Γ est un réseau entier. Si en outre le fibré canonique K_X est positif et égal à 3 fois un générateur du groupe de Néron-Severi modulo torsion* $\mathrm{H}^{1,1}(X) \cap \mathrm{H}^2(X,\mathbf{Z})/\mathrm{tors}$, *alors Γ est arithmétique.*

S.K. Yeung utilise le revêtement spectral, et sa définition usuelle, tout au long de son article. B. Klingler définit ce revêtement $p : Z \to X$ en partant d'un point de vue plus naturel en géométrie différentielle [38], qui consiste à tirer en arrière le fibré tangent de la variété cible en un fibré sur la variété de départ. Qu'est-ce que le fibré tangent de l'immeuble Δ ? C'est, en gros, la donnée en chaque point intérieur à une alcôve (i.e., non contenu dans un mur) de l'unique appartement le contenant. Notons W le groupe de Weyl sphérique de $\mathbf{G}$ (c'est un groupe fini, isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou au groupe symétrique $\mathscr{S}_3$ suivant que $\mathbf{G}$ est de rang 1 ou 2 ; en fait, le groupe de Weyl affine W_{aff} est le quotient du stabilisateur d'un appartement quelconque par son fixateur, et W est le quotient de W_{aff} par son sous-groupe de translations). Par la définition même des points réguliers et le point de vue des cocycles, B. Klingler construit un fibré plat $F_{\mathbf{R}}(X,\rho)$ de base $R(X,\rho)$

et de fibre l'espace vectoriel $V_{\mathbf{R}}$ sous-jacent à un appartement, muni d'une application d'holonomie $\tau : \pi_1(R(X,\rho)) \to W$. Le revêtement $p : Z \to X$ est le revêtement de X de groupe de Galois $\mathrm{Im}(\tau)$ qui trivialise $F(X,\rho) = F_{\mathbf{R}}(X,\rho) \otimes \mathbf{C}$; il existe naturellement sur Z une 1-forme holomorphe $\mu_Z \in \mathrm{H}^0(Z, \Omega^1_Z \otimes V)$ où $V = V_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{C}$. Les principaux résultats sur p et μ_Z sont les suivants [34, Théorème 5 et Proposition 2.3].

Théorème 2.14. — *On pose :* $V^*.\mu_Z = \{\alpha \circ \mu_Z : \alpha \in V^*\}$.

(i) *Le revêtement* $p : Z \to X$ *est non ramifié.*
(ii) *Si le rang de* $\mathbf{G}$ *sur* F *vaut* 2*, alors* $\mathrm{H}^0(Z, \Omega^1_Z) = V^*.\mu_Z$.

Dans la situation de (ii), le $\mathbf{C}$-espace vectoriel V est de dimension 2 car les appartements de Δ sont des pavages du plan euclidien par des triangles équilatéraux. La fin de la démonstration de super-rigidité non archimédienne est alors un joli raisonnement de courbes elliptiques tracées sur des variétés d'Albanese. Au départ, on utilise (ii) pour voir que la variété d'Albanese $\mathrm{Alb}(Z) = \mathrm{H}^0(Z, \Omega^1_Z)/\mathrm{H}_1(Z, \mathbf{Z})$ est une surface abélienne admettant, quitte à changer le point base, le groupe $\mathscr{S}_3$ comme sous-groupe d'automorphismes. Cela impose de très fortes restrictions sur la géométrie de $\mathrm{Alb}(Z)$ et permet d'aboutir à la contradiction cherchée depuis qu'on suppose que l'application harmonique f est non constante.

Remarque 2.15. — La difficulté de la question de super-rigidité non archimédienne qu'on vient d'aborder, tient au fait que la variété X est de dimension 2 et que le rang des groupes cibles est 2. Intuitivement, on s'attend à ce que les preuves de super-rigidité soient facilitées dans les situations où le groupe cible est « trop petit » par rapport à la variété dont on considère le groupe fondamental. Le cas typique est celui où la dimension de la variété est supérieure au rang du groupe cible ; on dispose alors de théorèmes de factorisation (d'ailleurs utilisés par B. Klingler et S.K. Yeung quand les immeubles de Bruhat-Tits à l'arrivée sont des arbres [60]).

3. FAUX PLANS PROJECTIFS : COMPTAGE

Dans cette section, on explique rapidement le principe du comptage des faux plans projectifs : on spécialise la formule du covolume de G. Prasad au cas d'une forme anisotrope de SL_3 (3.2) et on utilise des estimées issues de la théorie analytique des nombres pour restreindre l'ensemble des corps de base possibles pour ces formes. On évoque également des constructions précédant la classification de Prasad-Yeung (3.5).

3.1. Réduction aux groupes arithmétiques principaux

Soit X un faux plan projectif. Le principal objectif de cette sous-section est de se mettre en position d'appliquer la formule du covolume (1.2). Une des hypothèses de cette formule est que le groupe algébrique ambiant soit simplement connexe (au sens des groupes algébriques) et une autre est que nous travaillions avec des groupes arithmétiques principaux. Comme il n'est pas anodin, quand on veut calculer précisément des covolumes, de raisonner à commensurabilité près, nous avons besoin d'introduire divers sous-groupes discrets. Ceci va nous conduire à utiliser des notations éventuellement différentes de ce qui précède.

Écrivons d'abord $X = \Pi \backslash \mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$, où $\Pi = \pi_1(X)$ est un sous-groupe discret et cocompact de $\mathrm{PU}(2,1) = \mathrm{Isom}(\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}, g_{\mathrm{hyp}})$. Les groupes d'isométries des espaces symétriques irréductibles sont des groupes algébriques sur $\mathbf{R}$ simples et adjoints (i.e., à centre trivial). En fait, le groupe algébrique qui est le revêtement simplement connexe de $\mathrm{PU}(2,1)$ est $\mathrm{SU}(2,1)$, et on a une suite exacte : $1 \to \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \mathrm{SU}(2,1) \to \mathrm{PU}(2,1) \to 1$. Notons $\widetilde{\Pi}$ l'image réciproque de Π par l'homomorphisme surjectif de cette suite exacte. Par définition d'un faux plan projectif, on a $\chi(\Pi) = 3$ et par les propriétés élémentaires de la caractéristique d'Euler-Poincaré [58, §1], on a donc : $\chi(\widetilde{\Pi}) = 1$.

Les résultats de la section 2 impliquent que le groupe $\widetilde{\Pi}$ est un sous-groupe arithmétique (au sens de 2.3) de $\mathrm{SU}(2,1)$. En effet, même si dans cette dernière section on considère des flèches dont le groupe de départ est le groupe fondamental Π, pour prouver l'arithméticité de $\widetilde{\Pi}$, par la réduction même de l'arithméticité à diverses super-rigidités, il suffit de considérer des homomorphismes Zariski-denses de $\widetilde{\Pi}$ dans les points rationnels de formes du groupe adjoint $\mathrm{PU}(2,1)$. Or par Zariski-densité de l'image, toutes ces flèches se factorisent à travers $\mathrm{SU}(2,1) \to \mathrm{PU}(2,1)$. Nous sommes donc amenés à comparer précisément le sous-groupe discret, cocompact $\widetilde{\Pi}$ de $\mathrm{SU}(2,1)$ à un sous-groupe arithmétique principal, c'est-à-dire pour lequel il existe un corps de nombres k, une k-forme $\mathbf{G}$ de $\mathrm{SU}(2,1)$ et une famille $P = (P_v)_{v \in V_f}$ de sous-groupes parahoriques (avec $P_v \subset \mathbf{G}(k_v)$) tels que $\widetilde{\Pi}$ soit commensurable à $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$. En outre, il existe une place archimédienne v_0 telle que $\mathbf{G}(k_{v_0})$ soit isomorphe à $\mathrm{SU}(2,1)$ et que pour toute autre $v \in V_\infty \setminus \{v_0\}$ le groupe $\mathbf{G}(k_v)$ soit compact. Par le critère de Godement (1.5), le groupe algébrique $\mathbf{G}$ est donc anisotrope sur k.

Nous avons besoin de savoir que le k-groupe algébrique $\mathbf{G}$ peut être décrit assez précisément. Par la classification de J. Tits et A. Weil des groupes semi-simples [65], une telle k-forme est donc une forme extérieure de SL_3 et on a deux possibilités, chacune faisant intervenir une extension quadratique imaginaire ℓ de k. Ou bien $\mathbf{G}$ est le groupe spécial unitaire d'une forme hermitienne sur ℓ^3 anisotrope sur k (on parle de *k-forme de première espèce* de SL_3), ou bien $\mathbf{G}$ est décrit au moyen d'une algèbre à division cubique $\mathscr{D}$ munie d'une involution de seconde espèce σ et de centre ℓ (on parle de *k-forme de seconde espèce*). Construisons maintenant un sous-groupe arithmétique principal Λ à partir de cela, en construisant une famille convenable de sous-groupes parahoriques

P_v, $v \in V_f$. Si v est ramifiée (resp. non ramifiée) dans ℓ, on choisit un sous-groupe parahorique P_v qui est normalisé par $\widetilde{\Pi}$ et maximal (resp. minimal) pour cette propriété. Alors $\prod_{v \in V_f} P_v$ est ouvert dans $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$ et le groupe qui nous intéresse est le sous-groupe arithmétique principal $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$. Notons enfin Γ le normalisateur de Λ dans $\mathbf{G}(k_{v_0})$. Par [8, §1], on a $N_{\mathbf{G}(k)}(\Lambda) = \Lambda$, et donc $\Gamma \cap \mathbf{G}(k) = \Lambda$. Remarquons finalement que, puisque Γ contient $\widetilde{\Pi}$:

on vient de construire naturellement, à partir du groupe fondamental $\Pi \subset \mathrm{PU}(2,1)$, *un sous-groupe arithmétique* $\Gamma \subset \mathbf{G}(k_{v_0}) \simeq \mathrm{SU}(2,1)$ *dont la caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(\Gamma)$ *est l'inverse d'un nombre entier.*

Ceci, interprété en termes de covolume, constitue une première contrainte de classification et de construction. On renvoie à [50, 1.2-1.3] pour plus de détails.

3.2. Application de la formule de covolume

Avec les notations précédentes, rappelons maintenant la formule du covolume (1.2), que nous pouvons justement appliquer au sous-groupe arithmétique principal Λ du groupe simplement connexe $\mathbf{G}(k_{v_0})$:

$$\mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda) = D_k^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathscr{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} | \prod_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} |_v\right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \mathscr{E}.$$

Remarque 3.1. — Dès [49, 3.11], G. Prasad distingue le cas où $S = V_\infty$ par le fait que la relation avec les fonctions L des corps de nombres est plus immédiate dans cette situation.

Il s'agit de rendre encore un peu plus explicite cette formule dans notre situation bien spécifique. Le groupe $\mathbf{G}$ est une k-forme extérieure anisotrope de SL_3, où k est un corps de nombres totalement réel. On en déduit déjà que $\dim(\mathbf{G}) = 8$ et que $\#V_\infty = [k : \mathbf{Q}]$; notons d'ailleurs d le degré de l'extension $k/\mathbf{Q}$. Le groupe $\mathscr{G}$ est lui aussi une k-forme extérieure de SL_3, mais il est de rang 1 car quasi-déployé. Nous travaillons avec des sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{SU}(2,1)$ et nous sommes dans le cas exceptionnel de la définition du nombre $\mathfrak{s}(\mathscr{G})$ puisque le système de racines absolu est de type A_2 (le système de racines relatif est BC_1). Précisément, nous avons : $\mathfrak{s}(\mathscr{G}) = 5$. Les exposants du groupe de Weyl sphérique sont $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$ [13, V.6 et planches]. On a donc :

$$\mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda) = D_k{}^4 \cdot (\frac{D_\ell}{D_k{}^2})^{\frac{5}{2}} \cdot (\frac{1}{16\pi^5})^d \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \mathscr{E}.$$

Comme le groupe $\mathbf{G}$ est simplement connexe, on a $\tau_k(\mathbf{G}) = 1$ par [35], et donc :

$$\mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda) = \frac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{D_k} \cdot \frac{1}{(16\pi^5)^d} \cdot \mathscr{E}.$$

Par ailleurs, par proportionnalité de Hirzebruch [30, §22], on a :

$$\chi(\Lambda) = 3 \cdot \mu(\mathbf{G}(k_{v_0})/\Lambda),$$

donc si nous revenons à des considérations de caractéristique d'Euler-Poincaré, en nous rappelant que $\chi(\Gamma) = \frac{\chi(\Lambda)}{[\Gamma:\Lambda]}$ est l'inverse d'un nombre entier (3.1), nous obtenons déjà la contrainte que

$$\frac{3}{[\Gamma : \Lambda]} \cdot \frac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{D_k} \cdot \frac{1}{(16\pi^5)^d} \cdot \mathscr{E}$$

doit être l'inverse d'un nombre entier.

À ce stade, on peut ajouter que des arguments de cohomologie galoisienne avaient permis à A. Borel et G. Prasad [8, 2.9 et 5.3-5.5] de démontrer que l'indice $[\Gamma : \Lambda]$ est une puissance de 3 et qu'il est majoré par 3 fois l'ordre du sous-groupe du groupe $\mathrm{Cl}(\ell)$ des classes de ℓ formé des éléments d'ordre 1 ou 3 [50, 2.3].

Ainsi, il reste à travailler sur le produit eulérien $\mathscr{E}$ de la formule, qui vaut $\prod_{v \in V_f} e(P_v)$ où le facteur local $e(P_v)$ est $\dfrac{{q_v}^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v)+\dim(\overline{\mathscr{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}$. Commençons par une remarque naïve.

Remarque 3.2. — Remplaçons le groupe $\mathbf{G}$ par SL_3 et considérons la formule du covolume pour le choix de sous-groupes parahoriques maximaux $P_v = \mathrm{SL}_3(\mathscr{O}_v)$ pour toute $v \in V_f$. Alors nous avons : $\overline{\mathbf{M}}_v = \overline{\mathscr{M}}_v = \mathrm{SL}_3$ pour toute $v \in V_f$; en particulier ${q_v}^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v)+\dim(\overline{\mathscr{M}}_v))} = {q_v}^8$. Par ailleurs, $\mathrm{SL}_3(q_v)$ est d'ordre ${q_v}^3.(q_v-1)^2.(1+2q_v+2{q_v}^2+{q_v}^3) = {q_v}^3.(1-{q_v}^2).(1-{q_v}^3)$. Par conséquent, dans ce cas le produit eulérien $\mathscr{E}$ est égal à $\prod_{v \in V_f}(1-\frac{1}{{q_v}^2})^{-1}.(1-\frac{1}{{q_v}^3})^{-1} = \zeta_k(2) \cdot \zeta_k(3)$.

D'après un résultat classique de cohomologie galoisienne, le groupe $\mathbf{G}$, qui est une k-forme du groupe SL_3, est quasi-déployé en presque toutes les places v. Cependant, on doit prendre garde au comportement de chaque place par rapport à l'extension ℓ de k ; en effet, le facteur local $e(P_v)$ n'est pas le même suivant que v est décomposée ou inerte dans ℓ. Ceci explique en particulier le fait que la valeur $L_{\ell/k}(3)$ remplace $\zeta_k(3)$ par rapport à la remarque naïve ci-dessus. On a besoin d'être un peu technique pour expliquer cela précisément : aux places où le sous-groupe parahorique P_v de $\mathbf{G}(k_v)$ est hyperspécial, on a

$e(P_v) = (1-\frac{1}{{q_v}^2})^{-1}.(1-\frac{1}{{q_v}^3})^{-1}$ si v se décompose dans ℓ ;
$e(P_v) = (1-\frac{1}{{q_v}^2})^{-1}.(1+\frac{1}{{q_v}^3})^{-1}$ si v est inerte dans ℓ.

Pour utiliser ultérieurement des estimations de théorie analytique des nombres, G. Prasad et S.K. Yeung font apparaître $\mathscr{E}$ comme une modification de $\zeta_k(2) \cdot L_{\ell/k}(3)$ en un nombre fini de facteurs. La modification est indexée par l'ensemble noté $\mathscr{T}$ dans [50, 2.2] et défini par : $\mathscr{T} = \{v \in V_f : v$ est non ramifiée en ℓ et P_v n'est pas hyperspécial$\}$.

3.3. Usage de théorie analytique des nombres

Première intervention de la théorie des nombres : majorations de discriminant à partir de majorations de covolume. Partons d'une toute dernière inégalité obtenue par des arguments de groupes algébriques [50, 2.6 (2)] :

$$\frac{1}{3} \;\geqslant\; \frac{D_\ell^{\frac{5}{2}} \cdot \zeta_k(2) \cdot L_{\ell/k}(3)}{3(16\pi^5)^d \cdot h_{\ell,3} \cdot D_k} \cdot \prod_{v \in \mathscr{T}} e''(P_v).$$

On a simplement besoin d'expliquer ici que h_ℓ est l'ordre du groupe des classes $\mathrm{Cl}(\ell)$ de ℓ et que $h_{\ell,3}$ est l'ordre du sous-groupe de $\mathrm{Cl}(\ell)$ formé des éléments d'ordre 1 ou 3. En outre les facteurs $e''(P_v)$ sont des modifications des facteurs $e(P_v)$ (bien interprétables en termes de volumes de sous-groupes parahoriques) introduites pour compenser le fait qu'on force les valeurs $\zeta_k(2)$ et $L_{\ell/k}(3)$ à apparaître dans la formule du covolume. Il est important de noter que $e''(P_v) \geqslant 1$ pour tout $v \in \mathscr{T}$. Des calculs directs permettent par ailleurs de vérifier que $\zeta_k(2) \cdot L_{\ell/k}(3) > 1$ et nous obtenons déjà une majoration de $\dfrac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{h_{\ell,3} \cdot D_k}$, et donc de $\dfrac{D_\ell^{\frac{5}{2}}}{h_\ell \cdot D_k}$, par une constante.

Ensuite, il s'agit de majorer h_ℓ. G. Prasad et S.K. Yeung le font en utilisant l'estimation de Brauer-Siegel :

$$h_\ell \cdot \frac{R_\ell}{w_\ell} \;\leqslant\; s(s-1)\Gamma(s)^d \left((2\pi)^{-2d} D_\ell\right)^{\frac{s}{2}} \zeta_\ell(s),$$

valable pour tout $s > 1$ et où R_ℓ est le régulateur de ℓ [11, Chap. 2, 4.4] et w_ℓ est l'ordre du groupe des racines d-ièmes de l'unité dans ℓ. Ils combinent cette inégalité à une minoration de $\frac{R_\ell}{w_\ell}$ en fonction du degré $d = [k : \mathbf{Q}] = \frac{1}{2}[\ell : \mathbf{Q}]$ due à R. Zimmert (ils utilisent aussi par la suite des améliorations dues à I.Sh. Slavutskii, puis à E. Friedman). L'estimation initiale de R. Zimmert est [73] :

$$\frac{R_\ell}{w_\ell} \geqslant 0,02 e^{0,1d},$$

et utiliser l'estimation d'I.Sh. Slavutskii [61] permet finalement d'obtenir :

$$D_k^{\frac{1}{d}} \leqslant D_\ell^{\frac{1}{2d}} < f(\delta, d)$$

où $\delta \in]0;2]$ et $f(\delta,d) = \left(\dfrac{\delta(1+\delta)}{0,00136}\right)^{\frac{1}{(3-\delta)d}} \left(2^{3-\delta}\pi^{4-\delta}\Gamma(1+\delta)\zeta(1+\delta)^2 e^{-0,57}\right)^{\frac{1}{3-\delta}}$.

Deuxième intervention de la théorie des nombres : minoration du discriminant en fonction du degré du corps de nombres. Dans la section 6 de leur article, G. Prasad et S.K. Yeung utilisent les travaux d'A. Odlyzko pour minorer $D_k^{\frac{1}{d}}$ en fonction de d [42]. Si l'on note $M_r(d)$ (resp. $M_c(d)$) le minimum des $D_F^{\frac{1}{d}}$ lorsque F parcourt l'ensemble des corps de nombres totalement réels (resp. totalement imaginaires) de degré d, on peut trouver [50, 6.3] une fonction explicite $\mathfrak{N}(d)$ de d, croissante, telle que

$$M_r(d) \geqslant \mathfrak{N}(d) \text{ pour tout } d > 1$$

qui améliore notablement l'inégalité de Minkowski : $M_r(d) \geqslant (\frac{d^d}{d!})^{\frac{2}{d}}$. En outre, une minoration de $M_c(d)$ est également obtenue grâce aux tables disponibles sur la page personnelle d'A. Odlyzko [43].

Troisième intervention de la théorie des nombres : majoration du degré du corps de base. C'est bien entendu ce qui est en vue, compte tenu des deux premières étapes. Bien que ce soit la première chose à faire, l'argument complet de [50, §7] n'est pas une simple combinaison de celles-ci. Mais commençons par cela : d'une part on évalue $f(\delta, d)$ en $\delta = 0,9$ et $d = 20$, ce qui donne ${D_k}^{\frac{1}{d}} < 16,38$; d'autre part, par calcul direct impliquant l'expression explicite de $\mathfrak{N}$, on a : $M_r(d) \geqslant \mathfrak{N}(20) > 16,4$. Cela permet déjà de voir que le corps de base k du groupe algébrique $\mathbf{G}$ satisfait $d = [k : \mathbf{Q}] < 20$. Les valeurs de d entre 15 et 20 sont exclues à nouveau au moyen des tables de [43]. Enfin, un argument astucieux de corps de classes de Hilbert, distinguant deux cas suivant la valeur de h_ℓ, permet d'obtenir : $d \leqslant 7$ [50, 7.2]. De manière générale, pour les raisonnements avancés, le nombre de classes est l'invariant immédiatement utilisé après le discriminant ; c'est notamment ce qui permet de conclure, au terme de la section 7 de [loc. cit.] que $d \leqslant 5$.

Remarque 3.3. — En supposant que le corps de base est $\mathbf{Q}$ – ce qui est *a posteriori* la majorité des cas – des arguments similaires prouvent dans un premier temps qu'une borne sur le discriminant D_ℓ est 461. Ensuite, par examen de tables numériques, G. Prasad et S.K. Yeung prouvent que le corps quadratique ℓ doit être de la forme $\mathbf{Q}(\sqrt{-a})$ avec $a \in \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 11; 15; 19; 23; 31\}$. Au moyen de l'équation fonctionnelle $L_{\ell/\mathbf{Q}}(3) = -2\pi^3 {D_\ell}^{-\frac{5}{2}} L_{\ell/\mathbf{Q}}(-2)$ et de certaines tables numériques pour les fonctions $L_{\ell/\mathbf{Q}}$, certains covolumes peuvent être calculés explicitement [50, 3.6].

Maintenant que la nature des principaux arguments arithmétiques a été évoquée, voici pour aider le lecteur intéressé à lire [50], un résumé de la progression ultérieure dans les contraintes sur le corps de base k et son extension quadratique imaginaire ℓ.

1. Au terme du §7 dans [loc. cit.], on sait que le corps de base k de la forme $\mathbf{G}$ est totalement réel et de degré $\leqslant 5$.
2. Dans la première partie du §8, les possibilités pour les couples (k, ℓ) avec $[k : \mathbf{Q}] > 1$ sont restreintes à une liste de 40 couples $\mathscr{C}_i$.
3. Dans la seconde partie du §8, des arguments de théorie des groupes sont utilisés pour prouver que si $\mathbf{G}$ est une forme de seconde (resp. de première) espèce de SL_3 (3.1), le nombre de couples $\mathscr{C}_i$ possibles est réduit à 6 (resp. 5).
4. Les §§3 à 5 traitent du cas $k = \mathbf{Q}$: toutes les possibilités de constructions sont classées ; les $\mathbf{Q}$-formes de première espèce de SL_3 y sont notamment exclues.
5. Dans le §9, les constructions où $[k : \mathbf{Q}] > 1$ et $\mathbf{G}$ est une k-forme de seconde espèce sont classées.

Remarque 3.4. — L'étape 2 est menée à son terme grâce à des calculs sur ordinateur de valeurs de fonctions ζ_k et L aux entiers négatifs. Ces calculs sont contrôlés par des résultats théoriques de C.L. Siegel. Une contribution importante pour cette partie du travail est due à G. Malle.

3.4. Les classes de faux plans projectifs

Rappelons qu'en 3.1 nous avons commencé à raisonner par condition nécessaire, c'est-à-dire que nous sommes partis d'un faux plan projectif X, et que nous avons défini un sous-groupe arithmétique principal $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$ tel que le normalisateur $\Gamma = N_{\mathbf{G}(k_{v_0})}(\Lambda)$ contienne l'image réciproque $\widetilde{\Pi}$ par $\mathrm{SU}(2,1) \to \mathrm{PU}(2,1)$ du groupe fondamental Π. Nous avons alors abouti à la condition : $\chi(\Gamma) \leqslant 1$.

On s'intéresse désormais aux k-formes anisotropes $\mathbf{G}$ de SL_3 et aux familles cohérentes de sous-groupes parahoriques $(P_v)_{v \in V_f}$ telles que le sous-groupe arithmétique principal $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$ soit de covolume assez petit pour que $\chi(\Gamma) \leqslant 1$. Grâce au §3 (pour $k = \mathbf{Q}$) et à la première moitié du §8 (pour $[k : \mathbf{Q}] > 1$) de [50], on est déjà ramené à un nombre fini de couples (k, ℓ) qui rendent ceci possible. Il s'agit ensuite de restreindre les possibilités de groupes algébriques $\mathbf{G}$. En faisant une liste de tous les volumes possibles de sous-groupes parahoriques [50, 2.5], on constate que le facteur local du produit eulérien $\mathscr{E}$ en une place v où $\mathbf{G}$ est anisotrope sur k_v est assez gros pour réduire considérablement les possibilités de telles places. En fait, pour les k-formes de seconde espèce, i.e., provenant d'algèbres à involution $\mathscr{D}$ de dimension 3 sur k et de centre ℓ, on aboutit aux contraintes suivantes [50, 4.4 et 8.6] :

Si $\mathbf{G}$ est un groupe provenant d'une algèbre cubique $\mathscr{D}$ comme ci-dessus, alors $\mathbf{G}$ est anisotrope (i.e., $\mathscr{D}$ est ramifiée) en exactement une place $v \in V_f$; en outre v divise un petit nombre premier.

Supposons maintenant donnée une k-forme $\mathbf{G}$ admissible du point de vue des critères d'anisotropie ci-dessus et introduisons $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$ le quotient adjoint de $\mathbf{G}$. Pour tout sous-groupe $H \subset \mathbf{G}$, nous notons $\overline{H}$ son image dans $\mathbf{G}_{\mathrm{ad}}$. Pour finir, il s'agit de déterminer les familles $(P_v)_{v \in V_f}$ pour lesquelles, dans le groupe Γ défini comme ci-dessus à partir de $(P_v)_{v \in V_f}$, il existe Δ tel que :

1. le groupe $\overline{\Delta}$ soit sans torsion ;
2. la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\overline{\Delta})$ soit égale à 3 ;
3. on ait $b_1(\overline{\Delta}) = 0$ (et donc $b_3(\overline{\Delta}) = 0$ par dualité de Poincaré).

La condition 1 est nécessaire pour que $\overline{\Delta}$ soit groupe fondamental d'une variété à courbure $\leqslant 0$ [15, 3.2]. Pour la condition 2, on calcule $\chi(\Gamma) = \frac{\chi(\Lambda)}{[\Gamma:\Lambda]}$ grâce à la formule du covolume pour Λ ; on en tire $\chi(\overline{\Gamma})$, et l'on voit que cette condition revient à prescrire l'indice du groupe $\overline{\Delta}$ dans $\overline{\Gamma}$: on doit avoir $[\overline{\Gamma} : \overline{\Delta}] = \frac{3}{\chi(\overline{\Gamma})}$. La condition 3 se reformule en requérant que l'abélianisé $\overline{\Delta}/[\overline{\Delta}, \overline{\Delta}]$ soit fini. Pour ce dernier point, G. Prasad et S.K. Yeung se ramènent, dans le cas des sous-groupes de congruence, à un théorème d'annulation de J. Rogawski [55, 15.3.1]. Finalement, si un groupe $\overline{\Delta}$ comme ci-dessus satisfait 1 à 3, alors la surface complexe $\overline{\Delta} \setminus \mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$ est un faux plan projectif.

Le paragraphe précédent explique donc la stratégie générale de [50, 1.5] pour décider si un groupe Γ, défini par une famille cohérente $(P_v)_{v \in V_f}$, permet ou non de construire des faux plans projectifs. Les sous-groupes arithmétiques maximaux tels que $\overline{\Gamma}$ ont en général une présentation raisonnable (qui permet notamment de travailler avec un domaine fondamental dans $\mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$). On dresse ensuite la liste de tous les sous-groupes d'indice $\frac{3}{\chi(\overline{\Gamma})}$ dans $\overline{\Gamma}$ et on détermine lesquels sont sans torsion et d'abélianisé fini. C'est ce principe général qui a guidé D. Cartwright et T. Steger pour éliminer certaines familles potentielles de faux plans projectifs [18]. Certains arguments font un usage très contrôlé de l'ordinateur.

À ce stade, on peut donc préciser l'étape 3 de 3.3 : il s'agit d'arguments de torsion ou de calcul de commutateurs. Par exemple, la présence d'éléments d'ordre fini élimine certains couples (k, ℓ). La torsion dans des groupes tels que $\Lambda = \mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$ se contrôle au moyen des deux groupes intersectés : on peut chercher à la comprendre dans les points rationnels $\mathbf{G}(k)$ (voir par exemple [50, 5.6 et 9.2]) ou on peut la comprendre dans les sous-groupes parahoriques.

Voici enfin le résultat qui résume la situation actuelle en matière de construction de faux plans projectifs. Cet énoncé tient compte des modifications apportées par un addendum [51] qui rectifie la classification pour $k = \mathbf{Q}$, suite à une omission relevée par T. Steger dans [50].

THÉORÈME 3.5. — *Il existe exactement* 22 *quadruplets* $(k, \ell, \mathbf{G}, (P_v)_{v \in V_f})$ *tels que :*

(i) *k soit un corps de nombres totalement réel ;*

(ii) *ℓ soit une extension quadratique imaginaire de k ;*

(iii) *il existe $\mathscr{D}$ une k-algèbre cubique à involution, notée σ, de centre ℓ et de norme réduite* Nrd *qui décrit* $\mathbf{G}$ *par* $\mathbf{G}(k) = \{z \in \mathscr{D}^\times : z\sigma(z) = 1 \text{ et } \mathrm{Nrd}(z) = 1\}$ *;*

(iv) *il existe une place archimédienne v_0 telle que l'on ait* $\mathbf{G}(k_{v_0}) \simeq \mathrm{SU}(2,1)$ *et* $\mathbf{G}(k_{v_0}) \simeq \mathrm{SU}(3)$ *pour toute* $v \in V_\infty \setminus \{v_0\}$ *;*

(v) *notant Λ le groupe arithmétique principal* $\mathbf{G}(k) \cap \prod_{v \in V_f} P_v$*, l'image du normalisateur* $N_{\mathbf{G}(k_{v_0})}(\Lambda)$ *dans* $\mathrm{PU}(2,1)$ *contienne des sous-groupes d'indice fini* Π *tels que* $\Pi \setminus \mathbb{B}^2_{\mathbf{C}}$ *soit un faux plan projectif.*

Pour seize quadruplets, on a $k = \mathbf{Q}$ et pour les cinq autres k est quadratique. En outre, la seule possibilité éventuelle de construire un autre groupe fondamental de faux plan projectif est l'analogue de la construction ci-dessus, mais où $\mathbf{G}$ *est une forme de première espèce de* SL_3 *; il ne reste plus que deux couples (k, ℓ) envisageables à ce jour.*

Cette classification dit que deux groupes fondamentaux obtenus à partir de quadruplets $(k, \ell, \mathbf{G}, (P_v)_{v \in V_f})$ distincts donnent des faux plans projectifs non isomorphes ; cependant, pour un même quadruplet, c'est-à-dire pour un même groupe $\overline{\Gamma}$, plusieurs sous-groupes peuvent satisfaire les conditions 1 à 3 ci-dessus. Dans ce cas, les faux plans projectifs correspondants sont isomorphes si et seulement si les groupes sont conjugués par $\overline{\Gamma}$.

Remarque 3.6. — En ce qui concerne les faux plans projectifs construits à partir de formes de première espèce de SL_3, il reste à exclure $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{11}$ dans la nomenclature de [50]. Ceci revient à démontrer la dernière assertion de la conjecture de Rogawski (conjecture 2.8) dans le cas où la surface complexe est un faux plan projectif. Les trois autres classes évoquées dans l'étape 3 ci-dessus et non éliminées par [50], à savoir $\mathscr{C}_8$, $\mathscr{C}_{18}$ et $\mathscr{C}_{21}$, ont été exclues entre temps par D. Cartwright et T. Steger [18].

Finissons en mentionnant des conséquences géométriques très intéressantes, qu'il n'avait pas été possible de prouver avant les constructions et classification de l'article de G. Prasad et S.K. Yeung [50] – tous les exemples précédents étaient en effet obtenus par uniformisation non archimédienne (3.5). Soit X un faux plan projectif.

(i) On a $\mathrm{H}_1(X, \mathbf{Z}) \neq 0$ [50, Theorem 10.1] ; il est d'ailleurs envisageable de calculer ces groupes et donc remplir une case vierge du tableau présentant quelques surfaces de type général dans [3, Table 14, pp. 304-305].

(ii) Pour 18 classes de faux plans projectifs sur 22, on sait qu'il existe un fibré en droites L tel que $\mathrm{K}_X = 3L$. Cette assertion est équivalente au fait que la suite exacte $0 \to \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \widetilde{\Pi} \to \Pi \to 1$ est scindée, et ceci implique que X admet un plongement comme surface de degré 49 dans $\mathbb{P}^{14}(\mathbf{C})$ [50, Theorem 10.5].

(iii) Le groupe des automorphismes de X est d'ordre 1, 3, 7, 9 ou 21.

Remarque 3.7. — Grâce aux résultats déjà évoqués sur les réseaux, la finitude du groupe des isométries d'une variété localement symétrique est facile à démontrer. Soit X une telle variété, de groupe fondamental Γ et de revêtement universel $\widetilde{X}$; notons $G = \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$. Par rigidité de Mostow (théorème 2.5), on a $\mathrm{Isom}(X) = N_G(\Gamma)/\Gamma$; il suffit donc de voir que $N_G(\Gamma)$ est discret dans G, car comme il contient Γ ce sera un réseau de G et on aura $[N_G(\Gamma) : \Gamma] < \infty$. Le groupe Γ admet un système générateur fini, disons S (2.2). Soit $\{n_j\}_{j \geqslant 1}$ une suite dans $N_G(\Gamma)$ qui converge vers l'élément neutre. Comme $n_j.s.n_j{}^{-1}$ est dans Γ (discret) pour tout $j \geqslant 1$ et tout s dans S (fini), l'élément n_j centralise S et donc Γ pour j assez grand. Le groupe G est un groupe algébrique réel à centre trivial, donc par densité de Γ pour la topologie de Zariski dans G (théorème de densité de Borel, voir 2.3) l'élément n_j est trivial pour j assez grand.

3.5. Des exemples de faux plans projectifs

Le premier exemple de faux plan projectif est dû à D. Mumford [41]. L'idée est assez indirecte ; elle consiste :

1. à interpréter les contraintes sur les nombres de Betti en termes d'invariants de géométrie algébrique ;
2. à construire une variété projective avec les bons invariants algébriques sur un corps local non archimédien F de caractéristique 0 ;
3. à prendre les points complexes de cette variété.

Bien entendu, l'étape 3 n'a rien de canonique puisqu'il faut passer de F à $\mathbf{C}$, et c'est l'étape 2 qui est la plus difficile. D'après l'étape 1, on cherche une surface Σ sur un corps local non archimédien F de caractéristique 0 (sur lequel on a une certaine liberté de choix dans un premier temps), de fibré canonique K_X ample satisfaisant

$(\mathrm{K}_X^2) = 9$, et dont le *genre géométrique* $p_g(X) = \dim \mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X) = \dim \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(\mathrm{K}_X))$ et l'*irrégularité* $q(X) = \dim \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) = \dim \mathrm{H}^0(X, \Omega_X^1)$ soient tous deux nuls.

On dit que D. Mumford a construit le premier faux plan projectif par *uniformisation non archimédienne* car il ramène le problème à chercher une variété projective comme quotient de l'espace symétrique non archimédien Ω_F^3 par un sous-groupe discret, cocompact et sans torsion Δ de $\mathrm{PGL}_3(F)$. L'espace Ω_F^3 est une variété rigide analytique qui peut être obtenue par un recollement dont la combinatoire est décrite par l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_3(F)$, un immeuble dont les appartements sont des plans pavés par des triangles équilatéraux (1.1). Partons d'un réseau cocompact sans torsion $\Delta \subset \mathrm{PGL}_3(F)$. Par des arguments de géométrie algébrique sur des anneaux locaux, D. Mumford vérifie la nullité de l'irrégularité de $\Delta \setminus \Omega_F^3$ et calcule les classes de Chern en fonction du cardinal q du corps résiduel de F et du nombre N de Δ-orbites de sommets dans l'immeuble de $\mathrm{PGL}_3(F)$. Le résultat est qu'une surface $\Delta \setminus \Omega_F^3$ donne une surface complexe avec les nombres de Betti suivants : $b_0 = b_4 = 0$, $b_1 = b_3 = 1$ et $b_2 = N(q-1)^2(q+1) - 2$. On en déduit que la seule possibilité pour que cette méthode donne lieu à un faux plan projectif est que F soit égal à $\mathbf{Q}_2$ et que le réseau Δ agisse transitivement (et librement puisqu'il est sans torsion et que Δ est à courbure $\leqslant 0$) sur l'immeuble. Mais réciproquement, tout réseau de la sorte convient.

D. Mumford construit alors un réseau qui remplit les conditions ci-dessus. Il le fait en partant d'une forme hermitienne à 3 variables sur un corps quadratique imaginaire contenu dans l'extension cyclotomique des racines 7-ièmes de l'unité. Dans ce passage, on voit fonctionner de la théorie des réseaux de façon complètement « quantitative » : le groupe arithmétique est explicitement décrit comme le stabilisateur d'un réseau de l'espace vectoriel sous-jacent à la forme hermitienne, on dispose de 4 matrices formant un système générateur explicite et le sous-groupe sans torsion est parfaitement compris comme noyau d'une réduction non moins explicite. Dans la classification de [50], le faux plan projectif de D. Mumford est un de ceux obtenus à partir d'une algèbre à involution cubique $\mathscr{D}$ sur $\mathbf{Q}$, de centre $\ell = \mathbf{Q}(\sqrt{-7})$ et pour laquelle la seule place $v \in V_f$ de ramification est 2 [50, 5.11].

Remarque 3.8. — Par la suite, l'approche non archimédienne ci-desssus a été réutilisée par M.-N. Ishida et F. Kato [31] pour construire d'autres faux plans projectifs. En effet, d'autres résaux cocompacts d'immeubles de GL_n, simplement transitifs sur les sommets, avaient été construits entre temps par D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger et A. Zappa [19].

Finissons en remarquant que cette construction par uniformisation est bien troublante au premier abord. En effet, il est amusant de voir que D. Mumford utilise le critère de Godement (1.5) pour justifier la cocompacité de son réseau en vérifiant la compacité du groupe algébrique ambiant en une place archimédienne : ce qui l'intéresse est de construire un réseau non archimédien. Cette interversion du rôle habituel des places archimédiennes et non archimédiennes est devenue courante (notamment pour construire des graphes finis comme quotients d'arbres par des résaux de PGL_2 [36]) mais dans ce cas précis, on sait que D. Mumford passera de F à $\mathbf{C}$ pour construire une surface algébrique complexe ! D'ailleurs ce changement de corps a pour autre conséquence qu'il ne reste *a priori* rien du groupe Δ dans le groupe fondamental du faux plan projectif X obtenu : le groupe Δ possède la propriété (T) de Kazhdan (donc est d'abélianisé fini [72, 7.1.11], ce qui au passage sert à prouver la nullité de l'irrégularité de X), alors que ce n'est pas le cas de $\pi_1(X)$ (qui est un réseau de rang 1 complexe).

4. D'AUTRES COMPTAGES NON MOINS INTÉRESSANTS

Nous finissons par le passage en revue d'autres comptages et finitudes. Les deux premiers paragraphes portent sur les groupes algébriques et leurs sous-groupes arithmétiques, les deux suivants sur des comptages asymptotiques de variétés localement symétriques suivant leur volume riemannien. Le dernier paragraphe évoque une généralisation en cours de la description de tous les faux plans projectifs à celle de certaines « fausses grassmanniennes arithmétiques ».

4.1. Nombres de classes de groupes algébriques

Considérons un groupe $\mathbf{G}$ comme dans la formule du covolume (1.2) et supposons en outre que ce groupe est anisotrope sur son corps de base k. En fait, si k est un corps de nombres nous faisons une hypothèse plus forte, en supposant que le groupe $G_\infty = \prod_{v\in V_\infty} \mathbf{G}(k_v)$ est compact ; ceci implique que k est totalement réel. Nous choisissons en outre une famille cohérente $P = (P_v)_{v\in V_f}$ de sous-groupes parahoriques. Le sous-groupe $G_\infty \cdot \prod_{v\in V_f} P_v$ est compact et ouvert dans $\mathbf{G}(\mathbf{A}_k)$. Nous nous intéressons à l'ensemble de doubles classes

$$(G_\infty \cdot \textstyle\prod_{v\in V_f} P_v) \setminus \mathbf{G}(\mathbf{A}_k) \,/\, \mathbf{G}(k).$$

Le cardinal de cet ensemble est fini (voir [5] pour la caractéristique 0 et [29] pour la caractéristique $p > 0$) ; il est appelé le *nombre de classes* de $\mathbf{G}$ par rapport à la famille P et noté $\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P)$.

Remarque 4.1. — La définition a un sens également dans le cas du groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$ sur un corps de nombres. Bien que ce cas ne soit pas couvert par le théorème ci-dessous, le nombre entier ainsi défini n'est autre que le nombre de classes d'idéaux du corps en question (pour le corps ℓ de 3.3, il apparaît sous la notation h_ℓ).

Si k est un corps de nombres, des arguments de groupes analytiques permettent de prouver que la borne supérieure des ordres des sous-groupes finis de $\mathbf{G}(k)$ est finie ; ce nombre entier est noté $\mathfrak{f}(\mathbf{G})$. Par des arguments très proches de ceux utilisés pour la formule du covolume, G. Prasad démontre les estimations suivantes [49, Theorem 4.3].

Théorème 4.2. — *Posons* $\zeta(P) = \prod_{v \in V_f} \frac{q_v^{\frac{1}{2}(\dim(\overline{\mathbf{M}}_v)+\dim(\overline{\mathscr{M}}_v))}}{\#\overline{\mathbf{M}}_v(\kappa_v)}$.

(i) *On a la minoration suivante pour le nombre de classes de* $\mathbf{G}$ *par rapport à* P :

$$\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) \geqslant D_k^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathscr{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} | \prod_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} |_v\right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \zeta(P).$$

(ii) *On a la majoration suivante pour le nombre de classes de* $\mathbf{G}$ *par rapport à* P :

$$\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) \leqslant \mathfrak{f}(\mathbf{G}) \cdot D_k^{\frac{1}{2}\dim(\mathbf{G})} \cdot \left(\frac{D_\ell}{D_k^{[\ell:k]}}\right)^{\frac{1}{2}\mathfrak{s}(\mathscr{G})} \cdot \left(\prod_{v \in V_\infty} | \prod_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(2\pi)^{m_i+1}} |_v\right) \cdot \tau_k(\mathbf{G}) \cdot \zeta(P).$$

Remarque 4.3. — L'approximation forte (Théorème 1.6) rend les questions précédentes sans intérêt si G_∞ est non compact, puisqu'alors $\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) = 1$.

Ces estimations ont été utilisées immédiatement après par A. Borel et G. Prasad pour démontrer le théorème de finitude suivant [8, Theorem B].

Théorème 4.4. — *Pour tout nombre entier* $n \in \mathbf{N}$, *il n'existe qu'un nombre fini de classes d'équivalence de corps de nombres* k, *de* k*-groupes absolument presque simples simplement connexes* $\mathbf{G}$ *et de familles cohérentes* P *de sous-groupes parahoriques tels que* G_∞ *soit compact et* $\mathfrak{c}(\mathbf{G}, P) \leqslant n$.

4.2. Conjecture de Tits

Dans une veine plus algébrique que le comptage de variétés, le théorème de finitude de Wang (2.2) peut suggérer des résultats de finitude beaucoup plus forts sur les groupes algébriques et arithmétiques. Ainsi J. Tits a posé la question de savoir si la finitude des classes de conjugaison de réseaux arithmétiques, de covolume majoré par une constante donnée, était encore valide si l'on considère en même temps tous les groupes algébriques définis sur tous les corps de nombres. Pour que la question ait un sens, il faut faire un choix cohérent pour toutes les mesures de Haar des groupes de Lie simples, archimédiens ou non. A. Borel et G. Prasad normalisent les mesures aux places non archimédiennes de sorte que les sous-groupes d'Iwahori soient tous de volume 1 dans le cas d'un k-groupe simplement connexe, et ramènent le cas général à ce cas au moyen d'isogénies centrales. Pour cette normalisation universelle de mesures, ils répondent par l'affirmative à la question de J. Tits [8, Theorem A].

Théorème 4.5 (A. Borel et G. Prasad). — *Soit* $C > 0$ *un nombre réel positif. Il n'existe qu'un nombre fini de corps de nombres* k, *de classes de* k*-isomorphismes de* k*-groupes absolument presque simples* $\mathbf{G}$ *et de rang absolu au moins* 2, *d'ensembles finis* S *de places contenant les places archimédiennes de* k *et de classes de conjugaison de groupes arithmétiques* Γ *dans* $G_S = \prod_{v \in S} \mathbf{G}(k_v)$, *tels que le covolume de* Γ *dans* G_S *soit majoré par* C.

Le complément [9] au papier ci-dessus illustre notamment le fait que les corps de fonctions soulèvent des problèmes supplémentaires.

Remarque 4.6. — Le point de départ de la question de J. Tits est un résultat géométrique très joli : la description de toutes les actions discrètes de groupes sur des immeubles affines, qui sont transitives sur les chambres [33]. Imposer une taille de domaine fondamental dans un immeuble de Bruhat-Tits est un analogue géométrique du fait d'imposer une majoration de covolume.

4.3. Comptage de variétés hyperboliques suivant leur volume

Si l'on revient aux problèmes de comptages géométriques (2.2), on imagine que les idées combinant la finitude de Wang et la rigidité de Mostow devraient permettre de couvrir des situations différentes de celle de certaines classes de surfaces complexes. Dans [17], il est question des variétés hyperboliques réelles de dimension $\geqslant 4$.

Théorème 4.7 (M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky et Sh. Mozes)
Pour tout nombre entier $n \geqslant 4$ et tout nombre réel $V > 0$, notons $\rho_{\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}}(V)$ le nombre de classes d'isométrie de variétés hyperboliques complètes de dimension n et de volume $\leqslant V$. Alors il existe des constantes $a_n, b_n > 0$ telles que pour V assez grand on ait :

$$a_n V \log(V) \leqslant \log\left(\rho_{\mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}}(V)\right) \leqslant b_n V \log(V).$$

Remarque 4.8 (en rapport avec la remarque 2.4). — La dimension 3 est exclue dans cet énoncé ; l'ensemble des volumes de 3-variétés hyperboliques a des points d'accumulation. Ce phénomène d'accumulation est compris grâce à une construction géométrique due à Jørgensen-Thurston [64, §5].

Nous repoussons au prochain paragraphe la discussion de quelques idées pour la majoration de cet encadrement. La minoration est obtenue par un usage astucieux des variétés hyperboliques réelles non arithmétiques de Gromov-Piatetski Shapiro (2.3). Ces variétés possèdent beaucoup de revêtements en vertu du raisonnement suivant.

Preuve (esquisse, pour la minoration) — On part d'un sous-groupe non arithmétique $\widetilde{\Delta}$ de $\mathrm{PO}(n,1)$ construit par Gromov-Piatetski Shapiro. Guidé par une conjecture géométrique de Thurston sur le premier nombre de Betti des variétés hyperboliques, A. Lubotzky a prouvé que pour cette classe spécifique de groupes, il existe un sous-groupe Δ d'indice fini sans torsion dans $\widetilde{\Delta}$ qui admet un homomorphisme surjectif sur le groupe libre $\mathbb{F}_2$ à deux générateurs. On note $M = \Delta \setminus \mathbb{H}^n_{\mathbf{R}}$ la variété hyperbolique de dimension n définie par Δ. D'après G. Margulis [72, 6.2], un réseau Λ dans un groupe de Lie simple G est arithmétique si, et seulement si, son commensurateur $\mathrm{Comm}_G(\Lambda) = \{g \in G : \Lambda \cap g\Lambda g^{-1}$ est d'indice fini dans Λ et $g\Lambda g^{-1}\}$ est dense dans G ; si tel n'est pas le cas, comme dans notre situation, alors $\mathrm{Comm}_G(\Lambda)$ est un réseau de G. Notons donc m le nombre entier $[\mathrm{Comm}_{\mathrm{PO}(n,1)}(\Delta) : \Delta]$. Chaque sous-groupe d'indice $\leqslant r$ de $\mathbb{F}_2$ (il y en a au moins $r.r!$) donne lieu à un revêtement à au plus r feuillets de M ; il suffit donc de contrôler les isométries entre ces revêtements. Par rigidité de Mostow (Théorème 2.5), si un revêtement à au plus r feuillets de M est isométrique à un autre tel revêtement, les groupes fondamentaux correspondants sont conjugués dans $\mathrm{PO}(n,1)$ et un élément qui les conjugue est dans $\mathrm{Comm}_{\mathrm{PO}(n,1)}(\Delta)$. Cela prouve qu'il y a au plus $r.m$ identifications possibles entre revêtements à au plus r feuillets de M, et donc au moins $\frac{r!}{m}$ classes d'isométrie de variétés hyperboliques de dimension n et de volume $\leqslant \mathrm{Vol}(M) \cdot r$. $\square$

4.4. Comptage de variétés à revêtement universel symétrique fixé

Nous considérons maintenant des généralisations en rang supérieur, dues à T. Gelander, du comptage précédent. La ligne directrice de ses travaux est la conjecture suivante [23, Conjecture 1.3] :

Conjecture 4.9 (T. Gelander). — *Soit $\widetilde{X}$ un espace symétrique riemannien sans facteur compact ni euclidien. Alors, il existe des constantes $a_{\tilde{X}}$ et $d_{\tilde{X}}$ telles que toute variété riemannienne irréductible, revêtue par $\widetilde{X}$, et supposée arithmétique si* $\dim(\widetilde{X}) = 3$*, soit homotopiquement équivalente à un complexe simplicial avec au plus* $\mathrm{Vol}(X) \cdot a_{\tilde{X}}$ *sommets et en chaque sommet duquel la valence est $\leqslant d_{\tilde{X}}$.*

Cette conjecture couvre aussi bien des énoncés de théorie géométrique des groupes que de comptage de variétés localement symétriques. Voici tout d'abord une importante généralisation de la majoration du théorème 4.7, voir [23, Theorem 1.11].

Théorème 4.10. — *Soit $\widetilde{X}$ un espace symétrique riemannien sans facteur compact ni euclidien. On suppose en outre que $\widetilde{X}$ est de dimension $\geqslant 4$ et qu'il n'est isométrique ni à $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}} \times \mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$, ni à* $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$*. Pour tout nombre réel $V > 0$, on note $\rho_{\tilde{X}}(V)$ le nombre de classes d'isométrie de variétés riemanniennes complètes irréductibles localement isométriques à $\widetilde{X}$ et de volume $\leqslant V$. Alors il existe une constante $c_{\tilde{X}} > 0$ telle que pour tout $V > 0$ on ait :*

$$\log\left(\rho_{\tilde{X}}(V)\right) \leqslant c_{\tilde{X}} V \log(V).$$

Il n'est pas question de minoration dans cet énoncé ; en fait, T. Gelander pense que la majoration n'est pas du tout optimale en rang $\geqslant 2$.

Un outil important de la preuve est la décomposition en parties fine et épaisse d'une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle $\leqslant 0$. Soit X une telle variété. Le *rayon d'injectivité* $\mathrm{inj}_X(x)$ de X en x est le plus grand rayon pour lequel l'exponentielle riemannienne est injective sur la boule correspondante de l'espace tangent en x. Pour $\varepsilon > 0$, la partie *ε-épaisse* $X_{\geqslant\varepsilon}$ de X est $\{x \in X : \mathrm{inj}_X(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}$; la partie *ε-fine* est le complémentaire $X_{\leqslant\varepsilon}$ de l'intérieur de $X_{\geqslant\varepsilon}$. Par ailleurs, le lemme de Margulis [2, Theorem 8.3] dit que pour toute dimension $n \in \mathbf{N}$, il existe des constantes $\varepsilon_n > 0$ et $I_n \in \mathbf{N}$ telles que pour toute variété riemannienne $\widetilde{X}$ de dimension n, complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle normalisée entre -1 et 0, pour tout groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$ et tout $x \in X$, le groupe $\langle \gamma \in \Gamma : d(x, \gamma.x) \leqslant \varepsilon_n \rangle$ contient un sous-groupe nilpotent d'indice $\leqslant I_n$. La constante ε_n est très appropriée pour le découpage en parties fine et épaisse. Les arguments de T. Gelander précisent grandement l'idée selon laquelle la topologie d'une variété localement symétrique de volume fini est « contenue » dans sa partie ε_n-épaisse. En effet, il construit dans chaque variété X comme dans le théorème

4.10 une sous-variété à bord de $X_{\geqslant \varepsilon_n}$ admettant une triangulation dont le nombre de simplexes est majoré par $C_{\tilde{X}} \cdot \mathrm{Vol}(X)$. Les techniques sont différentes suivant que X est compacte ou non, et montrent que des problèmes d'arithmétique classiques (e.g. la conjecture de Lehmer et des questions apparentées) ont des implications importantes pour les questions géométriques qu'on vient de survoler.

Remarque 4.11. — En dimension 3, la partie épaisse ne capture pas toute la topologie de la variété, car le bord de la partie épaisse est constitué de tores que l'on doit ensuite « boucher » Êpar des tores solides pour obtenir toute la variété. Dans cette opération, des lacets non contractiles de la partie épaisse le deviennent dans la variété (le groupe fondamental d'un tore est $\mathbf{Z}^2$, celui d'un tore solide $\mathbf{Z}$). Par contre, en dimension plus grande le bord de la partie épaisse est constitué de produits d'un cercle et d'une sphère de dimension au moins 2 ; on ne change pas le groupe fondamental dans l'opération analogue.

Remarque 4.12. — Le lemme de Margulis implique également le résultat suivant : pour chaque dimension $n \geqslant 1$, il existe une constante $V(n) > 0$ telle que pour toute variété riemannienne X complète, à courbure sectionnelle normalisée entre -1 et 0, on ait $\mathrm{Vol}(X) \geqslant V(n)$. C'est une vaste généralisation du théorème de Kazhdan-Margulis sur les réseaux des groupes de Lie semi-simples (2.2).

Pour finir avec de la théorie des groupes, voici une version quantitative [23, Theorem 1.7] de la propriété de présentation finie des réseaux de groupes de Lie semi-simples (utilisée dans l'esquisse de la preuve du théorème 2.3).

THÉORÈME 4.13. — *Soit $\widetilde{X}$ un espace symétrique riemannien sans facteur compact ni euclidien. On suppose que $\widetilde{X}$ n'est isométrique ni à $\mathbb{H}^2_{\mathbf{R}} \times \mathbb{H}^2_{\mathbf{R}}$, ni à $\mathbb{H}^3_{\mathbf{R}}$, ni à* $\mathrm{SL}_3(\mathbf{R})/\mathrm{SO}(\mathbf{R})$. *Alors il existe une constante $\eta_{\tilde{X}} > 0$ telle que le groupe fondamental de toute variété riemannienne X complète, irréductible, couverte par $\widetilde{X}$ admette une présentation avec au plus $\eta_{\tilde{X}} \cdot \mathrm{Vol}(X)$ générateurs et au plus $\eta_{\tilde{X}} \cdot \mathrm{Vol}(X)$ relations, qu'on peut en outre toutes supposer de longueur $\leqslant 3$.*

4.5. Élaborations sur les faux plans projectifs

Finissons maintenant par les généralisations de la classification et de la construction des faux plans projectifs à certaines variétés complexes de dimension supérieure. Soit $\widetilde{X}$ un espace symétrique, irréductible, à courbure $\leqslant 0$ et soit X_u son dual compact. G. Prasad et S.K. Yeung appellent *faux X_u arithmétique* une variété $\Pi \setminus \widetilde{X}$ où Π est un réseau cocompact, sans torsion et arithmétique de $G = \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$, et ayant les mêmes nombres de Betti que X_u. On s'intéresse surtout au cas où X est hermitien. Cette définition prend en compte le fait que, dès le début de la généralisation se pose le problème de l'uniformisation des variétés avec les mêmes nombres de Betti que X_u. En général, rien n'assure avec cette seule hypothèse topologique que le revêtement universel soit un espace symétrique ; la définition suppose également que le groupe fondamental est un groupe arithmétique.

En fait, les motivations pour définir ces variétés relèvent autant de la géométrie complexe que de la théorie des formes automorphes. Choisissons un sous-groupe compact maximal K dans G et notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. La $(\mathfrak{g}, K)$-cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, K; \mathbf{C})$ [10] est isomorphe à $\mathrm{H}^*(X_u, \mathbf{C})$ et se plonge dans $\mathrm{H}^*(\Pi \backslash \widetilde{X}, \mathbf{C})$. Ainsi, un quotient $\Pi \backslash \widetilde{X}$ est un faux X_u arithmétique si et seulement si Π est un sous-groupe arithmétique de $G = \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$ et si l'homomorphisme $\mathrm{H}^*(\mathfrak{g}, K; \mathbf{C}) \to \mathrm{H}^*(\Pi \setminus \widetilde{X}, \mathbf{C})$ est surjectif.

Théorème 4.14 (G. Prasad et S.K. Yeung [52]). — *Les faux $\mathbb{P}^n(\mathbf{C})$ arithmétiques n'existent que pour $n = 2$ et $n = 4$. Le premier groupe d'homologie entière d'un faux $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$ arithmétique est toujours non nul, et il existe au moins 4 classes de telles variétés.*

Des résultats similaires concernant les fausses grassmanniennes arithmétiques et les faux produits de plans projectifs arithmétiques sont annoncés dans la même prépublication.

RÉFÉRENCES

[1] J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick et D. Toledo – *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*. Mathematical Surveys and Monographs, 44. American Mathematical Society, 1996.

[2] W. Ballmann, M. Gromov et V. Schroeder – *Manifolds of nonpositive curvature*. Progress in Mathematics, 61. Birkhäuser, 1985.

[3] W.P. Barth, K. Hulek, Ch. Peters et A. Van de Ven – *Compact complex surfaces*. Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 4. Springer, 2004.

[4] H. Behr – *Endliche Erzeugbarkeit arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern*. Invent. Math. 7 (1969) 1-32.

[5] A. Borel – *Some finiteness properties of adele groups over number fields*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 16 (1963) 5-30.

[6] A. Borel – *Commensurability classes and volumes of hyperbolic* 3*-manifolds*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 8 (1981) 1-33.

[7] A. Borel et Harish Chandra – *Arithmetic subgroups of algebraic groups*. Ann. of Math. 75 (1962) 485-535.

[8] A. Borel et G. Prasad – *Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 69 (1989) 119-171.

[9] A. Borel et G. Prasad – *Addendum to : « Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups »*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 71 (1990) 173-177.

[10] A. Borel et N. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*. Mathematical Surveys and Monographs, 67. American Mathematical Society, 2000.

[11] A.I. Borevich et I.R. Shafarevich – *Number theory*. Pure and Applied Mathematics 20, Academic Press, 1966.

[12] N. Bourbaki – *Intégration 7-8*. Springer, 2007.

[13] N. Bourbaki – *Groupes et algèbres de Lie 4-6*. Springer, 2007.

[14] M. Bridson et A. Hæfliger – *Metric spaces of non-positive curvature*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319. Springer, 1999.

[15] F. Bruhat et J. Tits – *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 41 (1972) 5-251.

[16] F. Bruhat et J. Tits – *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 60 (1984) 197-376.

[17] M. Burger, T. Gelander, A. Lubotzky et Sh. Mozes – *Counting hyperbolic manifolds*. Geom. Funct. Anal. 12 (2002) 1161-1173.

[18] D.I. Cartwright et T. Steger – En préparation.

[19] D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger et A. Zappa. *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type A_2, I et II*. Geom. Dedicata 47 (1993) 143-166 et 167-223.

[20] L. Clozel – *Nombres de Tamagawa des groupes semi-simples (d'après Kottwitz)*. Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89. Astérisque 177-178 (1989), Exp. No. 702, 61-82.

[21] K. Corlette – *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*. Ann. of Math. 135 (1992) 165-182.

[22] P. Deligne et G.D. Mostow – *Commensurabilities among lattices in* $\mathrm{PU}(1,n)$. Annals of Mathematics Studies 132, 1993.

[23] T. Gelander – *Homotopy type and volume of locally symmetric manifolds*. Duke Math. J. 124 (2004) 459-515.

[24] W.M. Goldman – *Complex hyperbolic geometry*. Oxford Mathematical Monographs, 1999.

[25] Ph. Griffiths et J. Harris – *Principles of algebraic geometry*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, 1978.

[26] Ph. Griffiths et W. Schmid – *Locally homogeneous complex manifolds*. Acta Math. 123 (1969) 253-302

[27] M. Gromov et I. Piatetski-Shapiro – *Non-arithmetic groups in Lobachevski spaces*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 66 (1988) 93-103.

[28] M. Gromov et R. Schoen – *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 76 (1992) 165-246.

[29] G. Harder – *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern*. Invent. Math. 7 (1969) 33-54.

[30] F. Hirzebruch – *Topological methods in algebraic geometry.* Classics in Mathematics. Springer, 1995.

[31] M.-N. Ishida et F. Kato – *The strong rigidity theorem for non-Archimedean uniformization.* Tohoku Math. J. 50 (1998) 537-555.

[32] J. Jost et K. Zuo – *Harmonic maps into Bruhat-Tits buildings and factorizations of p-adically unbounded representations of π_1 of algebraic varieties. I.* J. Algebraic Geom. 9 (2000) 1-42.

[33] W.M. Kantor, R.A. Liebler et J. Tits – *On discrete chamber-transitive automorphism groups of affine buildings.* Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1987) 129-133.

[34] B. Klingler – *Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l'arithméticité des réseaux hyperboliques complexes, et les « faux plans projectifs ».* Invent. Math. 153 (2003) 105-143.

[35] R.E. Kottwitz – *Tamagawa numbers.* Ann. of Math. 127 (1988) 629-646.

[36] A. Lubotzky – *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures.* With an appendix by Jonathan D. Rogawski. Progress in Mathematics, 125. Birkhäuser, 1994.

[37] G.A. Margulis – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 17. Springer, 1991.

[38] N. Mok, Y.-T. Siu et S.-K.-Yeung – *Geometric superrigidity.* Invent. Math. 113 (1993) 57-83.

[39] G.D. Mostow – *Strong rigidity of locally symmetric spaces.* Annals of Mathematics Studies 78, 1973.

[40] G.D. Mostow et T. Tamagawa – *On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces.* Ann. of Math. 76 (1962) 446-463.

[41] D. Mumford – *An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$.* Amer. J. Math. 101 (1979) 233-244.

[42] A.M. Odlyzko – *Some analytic estimates of class numbers and discriminants.* Invent. Math. 29 (1975) 275-286.

[43] A.M. Odlyzko – *Discriminant bounds.* Tables disponibles sur la page personnelle : http ://www.dtc.umn.edu/ odlyzko/unpublished/index.html

[44] J. Oesterlé – *Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p.* Invent. Math. 78 (1984) 13-88.

[45] P. Pansu – *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Astérisque 227 (1995), Exp. No. 778, 69-105.

[46] V. Platonov et A. Rapinchuk – *Algebraic groups and number theory.* Pure and Applied Mathematics, 139. Academic Press, 1994.

[47] G. Prasad – *Strong approximation for semi-simple groups over function fields.* Ann. of Math. 105 (1977) 553-572.

[48] G. Prasad – *Elementary proof of a theorem of Bruhat-Tits-Rousseau and of a theorem of Tits.* Bull. Soc. Math. France 110 (1982) 197-202.

[49] G. Prasad – *Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups*. With an appendix by M. Jarden and the author. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 69 (1989) 91-117.

[50] G. Prasad et S.K. Yeung – *Fake projective planes*. Invent. Math. 168 (2007) 321-370.

[51] G. Prasad et S.K. Yeung – *Addendum to Fake Projective Planes*, à paraître.

[52] G. Prasad et S.K. Yeung – *Arithmetic fake projective spaces and arithmetic fake grassmannians*. Prépublication de l'Institut Max Planck de Bonn.

[53] M.S. Raghunathan – *Discrete subgroups of Lie groups*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) 68. Springer, 1972.

[54] A. Reznikov – *Simpson's theory and superrigidity of complex hyperbolic lattices*. C. R. Acad. Sci. Paris 320 (1995) 1061-1064.

[55] J.D. Rogawski – *Automorphic representations of unitary groups in three variables*. Annals of Mathematics Studies 123, 1990.

[56] G. Rousseau – *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*. Thèse de doctorat d'État. Université Paris XI, Orsay, 1977.

[57] J.-J. Sansuc – *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*. J. Reine Angew. Math. 327 (1981) 12-80.

[58] J.-P. Serre – *Cohomologie des groupes discrets*. Prospects in mathematics. Ann. of Math. Studies 70 (1971) 77-169.

[59] C. Simpson – *Higgs bundles and local systems*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 75 (1992) 5-95.

[60] C. Simpson – *Lefschetz theorems for the integral leaves of a holomorphic one-form*. Compositio Math. 87 (1993) 99-113.

[61] I.Sh. Slavutskii – *On the Zimmert estimate for the regulator of an algebraic field*. Mat. Zametki 51 (1992) 153-155.

[62] T.A. Springer – *Linear algebraic groups*. Second edition. Progress in Mathematics 9, Birkhäuser, 1998.

[63] R. Steinberg – *Regular elements of semisimple algebraic groups*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 25 (1965) 49-80.

[64] W.P. Thurston – *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. disponible à : http ://www.msri.org/publications/books/gt3m.

[65] J. Tits – *Classification of algebraic semisimple groups*. In Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proc. Sympos. Pure Math. 9, Amer. Math. Soc., 1966.

[66] J. Tits – *Reductive groups over local fields*. In Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math. 33, Amer. Math. Soc., 1979.

[67] H.-C. Wang – *Topics on totally discontinuous groups*. Symmetric spaces. Pure and Appl. Math., Vol. 8, Dekker (1972) 459-487.

[68] A. Weil – *Adèles and algebraic groups*. With appendices by M. Demazure and Takashi Ono. Progress in Mathematics, 23. Birkhäuser, 1982.

[69] A. Weil – *Basic number theory*. Third edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 144. Springer, 1974.

[70] S.-T. Yau – *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*. Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) 339-411.

[71] S.K. Yeung – *Integrality and arithmeticity of co-compact lattice corresponding to certain complex two-ball quotients of Picard number one*. Asian J. Math. 8 (2004) 107-129.

[72] R.J. Zimmer – *Ergodic theory and semisimple groups*. Monographs in Mathematics 81, Birkhäuser 1984.

[73] R. Zimmert – *Ideale kleiner Norm in Idealklassen und eine Regulatorabschätzung*. Invent. Math. 62 (1981) 367-380.

Bertrand RÉMY

Université de Lyon
Université Lyon 1
CNRS UMR 5208 Institut Camille Jordan
Bâtiment du Doyen Jean Braconnier
43, blvd du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex – France
E-mail : `remy@math.univ-lyon1.fr`