

Existence et unicité pour le frottement élastodynamique avec perturbation par « inertie de surface »

Jean-Claude PAUMIER ^a, Yves RENARD ^b

^a Laboratoire LMC, UMR-CNRS 5523, B.P. 53X, 38041 Grenoble cedex, France
Courriel : Jean-Claude.Paumier@imag.fr

^b Laboratoire MIP, UMR-CNRS 5640, Insa de Toulouse, 31077 Toulouse cedex 4, France
Courriel : Yves.Renard@gmm.insa-tlse.fr

Résumé.

On présente un résultat d'existence et d'unicité pour un problème régularisé de contact unilatéral avec frottement en élastodynamique obtenu d'une part en régularisant de façon classique la loi de frottement et la condition de contact unilatéral et, d'autre part, en perturbant le système à l'aide d'un opérateur d'élasticité dynamique défini sur le bord de frottement. Un des intérêts de cette perturbation est de conserver le caractère local de la loi de frottement. C'est une étape dans l'analyse des multi-solutions qui apparaissent lorsque l'on utilise un coefficient de frottement décroissant en vitesse de glissement, et fait suite à des travaux dans le cas monodimensionnel. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Existence and uniqueness result for elastodynamic friction with a "surface inertia"

Abstract.

We present an existence and uniqueness result for a regularized problem of unilateral contact and friction in elastodynamic obtained with a perturbation of a dynamic elasticity operator defined on the contact boundary. This perturbation keep the local characteristic of the friction law. This is a step in the analysis of the multi-solutions appearing in this kind of problems when a decreasing friction coefficient is used. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction. – Le problème abordé est celui du contact unilatéral avec frottement d'un solide linéairement élastique, soumis à une condition de frottement de Coulomb avec un coefficient constant ou qui dépend de la vitesse de glissement. En effet, les données expérimentales (*voir* [5]) font fréquemment état d'un affaiblissement du coefficient de frottement lorsque la vitesse de glissement augmente. Ce type de dépendance amène des difficultés importantes lorsqu'on les applique à un modèle élastodynamique, notamment, une multiplicité des solutions avec apparition de chocs en vitesse de glissement. C'est ce qui a été remarqué dans le problème monodimensionnel d'une couche élastique infinie dans les études [2] et [3], où de plus un critère de choix de solution a été introduit. Ce critère, dit « de retard maximal » consiste à sélectionner la solution qui reste continue en vitesse de glissement le plus longtemps possible.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

Le résultat que nous présentons ici, est une étape dans la généralisation au cas multidimensionnel des résultats obtenus dans [7] et publiés dans [6]. Dans ces travaux, il a été montré que l'ajout d'une mince couche verticalement rigide (une simple masse de surface dans le cas monodimensionnel) permet de recouvrer l'unicité de la solution du problème dynamique. De plus, il a été montré (dans un cadre restreint) que la solution du problème perturbé converge vers une solution du problème initial lorsque l'épaisseur de la couche rigide tend vers zéro. Cette solution est en accord avec le principe du retard maximal.

1. Le problème élastodynamique de frottement

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec $n = 2$ ou 3 le domaine occupé par le corps élastique. Pour simplifier, on suppose l'ouvert cylindrique : $\Omega = \omega \times]0, D[$, où ω est un domaine de \mathbb{R}^{n-1} , de hauteur $D > 0$. On note $\Gamma_D = \omega \times \{D\}$ le bord des déplacements imposés, $\Gamma_N = \partial\omega \times]0, D[$ le bord des forces imposées et $\Gamma_C = \omega \times \{0\}$ le bord de frottement. Dans l'ouvert Ω l'équation de l'élastodynamique s'écrit : $\rho(x) \ddot{u}(t, x) - \text{div} \sigma(t, x) = f(t, x)$, $x \in \Omega$, $t \in]0, T[$, où $T > 0$ est fixé, $\rho(x)$ la densité (dans la suite $\rho(x) \equiv 1$), $f(t, x)$ les effort extérieurs volumiques, $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ le déplacement, $\ddot{u}(t, x)$ l'accélération, $\sigma(t, x)$ le tenseur des contraintes relié au tenseur linéarisé des déformations $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ par une loi de comportement linéarisée $\sigma(t, x) = A(x)\varepsilon(u)(t, x)$, avec $A(x)$ tenseur d'ordre quatre ayant les propriétés habituelles de symétrie et de coercivité uniforme. La conditions sur Γ_D est $u(t, x) = u_D(t, x)$ et sur Γ_N est $\sigma(t, x)n(x) = g(t, x)$, où $n(x)$ désigne la normale unitaire extérieure à Ω .

Sur Γ_C , le corps élastique est en contact unilatéral avec un support rigide plan, lui même en mouvement horizontal à la vitesse $\tau(t)$. On note, sur Γ_C , $u_N = u \cdot n$ le déplacement normal, $\sigma_N = (\sigma n) \cdot n$ la contrainte normale, $u_T = u - u_N n$ le déplacement tangentiel, $v_G = \dot{u}_T - \tau(t)$ la vitesse de glissement et $\sigma_T = \sigma n - \sigma_N n$ la contrainte tangentielle. Avec les fonctions multivoques $J_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $\text{Dir}_T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ définies par :

$$J_N(\xi) = \begin{cases} \{0\} & \text{pour } \xi < 0, \\ [0, +\infty[& \text{pour } \xi = 0, \\ \emptyset & \text{pour } \xi > 0, \end{cases} \quad \text{Dir}_T(u) = \begin{cases} \{u_T / \|u_T\|\} & \text{si } u_T \neq 0, \\ \{v \in \mathbb{R}^n; v_N = 0, \|v_T\| \leq 1\} & \text{si } u_T = 0, \end{cases}$$

les conditions de contact et de frottement s'écrivent pour $t \in [0, T]$ et $x \in \Gamma_C$ (voir [7]) : $\sigma_N(t, x) \in -J_N(u_N(t, x))$, $\sigma_T(t, x) \in \sigma_N(t, x) \mu(\|v_G(t, x)\|) \text{Dir}_T(v_G(t, x))$, où $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est le coefficient de frottement avec $\mu(v)$ borné, lipschitzien et $\mu(0) = \mu_s > 0$.

Régularisation des conditions de contact unilatéral et de frottement. – Pour mener à bien notre étude, nous utilisons une régularisation assez classique des conditions multivoques précédentes, à l'aide des fonctions $J_N^\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\text{Dir}_T^\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$J_N^\eta(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \xi < 0, \\ \xi/\eta & \text{pour } \xi > 0, \end{cases} \quad \text{Dir}_T^\eta(u) = \begin{cases} u_T / \|u_T\| & \text{si } \|u_T\| \geq \eta, \\ u_T / \eta & \text{si } \|u_T\| < \eta, \end{cases}$$

qui approchent les fonctions multivoques J_N et Dir_T respectivement. Les lois régularisées s'écrivent : $\sigma_N(t, x) = -J_N^\eta(u_N(t, x))$, $\sigma_T(t, x) = \sigma_N(t, x) \mu(\|v_G(t, x)\|) \text{Dir}_T^\eta(v_G(t, x))$.

Toutefois, dans le cas $n = 3$, une difficulté technique est écartée en modifiant sur $[1/\eta, +\infty[$ la fonction J_N^η décrite ci-dessus : $J_N^\eta(\xi) = 1/\eta^2$ pour $\xi \in [1/\eta, +\infty[$.

2. Le problème élastodynamique avec perturbation

En supposant pour le moment que la force de frottement $F(t, x)$ est donnée sur Γ_C , et en posant : $a(u, v) = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v) dx$, $b(t, v) = \int_\Omega f(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_N} g(t) \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_C} F(t) \cdot v d\Gamma$, où $\sigma(u) : \varepsilon(v) = \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v)$, le problème élastodynamique se pose en formulation faible dans les espaces $W_0 = H^1(\Omega)^n$, $V_0 = \{v \in W_0; v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ et $H_0 = L^2(\Omega)^n$, de la manière suivante :

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \dot{u}(0, x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

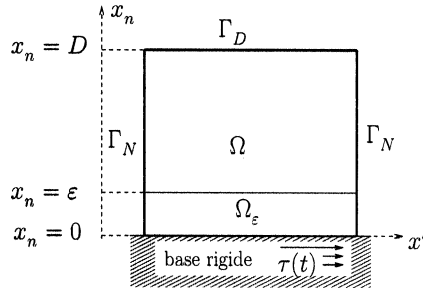

 Figure 1. – Perturbation sur une couche Ω_ε .

 Figure 1. – Perturbation on a layer Ω_ε .

$$t \in]0, T]: u(t) \in W_0 \quad \text{et} \quad u(t, x) = u_D(t, x), \quad x \in \Gamma_D, \quad (2)$$

$$t \in]0, T]: (\ddot{u}(t), v) + a(u(t), v) = b(t, v), \quad \forall v \in V_0, \quad (3)$$

où $u_0 \in W_0$ et $u_1 \in H_0$ sont les conditions initiales et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre V_0' et V_0 . Rappelons que l'existence et l'unicité d'une solution appartenant à l'espace $L^\infty(0, T; W_0) \cap W^{1, \infty}(0, T; H_0) \cap W^{2, \infty}(0, T; V_0')$ est démontrée dans Duvaut–Lions [1] sous des hypothèses suffisantes de régularité portant sur u_0, u_1, f, g, F et u_D . En particulier on a l'hypothèse suivante :

(H) F_i et $\tilde{F}_i \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$.

La perturbation proposée consiste à distinguer une couche $\Omega_\varepsilon = \omega \times]0, \varepsilon[\subset \Omega$ d'épaisseur $\varepsilon > 0$ arbitrairement petite et dont la face inférieure est le bord de frottement.

On note $x = (x', x_n)$. Fixons un entier $m \in \mathbb{N}$ et, pour $\ell = 0, 1$, définissons l'espace $P_{\ell, m}$:

$$p \in P_{\ell, m} \iff p(x) = \sum_{k=0}^m p_k(x') (x_n)^k, \quad \text{avec } p_0, p_1, \dots, p_m \in H^\ell(\omega).$$

Alors les espaces $W_\varepsilon = \{v \in W_0; v|_{\Omega_\varepsilon} \in (P_{1, m})^n\}$, $V_\varepsilon = \{v \in V_0; v|_{\Omega_\varepsilon} \in (P_{1, m})^n\}$, $H_\varepsilon = \{v \in H_0; v|_{\Omega_\varepsilon} \in (P_{0, m})^n\}$ sont des sous-espaces fermés respectifs de W_0, V_0 et H_0 . Le problème élastodynamique avec perturbation sera tout simplement le problème (1)–(3), mais posé dans ces espaces (avec des conditions initiales approchées u_0^ε et u_1^ε). L'intérêt de cette approche est que l'on peut affaiblir l'hypothèse (H) en l'hypothèse (voir paragraphe suivant) :

(H-bis) $F \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$.

3. Décomposition des solutions du problème avec perturbation

Pour résoudre le problème de frottement régularisé on va décomposer u^ε , la solution du problème perturbé, en la somme d'une fonction de référence u^ε solution du problème perturbé pour $F = 0$ et d'une fonction w^ε solution de ce problème pour $f = 0, g = 0, u_D = 0$ et $u_0^\varepsilon = u_1^\varepsilon = 0$. On note ainsi $w^\varepsilon = \mathcal{E}_\varepsilon(F)$ défini par :

$$w^\varepsilon(0, x) = 0, \quad \dot{w}^\varepsilon(0, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$t \in]0, T]: w^\varepsilon(t) \in V_\varepsilon, \quad (5)$$

$$t \in]0, T]: (\ddot{w}^\varepsilon(t), v) + a(w^\varepsilon(t), v) = \int_{\Gamma_C} F_i(t, x) v_i(x) d\sigma, \quad \forall v \in V_\varepsilon. \quad (6)$$

On peut énoncer le résultat suivant dont la démonstration suit celle du résultat de [1].

THÉORÈME 1. – *Supposons l'hypothèse (H-bis) satisfaite, alors le problème (4)–(6) admet une unique solution $w^\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon)$ vérifiant $\dot{w}^\varepsilon \in L^\infty(0, T; H_\varepsilon)$ et $\ddot{w}^\varepsilon \in L^\infty(0, T; V_\varepsilon')$.*

De plus, l'application $\mathcal{E}_\varepsilon : F \mapsto w^\varepsilon = \mathcal{E}_\varepsilon(F)$ est linéaire continue de l'espace $L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$ dans l'espace $L^\infty(0, T; V_\varepsilon) \cap W^{1,\infty}(0, T; H_\varepsilon)$ et on a l'estimation :

$$\|w^\varepsilon(t)\|_{1,\Omega}^2 + \|\dot{w}^\varepsilon(t)\|_{0,\Omega}^2 \leq C \frac{e^{\alpha t}}{\varepsilon} \int_0^t \|F(s)\|_{0,\Gamma_C}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

où $C > 0$ et $\alpha > 0$ sont des constantes indépendante de ε et T .

4. Résolution du problème de frottement régularisé et perturbé

On définit l'application \mathcal{F}_ε par $(F_T, F_N) = \mathcal{F}_\varepsilon(w_T, w_N)$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} F_N(t, x) &= -J_N^\eta(w_N(t, x) + \mathbf{u}_N^\varepsilon(t, x)), \\ F_T(t, x) &= -J_N^\eta(w_N(t, x) + \mathbf{u}_N^\varepsilon(t, x)) \mu_T^\eta(\dot{w}_T(t, x) + \dot{\mathbf{u}}_T^\varepsilon(t, x) - \tau(t)), \end{aligned}$$

où, pour alléger un peu l'écriture, on a noté $\mu_T^\eta(v) = \mu(\|v\|) \text{Dir}_T^\eta(v)$.

En posant $\mathcal{G}_\varepsilon = \mathcal{E}_\varepsilon \circ \mathcal{F}_\varepsilon$ et $E_\varepsilon = \{w \in W^{1,\infty}(0, T; H_\varepsilon) \cap L^\infty(0, T; V_\varepsilon); w(0) = 0 \text{ dans } H_\varepsilon\}$, le problème de frottement revient à la recherche d'un point fixe de \mathcal{G}_ε :

$$\text{trouver } w = (w_T, w_N) \in E_\varepsilon \quad \text{tel que } w = \mathcal{G}_\varepsilon(w). \tag{7}$$

Le principal résultat est le suivant :

THÉORÈME 2. – *Supposons que $\mathbf{u}_N^\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\Gamma_C))$ et $\dot{\mathbf{u}}_T^\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_C)^n)$, alors, pour chaque $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, le problème de frottement approché (7) admet une unique solution $w^\varepsilon \in E_\varepsilon$.*

La méthode de démonstration, développée dans [4], s'inspire de celle du théorème classique de Cauchy–Lipschitz. On montre que, pour un entier p assez grand, l'opérateur itéré par composition p fois : $\mathcal{G}_\varepsilon^p = \mathcal{G}_\varepsilon \circ \dots \circ \mathcal{G}_\varepsilon$, est contractant dans une certaine boule fermée $B_\varepsilon \subset E_\varepsilon$.

Conclusion. – Par rapport aux résultats de [7] dans le cas monodimensionnel, où une simple inertie de surface était considérée, nous proposons ici une généralisation au cas multidimensionnel qui fait intervenir en plus, quand $m = 0$ (voir la définition de W_ε), ce qu'on peut interpréter comme étant un opérateur d'élasticité de surface. Par analogie au cas monodimensionnel nous qualifions toujours cette perturbation d'« inertie de surface ». Au contraire d'autres approches, cette perturbation, conserve le caractère local de la loi de frottement, autorise l'apparition de discontinuités en vitesse et permet d'exprimer les lois de contact et de frottement sous forme classique. Dans le cas monodimensionnel, on peut se passer de la régularisation des lois de contact unilatéral et de frottement, bien que celles-ci ne jouent pas de rôle dans le caractère multiple des solutions. L'exercice semble plus difficile dans le cas multidimensionnel car on utilise le caractère lipschitzien des fonctions J_N^η et Dir_N^η dans l'argument de point fixe du théorème 2. On pourra voir plus de détails dans [4] et dans un article en cours de préparation.

Références bibliographiques

- [1] Duvaut G., Lions J.-L., Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
- [2] Ionescu I.R., Paumier J.-C., On the contact problem with slip rate dependent friction in elastodynamic, *Europ. J. Mech., A/Solids* 4 (1994) 555–568.
- [3] Leonov A.I., Srinivasan A., Self-oscillations of an elastic plate sliding over a smooth surface, *Int. J. Engng. Sci.* 31 (3) (1993) 453–473.
- [4] Paumier J.-C., Renard Y., Frottement élastodynamique avec inertie de surface, Rapport Imag RT 179, Université Joseph-Fourier, Grenoble, France, 1999.
- [5] Rabinowicz E., The intrinsic variables affecting the stick-slip process, *Proc. Roy. Phys. Soc.* 71 (1958) 668–675.
- [6] Renard Y., Singular perturbation approach to an elastic dry friction problem with a non-monotone friction coefficient, *Quart. Appl. Math.* LVIII (2) (2000) 303–324.
- [7] Renard Y., Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques, Thèse de doctorat, LMC-Imag Grenoble, 1998.