

Méthodes de lagrangien et de Nitsche pour l'approximation numérique des conditions de contact avec frottement

Franz Chouly

Patrick Hild

Yves Renard

10 février 2021

Résumé

L'objectif de ce chapitre est de faire une présentation détaillée de développements récents sur l'approximation des conditions de contact des solides déformables en petites et grandes déformations. Les principes de base des méthodes de lagrangien, lagrangien augmenté, lagrangien stabilisé, de pénalité et de Nitsche sont exposés. Les liens étroits existants entre la méthode de Nitsche, le lagrangien stabilisé et le lagrangien augmenté sont alors analysés.

Introduction

Les lagrangiens et lagrangiens augmentés sont des outils de l'optimisation sous contraintes qui ont naturellement été appliqués très tôt aux problèmes de contact de solides déformables (voir par exemple [72, 73]). Le lagrangien augmenté s'est depuis assez largement imposé dans l'approximation et la résolution des problèmes de contact en petites et grandes déformations suite principalement aux travaux dans [26, 3, 79]. La méthode de Nitsche [62], a été proposée à l'origine pour permettre de prendre en compte de manière faible une condition de bord de type Dirichlet, en évitant justement l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Ce n'est que récemment qu'elle a été étendue aux conditions de contact avec ou sans frottement [4, 16, 18, 22]. Le lien entre méthode de Nitsche et de lagrangien est cependant assez étroit et c'est l'objectif de ce chapitre d'en éclairer le lien, a la fois en revenant sur les mécanismes à la base de ces méthodes, et aussi en présentant quelques développements récents dans le cadre des petites et grandes déformations élastiques.

La section 1 présente tout d'abord le problème continu de contact avec frottement entre deux solides élastiques, dans le cadre des petites déformations. La section 2 est dédiée à l'approximation par éléments finis dans le cadre des petites déformations, où une analyse mathématique des méthodes numériques est possible. La section 3 présente finalement l'extension des méthodes décrites dans les sections précédentes au cas des grandes transformations élastiques, ainsi que des résultats numériques dans ce cadre.

Table des matières

1	Contact avec frottement de deux corps élastiques en petites déformations	2
1.1	Le contact de deux corps élastiques	2
1.2	La forme en inéquation faible classique	4
1.3	Le principe de dualité et la forme faible avec multiplicateurs	5
1.4	Le lagrangien augmenté proximal : principe et utilisation	6
2	Approximation par éléments finis en petites déformations	7
2.1	État de l'art, méthodes avec multiplicateurs	8
2.2	Absence de condition inf-sup et méthodes stabilisées	9
2.3	La méthode de Nitsche vue comme modèle limite des méthodes stabilisées	10
2.4	Lien entre Nitsche et lagrangien augmenté proximal	12
2.5	Lien entre Nitsche et pénalité	12

3	Approximation par éléments finis en grandes déformations	13
3.1	Sur l'appariement de contact et la fonction gap	14
3.2	Formulation des conditions de contact et de frottement	16
3.3	Lagrangien augmenté et pénalisation	17
3.3.1	Lagrangien augmenté et forme faible du problème de frottement	18
3.3.2	Forme faible simplifiée et non conservation de la symétrie	18
3.3.3	Approximation par éléments finis	19
3.3.4	Résolution numérique par l'algorithme d'Uzawa	20
3.3.5	Lien avec l'approximation par pénalisation	21
3.4	Méthode de Nitsche	21
3.4.1	Dérivation à partir d'un potentiel	21
3.4.2	Variante non biaisée	22
3.5	Sur la valeur du paramètre γ	23
3.6	Tests numériques	23
3.6.1	Demi-anneau élastique	24
3.6.2	Tubes creux croisés avec auto-contact	24

1 Contact avec frottement de deux corps élastiques en petites déformations

On décrit tout d'abord le problème de contact frottant entre deux solides élastiques en 1.1, puis en 1.2 ce problème est reformulé sous forme d'inéquation (quasi-)variationnelle. Ensuite, en 1.3, est introduite la forme faible avec multiplicateurs et en 1.4 la formulation par lagrangien augmenté proximal, ces reformulations étant à la base des approximations numériques présentées dans les sections suivantes 2 et 3.

1.1 Le contact de deux corps élastiques

On considère deux solides élastiques dont les configurations de référence respectives sont notées Ω^1 et Ω^2 correspondant à deux domaines de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) de bords réguliers (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), voir la figure 1. On distingue sur les frontières $\partial\Omega^1$ et $\partial\Omega^2$ de Ω^1 et Ω^2 : les bords Γ_D^1 et Γ_C^1 (d'intérieurs non vides) sur lesquels une condition d'encastrement s'applique, les bords Γ_N^1 et Γ_C^2 avec une densité de forces imposée et Γ_C^1 et Γ_C^2 qui sont les bords de contact potentiel respectivement esclave et maître. Ces bords sont supposés former une partition sans recouvrement des frontières $\partial\Omega^1$ et $\partial\Omega^2$.

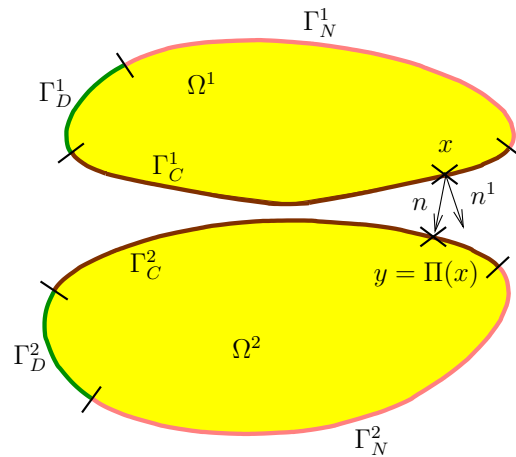


FIGURE 1: Deux corps avec leurs bords de contact potentiel respectifs.

Les deux corps élastiques sont soumis à des densités de forces (volumiques si $d = 3$) notées f^1 et f^2 et sur Γ_N^1 et Γ_N^2 aux densités de forces (surfiques si $d = 3$) notées ℓ^1 et ℓ^2 . On se focalise à présent sur l'écriture de la condition de contact avec frottement de Coulomb. Pour cela, on se place sur la surface esclave Γ_C^1 . Pour un point $x \in \Gamma_C^1$ on doit déterminer le point $y \in \Gamma_C^2$ qui entre potentiellement en contact avec lui. On appelle cela l'appariement de contact. Dans l'approximation en petites déformations de la condition de contact, cette correspondance est déterminée sur la configuration de référence et n'est pas remise en cause lors de la déformation. En général, une projection est utilisée, mais ce n'est pas le seul choix possible. Soit

$$\begin{aligned}\Pi : \Gamma_C^1 &\rightarrow \Gamma_C^2, \\ x &\mapsto y = \Pi(x)\end{aligned}$$

cette correspondance. Il existe alors deux vecteurs extérieurs d'intérêt au point x (voir la figure 1) : la normale unitaire extérieure à Ω^1 , que nous allons noter n^1 et le vecteur unitaire extérieur dans la direction de $y = \Pi(x)$, que nous allons noter n et qui pourra être défini par

$$n = \begin{cases} \frac{y - x}{|y - x|} & \text{si } (y - x) \cdot n^1 > 0, \\ n^1 & \text{si } (y - x) \cdot n^1 = 0, \\ -\frac{y - x}{|y - x|} & \text{si } (y - x) \cdot n^1 < 0, \end{cases}$$

les deux derniers cas (c'est à dire pour $(y - x) \cdot n^1 \leq 0$) étant prévus, soit dans le cas où le contact est établi en configuration de référence, soit s'il existe un recouvrement des deux domaines, ce qui n'est a priori pas interdit. Ces deux vecteurs n^1 et n n'ont pas de raison d'être égaux, en général, sauf à utiliser la stratégie de "lancer de rayon" exposée à la section 3.1. Le vecteur n est en général appelé la normale de contact. Pour écrire la condition de contact, il faut déterminer ce qu'est la contrainte normale. Soit $u^1 : \Omega^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ le déplacement du premier corps et $\sigma(u^1)$ son tenseur de Cauchy. Alors, on notera

$$\sigma_n = (\sigma(u^1)n^1) \cdot n, \quad \sigma_t = (I - n \otimes n)(\sigma(u^1)n^1),$$

la décomposition en composantes normale et tangentielle de la contrainte sur le bord de contact esclave. On notera également

$$g_0 = (y - x) \cdot n,$$

le gap initial entre les deux surfaces de contact potentiel ainsi que

$$[[u]] = (u^1 - u^2 \circ \Pi), \quad [[u_n]] = (u^1 - u^2 \circ \Pi) \cdot n,$$

les sauts des déplacements et des déplacements normaux. Avec ceci, la condition de non-inter-pénétration, ou condition de Signorini, s'écrit sur Γ_C^1 comme la relation de complémentarité suivante :

$$[[u_n]] \leq g_0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad ([[u_n]] - g_0)\sigma_n = 0. \quad (1)$$

Pour écrire la condition de frottement, il nous faut bien sûr un coefficient de frottement que l'on va noter $\mathcal{F} \geq 0$ et en toute rigueur une notion de vitesse de glissement. Ici, dans une évolution supposée quasi-statique, nous n'utiliserons pas une vitesse de glissement mais un incrément de déplacement tangentiel que nous noterons d_t . Dans [32, 50] l'expression $d_t(u_1, u_2) = (I - n \otimes n) [[u]]$ est utilisée, ce qui donne un problème, bien qu'artificiel, ayant les mêmes caractéristiques que celui obtenu pour une expression de d_t qui viendrait d'une discrétisation temporelle que l'on peut écrire

$$d_t(u_1, u_2) = (I - n \otimes n)([[u]] - [[u^0]]),$$

où $[[u^0]]$ désigne le saut des déplacements au pas de temps précédent. La condition de frottement s'écrit alors

$$|\sigma_t| \leq -\mathcal{F}\sigma_n, \quad \text{si } d_t \neq 0 \text{ alors } \sigma_t = \mathcal{F}\sigma_n \frac{d_t}{|d_t|}. \quad (2)$$

La deuxième loi de Newton, ou principe d'action-réaction, impose

$$\sigma(u^1)n^1 = \sigma(u^2 \circ \Pi)n^2 \circ \Pi J_\Pi, \quad (3)$$

où n^2 est la normale extérieure sortante à Γ_C^2 au point $y = \Pi(x)$ et J_Π est le jacobien de la transformation Π entre les deux surfaces Γ_C^1 et Γ_C^2 .

La description de la loi d'élasticité linéarisée se fait par l'intermédiaire du tenseur des petites déformations $\varepsilon(u) = (\nabla u + \nabla u^T)/2$. Le tenseur des contraintes de Cauchy est alors relié au tenseur des déformations par le tenseur d'élasticité $\mathcal{A}$ d'ordre 4 ayant les propriétés de symétrie et de coercivité habituelles. Cette relation s'écrit $\sigma(u) = A\varepsilon(u)$. Les déplacements u^1, u^2 des deux corps élastiques sont alors soumis aux équations suivantes sur Ω^i , $i = 1, 2$ en plus des équations de contact et frottement (1), (2) et (3) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(u^i) = f^i & \text{dans } \Omega^i, \\ \sigma(u^i) = A\varepsilon(u^i) & \text{dans } \Omega^i, \\ u^i = 0 & \text{sur } \Gamma_D^i, \\ \sigma(u^i)n^i = \ell^i & \text{sur } \Gamma_N^i. \end{cases} \quad (4)$$

1.2 La forme en inéquation faible classique

La formulation faible sous forme d'inégalité que l'on peut trouver dans [32, 50] par exemple, peut être construite en introduisant les espaces suivants :

$$V = H^1(\Omega^1; \mathbb{R}^d) \times H^1(\Omega^2; \mathbb{R}^d), \quad V_0 = \{v = (v^1, v^2) \in V : v^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_D^1 \text{ et } v^2 = 0 \text{ sur } \Gamma_D^2\},$$

et l'ensemble des déplacements admissibles

$$K = \{v = (v^1, v^2) \in V_0 : \llbracket v_n \rrbracket - g_0 \in K_0\}, \quad K_0 = \{v \in L^2(\Gamma_C^1) : v \leq 0\}.$$

On introduit également les espaces des traces normale et tangentielle sur Γ_C^1 :

$$X_N = \left\{ w \in L^2(\Gamma_C^1; \mathbb{R}) : \exists v \in H^1(\Omega^1; \mathbb{R}^d), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D^1, w = v|_{\Gamma_C^1} \cdot n \right\},$$

$$X_T = \left\{ w \in L^2(\Gamma_C^1; \mathbb{R}^{d-1}) : \exists v \in H^1(\Omega^1; \mathbb{R}^d), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D^1, w = (I - n \otimes n)v|_{\Gamma_C^1} \right\},$$

ainsi que leur duals topologiques respectifs X'_N et X'_T . En supposant (f_1, f_2) dans $L^2(\Omega^1; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Omega^2; \mathbb{R}^d)$, (ℓ^1, ℓ^2) dans $L^2(\Gamma_N^1; \mathbb{R}^d) \times L^2(\Gamma_N^2; \mathbb{R}^d)$, on définit les formes bilinéaire et linéaire sur V suivantes :

$$a(u, v) = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega^i} \sigma(u^i) : \varepsilon(v^i) d\Omega, \quad L(v) = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega^i} f^i \cdot v^i d\Omega + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_N^i} \ell^i \cdot v^i d\Gamma,$$

ainsi que la forme correspondant au travail virtuel de la force de frottement

$$j(s, v) = \langle s, |d_t(v)| \rangle_{X'_N, X_N},$$

où $s = -\mathcal{F}\sigma_n(u)$ est le seuil de frottement. La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X'_N, X_N}$ désigne le produit de dualité entre les espaces X'_N et X_N . Lorsque s est régulier, ce produit se réduit à l'intégrale $\int_{\Gamma_C^1} s |d_t(v)| d\Gamma$.

Ainsi la forme faible classique associée à (1)–(2)–(3)–(4) s'écrit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in K \text{ tel que} \\ a(u, v - u) - j(\mathcal{F}\sigma_n(u), v) + j(\mathcal{F}\sigma_n(u), u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (5)$$

En l'absence de frottement ($\mathcal{F} = 0$), le problème faible (5) est une inéquation variationnelle de première espèce. Alors, le théorème de Stampacchia permet de conclure qu'il admet une unique solution, qui de plus est l'unique minimiseur de la fonctionnelle $\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - L(u)$ sur l'ensemble convexe K . Lorsque le frottement est présent, des résultats d'existence ont pu être montrés, par

exemple dans [33], à condition que le coefficient de frottement $\mathcal{F}$ soit petit. Concernant l'unicité de la solution, des contre-exemples ont été exhibés pour des grands coefficients de frottement dans [44, 45] et un critère permettant de caractériser l'unicité de la solution a été présenté dans [69]. Le caractère unique de la solution pour un coefficient suffisamment petit est toujours un problème ouvert.

A noter que lorsque le seuil de frottement $s \in X'_N$ est connu (on parle alors de frottement de Tresca), le problème faible, qui est alors une inéquation variationnelle de deuxième espèce, est équivalent à la minimisation de la fonctionnelle non régulière $\mathcal{J}_s(u) = \mathcal{J}(u) + j(s, u)$ sur le convexe K . L'existence et l'unicité de la solution sont également assurées, la fonctionnelle $j(\cdot, \cdot)$ ayant la propriété d'être convexe et semi-continue inférieurement par rapport à son second argument (voir par exemple [36, 50]).

1.3 Le principe de dualité et la forme faible avec multiplicateurs

L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange permet de transformer un problème de minimisation sous contraintes en un problème avec des contraintes simples sur les multiplicateurs. Dans le cas présent, il permet également de traiter le caractère non régulier de la norme qui intervient dans l'expression de la fonctionnelle $j(\cdot, \cdot)$. Le frottement de Coulomb ne dérivant pas naturellement d'un potentiel, regardons cela sur le problème avec frottement de Tresca. En utilisant $I_{K_0}(\cdot)$ l'indicatrice de l'ensemble K_0 , fonction convexe qui vaut 0 dans K_0 et $+\infty$ ailleurs, la solution du problème de Tresca minimise sur V_0 la fonctionnelle

$$\tilde{\mathcal{J}}_s(u) = \mathcal{J}(u) + j(s, u) + I_{K_0}(\llbracket u_n \rrbracket - g_0).$$

Le principe de dualisation consiste à faire intervenir une variable auxiliaire, ici $\mu = (\mu_n, \mu_t) \in X_N \times X_T$, et de poser

$$\mathcal{W}(u, \mu) = \mathcal{J}(u) + \langle s, |d_t(u) + \mu_t| \rangle_{X'_N, X_N} + I_{K_0}(\llbracket u_n \rrbracket - g_0 + \mu_n), \quad (6)$$

de telle manière à ce que $\mathcal{W}(u, 0) = \tilde{\mathcal{J}}_s(u)$ et que $\mathcal{W}(u, \cdot)$ soit convexe. Ainsi, la solution du problème de Tresca est le minimiseur de $\mathcal{W}(u, 0)$ sur V_0 et en appliquant la conjuguée de Fenchel-Legendre à la fonctionnelle $\mathcal{W}(u, \cdot)$ (voir par exemple [74]), ce sera le point selle du lagrangien

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = -\sup_{\mu} \left(\int_{\Gamma_C^1} \lambda \cdot \mu \, d\Gamma - W(u, \mu) \right).$$

Le calcul pratique de cette conjuguée amène aux ensembles

$$\Lambda_N = \{\lambda_n \in X'_N : \langle \lambda_n, v_n \rangle_{X'_N, X_N} \geq 0, \forall v_n \in X_N, v_n \leq 0\},$$

$$\Lambda_T(s) = \{\lambda_t \in X'_T : -\langle \lambda_t, v_t \rangle_{X'_T, X_T} - \langle s, |v_t| \rangle_{X'_N, X_N} \leq 0, \forall v_t \in X_T\},$$

qui sont respectivement les ensembles des contraintes normales et tangentielles admissibles. Cela permet d'obtenir l'expression du lagrangien suivante :

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \mathcal{J}(u) - \langle \lambda_n, \llbracket u_n \rrbracket - g_0 \rangle_{X'_N, X_N} - \langle \lambda_t, d_t(u) \rangle_{X'_T, X_T} - I_{\Lambda_N}(\lambda_n) - I_{\Lambda_T(s)}(\lambda_t),$$

qui est un lagrangien avec des contraintes sur le multiplicateur qui sont traduites par la présence des fonctions indicatrices $I_{\Lambda_N}(\lambda_n)$ et $I_{\Lambda_T(s)}(\lambda_t)$. Il suffit alors de dériver ce lagrangien pour obtenir le système d'optimalité. En utilisant le fait que le sous-différentiel de la fonction indicatrice d'un ensemble est son cône normal (voir toujours [74]), il s'ensuit la formulation suivante du problème avec frottement de Tresca (on pourra voir plus de détails dans [55]) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_0, \lambda_n \in \Lambda_N \text{ et } \lambda_t \in \Lambda_T(s) \text{ tels que} \\ a(u, v) = L(v) + \langle \lambda_n, \llbracket v_n \rrbracket \rangle_{X'_N, X_N} + \langle \lambda_t, \llbracket v_t \rrbracket \rangle_{X'_T, X_T} & \forall v \in V_0, \\ \langle \lambda_n - \mu_n, \llbracket u_n \rrbracket - g_0 \rangle \leq 0 & \forall \mu_n \in \Lambda_N, \\ \langle \lambda_t - \mu_t, d_t(u) \rangle \leq 0 & \forall \mu_t \in \Lambda_T(s). \end{cases} \quad (7)$$

On peut alors obtenir facilement une forme faible du problème avec frottement de Coulomb en remplaçant $\Lambda_T(s)$ par $\Lambda_T(-\mathcal{F}\sigma_n(u))$.

1.4 Le lagrangien augmenté proximal : principe et utilisation

Un désavantage du lagrangien simple présenté dans la section précédente est que la suppression des contraintes et des termes non-réguliers sur u se fait au prix de contraintes sur les multiplicateurs de Lagrange. Un lagrangien augmenté permet d'obtenir un système d'optimalité sans contraintes. Pour cela, il s'agit de modifier la formule (6) en remarquant que l'on peut y ajouter n'importe quelle quantité convexe en la variable μ du moment que celle-ci s'annule pour $\mu = 0$. Le lagrangien augmenté proximal (voir [74]) correspond en l'ajout d'une norme de la variable additionnelle μ , soit ici

$$\mathcal{W}_\gamma(u, \mu) = \mathcal{W}(u, \mu) + \frac{\gamma}{2} \int_{\Gamma_C^1} |\mu|^2 d\Gamma,$$

où $\gamma > 0$ est le paramètre d'augmentation. Il est à noter qu'en utilisant une norme dans $L^2(\Gamma_C^1)$ on se restreint aux cas où le multiplicateur est dans cet espace, ce que l'on supposera par la suite, et qui permettra de remplacer les produits de dualité par des intégrales. En utilisant à nouveau la conjuguée de Fenchel-Legendre par rapport à la variable μ , on obtient le lagrangien augmenté

$$\mathcal{L}_\gamma(u, \lambda) = -\sup_{\mu} \left(\int_{\Gamma_C^1} \lambda \cdot \mu d\Gamma - \mathcal{W}_\gamma(u, \mu) \right),$$

ce qui donne après calcul :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\gamma(u, \lambda) \\ = & \mathcal{J}(u) - \int_{\Gamma_C^1} \lambda_n (\llbracket u_n \rrbracket - g_0) d\Gamma - \int_{\Gamma_C^1} \lambda_t \cdot d_t(u) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} [\lambda_n - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0) + (\lambda_n - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0))_-]^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \frac{\gamma}{2} (\llbracket u_n \rrbracket - g_0)^2 d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} |\lambda_t - \gamma d_t(u) - P_{B(s)}(\lambda_t - \gamma d_t(u))|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \frac{\gamma}{2} |d_t(u)|^2 d\Gamma, \end{aligned} \quad (8)$$

où $(x)_- = (|x| - x)/2$ désigne la partie négative de x et $P_{B(s)}$ est la projection sur la boule de centre 0 et de rayon s . Le système d'optimalité de ce lagrangien augmenté est la forme faible du problème de contact avec frottement de Tresca suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V_0, \lambda \in L^2(\Gamma_C^1; \mathbb{R}^d) \text{ tels que pour tout } v \in V_0 \text{ et tout } \mu \in L^2(\Gamma_C^1; \mathbb{R}^d) \text{ on ait} \\ a(u, v) = L(v) - \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0))_- \llbracket v_n \rrbracket d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} P_{B(s)}(\lambda_t - \gamma d_t(u)) \llbracket v_t \rrbracket d\Gamma, \\ -\frac{1}{\gamma} \int_{\Gamma_C^1} [\lambda_n + (\lambda_n - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0))_-] \mu_n + [\lambda_t - P_{B(s)}(\lambda_t - \gamma d_t(u))] \cdot \mu_t d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

On pourra alors obtenir une forme faible du problème avec frottement de Coulomb en remplaçant le seuil s par le seuil de frottement issu de la loi de Coulomb, c'est à dire soit avec $-\mathcal{F}\lambda_n$, soit avec $\mathcal{F}(\lambda_n - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0))_-$.

Le mécanisme par lequel le lagrangien augmenté assure une condition d'optimalité qui n'est pas une condition sous contrainte est lié à la régularisation de Moreau-Yosida. Pour en donner rapidement le principe, regardons la condition d'optimalité sur le multiplicateur λ qui est obtenue en annulant

$$\partial_\lambda \mathcal{L}_\gamma(u, \lambda) = \partial_\lambda (\mathcal{W}_\gamma^{*\mu}(u, \lambda)),$$

où $\mathcal{W}_\gamma^{*\mu}(u, \lambda)$ est la conjuguée de Fenchel-Legendre de $\mathcal{W}_\gamma(u, \mu)$ par rapport à la variable μ dans $L^2(\Gamma_C^1)$. Or, pour $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe sur un espace de Hilbert X , il vient des définitions de la conjuguée et du sous-différentiel : $x \in \partial\varphi(u) \Leftrightarrow -u \in \partial\varphi^*(x)$. Ici, cela donne pour $X = L^2(\Gamma_C^1)$:

$$0 \in \partial_\lambda \mathcal{L}_\gamma(u, \lambda) \Leftrightarrow -\lambda \in \partial_\mu \mathcal{W}_\gamma(u, 0) \Leftrightarrow 0 \in (\partial_\mu \mathcal{W}(u, \cdot) + \gamma I)^{-1}(-\lambda),$$

où I est l'identité. Le terme $(\partial_\mu \mathcal{W}(u, \cdot) + \gamma I)^{-1}$ est appelé résolvante de Moreau-Yosida de $\partial_\mu \mathcal{W}(u, \cdot)$. Si $\partial_\mu \mathcal{W}(u, \cdot)$ est bien maximal monotone, c'est à dire si $\mathcal{W}(u, \mu)$ est bien convexe

semi-continue inférieurement par rapport à μ , alors la résolvante sera univoque et contractante pour tout $\gamma > 0$ (voir [10]). Ceci implique une régularité au moins lipschitzienne à la condition d'optimalité sur le multiplicateur.

Prenons exemple sur la partie normale $\mathcal{W}^n(u, \mu_n) = I_{K_0}(\llbracket u_n \rrbracket - g_0 + \mu_n)$. Le sous-différentiel d'une fonction indicatrice I_C d'un sous-ensemble convexe C d'un espace de Hilbert X est $\partial I_C = N_C$ où N_C , le cône normal à C est défini par

$$N_C(x) = \begin{cases} \{w \in X : \langle w, v - x \rangle \leq 0 \quad \forall v \in C\} & \text{si } x \in \overline{C}, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

et vérifie en particulier $N_C(x) = \{0\}$ pour x dans l'intérieur de C . Cet ensemble est non trivial uniquement pour $x \in \partial C$. Il vient donc ici $\partial_{\mu_n} \mathcal{W}^n(u, \mu_n) = N_{K_0}(\llbracket u_n \rrbracket - g_0 + \mu_n)$, et pour le lagrangien standard, on a alors

$$0 \in (\partial_{\mu} \mathcal{W}^n(u, \cdot))^{-1}(-\lambda_n) \Leftrightarrow g_0 - \llbracket u_n \rrbracket \in N_{\Lambda_N}(\lambda_n),$$

car on peut vérifier facilement que $N_{K_0}^{-1} = N_{\Lambda_N}$ (les deux ensembles K_0 et Λ_N étant deux cônes mutuellement polaires). La condition $g_0 - \llbracket u_n \rrbracket \in N_{\Lambda_N}(\lambda_n)$ est bien celle traduite par la deuxième ligne du système d'optimalité du lagrangien simple (7) et on voit que cette condition reste sous contrainte car soumise à un cône normal. Au contraire, pour le lagrangien augmenté, on prend $\mathcal{W}_{\gamma}^n(u, \mu_n) = \mathcal{W}^n(u, \mu_n) + \frac{\gamma}{2} \int_{\Gamma_C^1} |\mu_n|^2 d\Gamma$, et il vient

$$0 \in (N_{K_0}(\llbracket u_n \rrbracket - g_0 + \cdot) + \gamma I)^{-1}(-\lambda_n).$$

Comme la résolvante d'un cône normal peut s'écrire sous la forme d'une projection (voir [74]), on obtient ici

$$(N_{K_0}(\llbracket u_n \rrbracket - g_0 + \cdot) + \gamma I)^{-1}(-\lambda_n) = \frac{1}{\gamma}(\lambda_n + (\lambda_n - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0))_-)$$

et on retrouve bien finalement la partie normale de la deuxième équation (9) qui est de régularité lipschitzienne. On verra par ailleurs dans la section 2 comment exploiter de façon plus directe la relation $\lambda_n + (\lambda_n - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0))_- = 0$, qui est une reformulation des conditions de contact (1), imposée de façon faible dans (9), afin d'obtenir une formulation de type Nitsche.

2 Approximation par éléments finis en petites déformations

Pour réaliser une approximation par une méthode d'éléments finis du problème de contact de deux corps élastiques, on considère deux maillages $\mathcal{T}_h^1$ et $\mathcal{T}_h^2$, réguliers au sens de Ciarlet [25], pour les deux domaines Ω^1 et Ω^2 . Ces maillages sont constitués d'éléments géométriques de formes et de tailles souhaitées, de telle sorte que

$$\Omega^i = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^i} T.$$

Pour simplifier, on considère donc que les domaines Ω^1 et Ω^2 sont couverts de manière exacte, ce qui pourrait ne pas être le cas si ces domaines présentent des bords courbes impossibles à couvrir avec les éléments géométriques considérés. On suppose par ailleurs que les maillages respectent le découpage du bord en Γ_D^i , Γ_N^i et Γ_C^i .

On notera V_0^h le sous espace de V_0 des fonctions régulières par morceaux (en général polynomiales) sur les deux maillages $\mathcal{T}_h^1$ et $\mathcal{T}_h^2$. Par exemple, si le choix se porte sur un élément de Lagrange P_1 , les maillages seront constitués de triangles en dimension $d = 2$ et tétraèdres en dimension $d = 3$ et les inconnues seront continues affines par morceaux.

Il existe beaucoup de manières différentes d'approcher le problème de contact avec frottement. Un point important du point de vue pratique est de savoir si on considère ou non des maillages coïncidants (ou compatibles). Les maillages seront dits coïncidants (ou compatibles) si pour tout

nœud élément fini sur le bord esclave $a_i \in \Gamma_C^1$ alors $\Pi(a_i)$ est également un nœud élément fini du maillage $\mathcal{T}_h^2$. Dans ce dernier cas, on peut considérer des approximations plus directes, voir par exemple [86].

A noter également que l'application des techniques de prise en compte du contact présentées ici n'est pas restreinte aux seuls éléments finis, même si ce choix reste un des plus répandus en calcul des structures. Elles peuvent en fait être combinées avec tout autre type de discrétisation basée sur l'écriture faible du problème (méthodes de Galerkin) et qui permet alors une formulation intégrale des conditions de contact. En particulier, il est possible d'utiliser les discrétisations récentes de type isogéométrique basées sur des NURBS (*Non Uniform Rational B-Splines*), qui facilitent le lien avec la Conception Assistée par Ordinateur (voir, par exemple, [5, 28, 48, 51, 77, 83, 84]) ou même des méthodes polytopales, qui autorisent des maillages constitués par des polygones ou des polyèdres (voir, par exemple, [15, 87]).

Dans cette section, on fait d'abord un état de l'art en 2.1 en ce qui concerne les résultats d'existence-unicité de solutions discrètes et leur convergence, et on revient sur les méthodes avec multiplicateur vues en 1.3. Ensuite en 2.2 est présentée une méthode stabilisée qui permet de choisir avec d'avantage de liberté les espaces éléments finis pour les champs de déplacement et le multiplicateur. A partir de cette méthode stabilisée, on peut dériver une méthode primale (sans multiplicateur) et consistante, qui est la méthode de Nitsche, ce qui est l'objet de 2.3. Le lien qui existe entre cette méthode et le lagrangien augmenté présenté en 1.4 est détaillé en 2.4, puis la méthode de pénalité est retrouvée finalement en 2.5 comme étant une approximation de la méthode de Nitsche.

2.1 État de l'art, méthodes avec multiplicateurs

Tout d'abord, notons que chaque formulation faible continue, comme celles décrites à la section 1 ou comme les formulations pénalisées ou régularisées, dispose de son analogue discrétisé par éléments finis. L'état de l'art concernant ces versions discrètes est décrit ci-après :

1. Pour le contact sans frottement, l'existence et l'unicité des solutions est garantie pour tout type de discrétisation "raisonnable". La convergence des solutions discrètes avec un taux optimal était resté un problème ouvert depuis les années 1970 et a seulement été établi récemment, d'abord pour la méthode de Nitsche en 2013 [18] puis pour l'inéquation faible en 2015 [30] (ce dernier résultat pouvant s'appliquer alors à d'autres discrétisations). Les analyses parues précédemment étaient en effet sous-optimales ou faisaient sinon intervenir des hypothèses supplémentaires artificielles concernant le comportement de la solution sur la frontière de contact (voir en particulier [17, 30, 85] pour une revue détaillée des résultats dans ce cadre).
2. Pour le frottement de Tresca, l'existence et l'unicité des solutions est aussi assurée pour tout type de discrétisation "raisonnable". Quant à la convergence des solutions discrètes, elle est généralement établie avec des taux de convergence sous-optimaux, sans que l'on sache si cette sous-optimalité est due à un défaut de l'analyse ou non, voir [16, 17, 18, 85] pour un état de l'art détaillé. En dimension deux, il y a un résultat optimal établi dans [85] mais qui fait intervenir une hypothèse technique sur le comportement de la solution dans la zone de contact et frottement. En dimension trois, il n'y a pas de résultat optimal pour la plupart des méthodes à notre connaissance. Cependant, l'introduction récente de la méthode de Nitsche (voir section 2.3) a permis de produire des solutions discrètes qui convergent de manière optimale vers la solution du problème continu, en dimension deux comme en dimension trois (voir [16]).
3. Pour ce qui concerne le frottement de Coulomb, quelle que soit la discrétisation choisie (inéquation faible, méthode avec multiplicateurs, méthode de Nitsche, etc) on peut généralement montrer avec des arguments de point fixe que le problème discret admet (au moins) une solution, quelque soit la valeur du coefficient de frottement $\mathcal{F}$. De plus on peut montrer que la solution est unique si le coefficient de frottement est inférieur à $Ch^{1/2}$, où $C > 0$ est une constante dépendant de la géométrie mais pas du maillage utilisé. On ne sait toujours pas si le terme en $Ch^{1/2}$ correspond soit à des cas réels (avec des solutions multiples qui apparaissent lorsqu'on raffine le maillage) ou bien s'il s'agit simplement d'un défaut de l'analyse mathématique. Des études concernant la non-unicité des solutions discrètes ont également été menées et des exemples simples explicites de non-unicité ont été obtenus (voir par exemple

[43] pour des exemples de solutions multiples avec un coefficient de frottement supérieur à un). De plus des exemples de non-unicité ont été obtenus numériquement (solutions par éléments finis ne pouvant pas être explicitées à la main) dans [41] pour des coefficients de frottement donnés et arbitrairement petits. La question plus délicate de trouver un exemple discret (explícite ou non) avec lequel on obtienne des solutions multiples pour tout coefficient de frottement arbitrairement petit reste ouverte.

A ce jour les résultats supplémentaires (par rapport à ce qui précède) ont essentiellement été obtenus pour des méthodes avec multiplicateurs qui ont fait l'objet de la plupart des publications ces dernières décennies. Ces méthodes consistent en une discrétisation de (7) qui, dans le cas du frottement de Coulomb s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^h \in V_0^h, \lambda_n^h \in \Lambda_N^h \text{ et } \lambda_t^h \in \Lambda_T^h(-\mathcal{F}\lambda_N^h) \text{ tels que} \\ a(u^h, v^h) = L(v^h) + \int_{\Gamma_C^1} \lambda_n^h \llbracket v_n^h \rrbracket d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \lambda_t^h \cdot \llbracket v_t^h \rrbracket d\Gamma & \forall v^h \in V_0^h, \\ \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n^h - \mu_n^h)(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h) d\Gamma \leq 0 & \forall \mu_n^h \in \Lambda_N^h, \\ \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_t^h - \mu_t^h) \cdot d_t(u^h) d\Gamma \leq 0 & \forall \mu_t^h \in \Lambda_T^h(-\mathcal{F}\lambda_N^h), \end{array} \right. \quad (10)$$

où $V_0^h, \Lambda_N^h, \Lambda_T^h$ sont des versions discrètes de $V_0, \Lambda_N, \Lambda_T$ (de nombreux choix sont possibles). Historiquement, les premiers résultats de convergence ont été obtenus pour le type de formulation (10) (avec des déplacements de type P_1 et des multiplicateurs constants par morceaux) dans [40]. Dans cette référence la convergence est prouvée sous l'hypothèse de l'existence d'une solution du problème continu (i.e., si le coefficient de frottement est suffisamment petit) et l'auteur établit l'existence d'une sous-suite de solutions discrètes convergeant vers une solution du problème continu. En utilisant des déplacements et des multiplicateurs continus linéaires par morceaux, la référence [46] obtient la convergence des solutions avec une vitesse en $Ch^{1/2}$ sous les hypothèses assurant l'existence d'une unique solution établie dans [69]. Les auteurs supposent de plus que la solution du problème continu est dans $H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$ ($\varepsilon > 0$). Tous les résultats précédents ont été obtenus en dimension deux d'espace et certains s'étendent à la dimension trois. De plus ces résultats ont été obtenus pour la quasi-majorité dans le cas de maillages compatibles et il est raisonnable d'envisager de les généraliser au cas de maillages non compatibles. A ce sujet il existe deux approches efficaces ayant déjà fait leurs preuves dans le cas sans frottement pour les maillages non compatibles : la première approche est l'approche "mortar" standard dans laquelle les déplacements (dans chaque solide) sont continus P_k par morceaux ($k = 1, 2$ en pratique) et les multiplicateurs sont choisis dans l'espace trace d'un des deux maillages et sont donc continus P_k par morceaux tout comme les déplacements (voir [8, 42]). La seconde approche, plus récente, intitulée LAC (Local Average Contact) diffère de la première uniquement par le choix des multiplicateurs qui sont choisis P_0 par morceaux (indépendamment du degré k choisi pour les déplacements) sur des macro-maillages (voir [1, 31]). Les couples déplacements-multiplicateurs satisfont une condition inf-sup indépendante de h pour les deux approches mortar et LAC.

2.2 Absence de condition inf-sup et méthodes stabilisées

Un aspect important dans la formulation (10) est la nécessité d'avoir une condition inf-sup entre les espaces des déplacements et les espaces de multiplicateurs afin que le problème soit bien posé (du moins dans le cas sans frottement). Si cette condition n'est pas disponible (non vérifiée ou trop délicate à démontrer) il est possible d'ajouter un terme à la formulation précédente et on parle alors de méthode avec multiplicateurs stabilisée. Pour le problème de frottement une telle méthode

s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V_0^h, \lambda_n^h \in \Lambda_N^h \text{ et } \lambda_t^h \in \Lambda_T^h(-\mathcal{F}\lambda_N^h) \text{ tels que} \\ a(u^h, v^h) - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\sigma(u^h)n) \cdot (\sigma(v^h)n) d\Gamma = L(v^h) \\ + \int_{\Gamma_C^1} \lambda_n^h \left(\llbracket v_n^h \rrbracket - \frac{1}{\gamma} \sigma_n(v^h) \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \lambda_t^h \cdot \left(\llbracket v_t^h \rrbracket - \frac{1}{\gamma} \sigma_t(v^h) \right) d\Gamma \quad \forall v^h \in V_0^h, \\ \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n^h - \mu_n^h) (\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h) d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\lambda_n^h - \mu_n^h) (\lambda_n^h - \sigma_n(u^h)) d\Gamma \leq 0 \quad \forall \mu_n^h \in \Lambda_N^h, \\ \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_t^h - \mu_t^h) \cdot d_t(u^h) d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\lambda_t^h - \mu_t^h) \cdot (\lambda_t^h - \sigma_t(u^h)) d\Gamma \leq 0 \quad \forall \mu_t^h \in \Lambda_T^h(-\mathcal{F}\lambda_N^h), \end{array} \right. \quad (11)$$

où $\gamma = \gamma_0/h_T$ est le paramètre de stabilisation dans lequel $\gamma_0 > 0$ est choisi assez grand et h_T désigne le diamètre de l'élément T . Il s'agit ici de la stabilisation proposée à l'origine par Barbosa et Hughes [7] pour des inéquations variationnelles, et adaptée au cadre du contact dans [47]. Bien que l'analyse numérique n'ait été réalisée que dans le cas sans frottement et avec des maillages compatibles (voir [47]) il est raisonnable d'envisager que tous les résultats obtenus dans le cas non stabilisé avec une condition inf-sup puissent se redémontrer dans le cas stabilisé.

2.3 La méthode de Nitsche vue comme modèle limite des méthodes stabilisées

Dans [82] (voir aussi [49]), pour des conditions aux limites de Dirichlet, un lien est explicité entre la méthode stabilisée de Barbosa et Hughes [6] et celle antérieurement proposée par Nitsche [62], qui peut être retrouvée à partir de celle de Barbosa et Hughes via élimination locale du multiplicateur. Un cheminement similaire peut être effectué dans le cadre du contact et la méthode de Nitsche peut être obtenue à partir de la formulation stabilisée précédente. En effet, les deux dernières égalités dans (11) peuvent se traduire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n^h - \mu_n^h) (\lambda_n^h - \sigma_n(u^h) + \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h)) d\Gamma \leq 0 \quad \forall \mu_n^h \in \Lambda_N^h, \\ \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_t^h - \mu_t^h) \cdot (\lambda_t^h - \sigma_t(u^h) + \gamma d_t(u^h)) d\Gamma \leq 0 \quad \forall \mu_t^h \in \Lambda_T^h(-\mathcal{F}\lambda_N^h), \end{array} \right.$$

ou de manière équivalente en utilisant des opérateurs de projection au sens de $L^2(\Gamma_C^1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n^h = \text{Proj}_{\Lambda_N^h} (\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h)), \\ \lambda_t^h = \text{Proj}_{\Lambda_T^h(-\mathcal{F}\lambda_N^h)} (\sigma_t(u^h) - \gamma d_t(u^h)). \end{array} \right.$$

Puisque la formulation (11) ne nécessite pas de condition inf-sup et est bien posée indépendamment du choix des espaces de multiplicateurs (du moins dans le cas sans frottement), on peut envisager de faire "tendre" les espaces discrets des multiplicateurs vers le continu, soit $\Lambda_N^h \rightarrow \Lambda_N$ et $\Lambda_T^h(-\mathcal{F}\lambda_N^h) \rightarrow \Lambda_T(-\mathcal{F}\lambda_N)$ ce qui revient à chercher un premier multiplicateur $\lambda_n^h \leq 0$ et un second multiplicateur $\lambda_t^h \in B(-\mathcal{F}\lambda_n^h)$. On obtient donc formellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n^h = -(\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-, \\ \lambda_t^h = P_{B(-\mathcal{F}\lambda_n^h)} (\sigma_t(u^h) - \gamma d_t(u^h)). \end{array} \right. \quad (12)$$

Remarquons que les expressions formelles de (12) sont les contreparties discrètes des relations

$$\begin{aligned} \sigma_n(u) &= -(\sigma_n(u) - \gamma(\llbracket u_n \rrbracket - g_0))_-, \\ \sigma_t(u) &= P_{B(-\mathcal{F}\sigma_n(u))} (\sigma_t(u) - \gamma d_t(u)), \end{aligned} \quad (13)$$

qui sont rigoureusement équivalentes aux conditions de contact (1) et de frottement (2) reformulées sous forme d'équations (voir une preuve formelle dans [16], par exemple). Ces reformulations des

conditions de contact et de frottement peuvent être obtenues directement en dérivant le lagrangien augmenté proximal associé au problème de contact, comme cela a été présenté dans la section 1.4. Par ailleurs, il est à noter que le caractère discret des multiplicateurs dans (12) ne résulte plus de leur appartenance à un espace de dimension finie mais du fait que l'on peut les exprimer en fonction des inconnues discrètes u^h . Les deux expressions de (12) sont ensuite remplacées dans la première équation de (11) pour obtenir la formulation de Nitsche :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V_0^h \text{ tel que} \\ a(u^h, v^h) - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\sigma(u^h)n) \cdot (\sigma(v^h)n) d\Gamma \\ = L(v^h) + \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_- (\sigma_n(v^h) - \gamma\llbracket v_n^h \rrbracket) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} P_{B(\mathcal{F}(\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-)} (\sigma_t(u^h) - \gamma d_t(u^h)) \cdot (\sigma_t(v^h) - \gamma\llbracket v_t^h \rrbracket) d\Gamma \quad \forall v^h \in V_0^h. \end{array} \right. \quad (14)$$

La formulation (14) admet une solution si γ_0 est assez grand. De plus cette solution est unique si $\mathcal{F}^2 \gamma_0 h^{-1}$ est assez petit (voir [20, 21]).

Une analyse plus poussée effectuée dans le cas sans frottement (voir [22]), ou avec frottement de Tresca (voir [16]), a permis de généraliser la méthode de Nitsche en introduisant un paramètre supplémentaire noté $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la formulation (14) corresponde à $\theta = 1$. Cette généralisation a permis de distinguer trois cas intéressants : le cas $\theta = 1$ qui correspond d'une part au cas naturel issu de la méthode stabilisée et qui, par ses propriétés de symétrie dérive de la fonctionnelle d'énergie

$$\mathcal{J}_N(u^h) = \mathcal{J}(u^h) - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} \sigma_n(u^h)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} (\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-^2 d\Gamma, \quad (15)$$

(voir [17] pour la preuve et l'extension au frottement de Tresca). Le second cas digne d'intérêt correspond à $\theta = 0$ qui conduit à une formulation particulièrement simple, proche d'une formulation en lagrangien augmenté (voir section 2.4) ou aussi d'une formulation pénalisée (voir section 2.5). Quant au troisième cas obtenu pour $\theta = -1$, la condition sur γ_0 (assez grand) disparaît (voir [22]), et la méthode obtenue est plus robuste (on pourra également voir [14] pour une variante "sans pénalité" inspirée par la méthode proposée dans [11] pour Dirichlet). Lorsqu'on ajoute le frottement de Coulomb les analyses sont plus compliquées; ces formulations généralisées sont à l'étude dans [21] (voir [20] pour un résumé des résultats) et s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V_0^h \text{ tel que} \\ a(u^h, v^h) - \int_{\Gamma_C^1} \frac{\theta}{\gamma} (\sigma(u^h)n) \cdot (\sigma(v^h)n) d\Gamma \\ = L(v^h) + \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_- (\theta \sigma_n(v^h) - \gamma\llbracket v_n^h \rrbracket) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} P_{B(\mathcal{F}(\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-)} (\sigma_t(u^h) - \gamma d_t(u^h)) \cdot (\theta \sigma_t(v^h) - \gamma\llbracket v_t^h \rrbracket) d\Gamma \quad \forall v^h \in V_0^h. \end{array} \right. \quad (16)$$

Notons pour terminer que la méthode de Nitsche, tout comme la stabilisation de Barbosa et Hughes, n'a du sens que pour le problème discrétisé et n'admet pas d'écriture au niveau continu, autre que purement formelle, ceci contrairement à la plupart des autres méthodes (multiplicateurs, lagrangien augmenté, pénalité) qui peuvent s'écrire pour le problème continu (voir section 1). C'est en revanche une méthode consistante, qui ne régularise pas les conditions de contact et de frottement, et c'est également une méthode primale, où la seule inconnue est le champ de déplacement discret.

2.4 Lien entre Nitsche et lagrangien augmenté proximal

Dans le cas où $\theta = 0$, la méthode de Nitsche (16) peut se réécrire plus simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V_0^h \text{ tel que} \\ a(u^h, v^h) = L(v^h) - \int_{\Gamma_C^1} (\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_- \llbracket v_n^h \rrbracket d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C^1} P_B(\mathcal{F}(\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-) (\sigma_t(u^h) - \gamma d_t(u^h)) \cdot \llbracket v_t^h \rrbracket d\Gamma. \end{array} \right.$$

En introduisant des multiplicateurs, comme nouvelles inconnues, à la place des contraintes normales et tangentielles, et en faisant porter les conditions de contact et frottement (13) de façon faible sur ces multiplicateurs, on obtient à partir de la formulation précédente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u^h, \lambda_n^h, \lambda_t^h) \in V_0^h \times X_N^h \times X_T^h \\ \text{tels que pour } (v^h, \mu_n^h, \mu_t^h) \in V_0^h \times X_N^h \times X_T^h \text{ on ait} \\ a(u^h, v^h) = L(v^h) - \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n^h - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_- \llbracket v_n^h \rrbracket d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C^1} P_B(\mathcal{F}(\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-) (\lambda_t^h - \gamma d_t(u^h)) \cdot \llbracket v_t^h \rrbracket d\Gamma, \\ \\ -\frac{1}{\gamma} \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n^h + (\lambda_n^h - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-) \mu_n^h \\ \quad + (\lambda_t^h - P_B(\mathcal{F}(\sigma_n(u^h) - \gamma(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-)) (\lambda_t^h - \gamma d_t(u^h)) \cdot \mu_t^h d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Ici, contrairement aux formulations précédentes, les espaces discrets pour les multiplicateurs, X_N^h , respectivement X_T^h , sont des sous-espaces vectoriels (sans contraintes d'inégalité) de X_N , respectivement X_T . On retrouve alors la version discrète de la formulation en lagrangien augmenté proximal (9) présentée en section 1.4. L'utilisation du lagrangien augmenté vu comme une technique d'approximation a été revisité récemment [13, 12], en effectuant le rapprochement avec la méthode de Nitsche (voir aussi [17]). En particulier pour le contact sans frottement, dans [13], ce rapprochement avec la méthode de Nitsche a permis d'établir un résultat de convergence optimale pour des formulations comme (17).

2.5 Lien entre Nitsche et pénalité

Toujours dans le cas où $\theta = 0$, la méthode de Nitsche (16) peut s'écrire également :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V_0^h \text{ tel que} \\ a(u^h, v^h) = L(v^h) - \int_{\Gamma_C^1} \gamma \left(\frac{1}{\gamma} \sigma_n(u^h) - (\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h) \right)_- \llbracket v_n^h \rrbracket d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C^1} \gamma P_B(\mathcal{F}(\frac{1}{\gamma} \sigma_n(u^h) - (\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h))_-) \left(\frac{1}{\gamma} \sigma_t(u^h) - d_t(u^h) \right) \cdot \llbracket v_t^h \rrbracket d\Gamma \quad \forall v^h \in V_0^h. \end{array} \right. \quad (18)$$

En supposant que γ soit assez grand, on néglige dans la formulation précédente (18) les termes en $1/\gamma$ ce qui donne le modèle pénalisé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V_0^h \text{ tel que } \forall v^h \in V_0^h \\ a(u^h, v^h) = L(v^h) - \int_{\Gamma_C^1} \gamma (\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h)_+ \llbracket v_n^h \rrbracket d\Gamma - \int_{\Gamma_C^1} \gamma P_B(\mathcal{F}(\llbracket u_n^h \rrbracket - g_0^h)_+) (d_t(u^h)) \cdot \llbracket v_t^h \rrbracket d\Gamma, \end{array} \right.$$

où $(x)_+ = (|x| + x)/2$ désigne la partie positive de x . On peut vérifier que cette formulation est non consistante. Cette formulation pénalisée admet une contrepartie continue (voir, par exemple,

[50]) qui peut s'interpréter comme une régularisation des conditions de contact et de frottement, qui sont d'autant mieux approchées que γ est grand. En particulier, cette formulation autorise une interpénétration proportionnelle à la pression de contact et inversement proportionnelle à la valeur de γ (voir entre autres les exemples numériques présentés dans [85]). L'analyse numérique de cette formulation n'a semble-t-il pas été réalisée dans le cas avec frottement de Coulomb. Pour le cas sans frottement ou avec frottement de Tresca, les analyses initiales de [50] ont été améliorées dans [19] puis plus récemment dans [29].

3 Approximation par éléments finis en grandes déformations

Regardons maintenant comment s'étendent les méthodes de lagrangien augmenté et de Nitsche au cadre des grandes déformations élastiques, et examinons aussi les difficultés que cela engendre. On se place en description lagrangienne, avec des matériaux supposés suivre une loi hyper-élastique (l'extension à d'autres lois de comportement pouvant être envisagée comme par exemple dans [76, 78] pour la plasticité et la thermo-élasticité). On notera Ω^1 et Ω^2 les configurations de référence des deux solides élastiques et $u^i : \Omega^i \rightarrow \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$ leurs déplacements. Pour différencier les configurations déformées et de référence, on adoptera les conventions de notation illustrées sur la figure 2. Soit

$$\begin{aligned} \varphi^i : \Omega^i &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ X &\longmapsto x = X + u^i(X) \end{aligned}$$

la transformation associée au solide élastique d'indice i . On notera aussi Γ_D^1 et Γ_D^2 les bords d'encastrement respectifs, ainsi que Γ_N^1 et Γ_N^2 les bords libres.

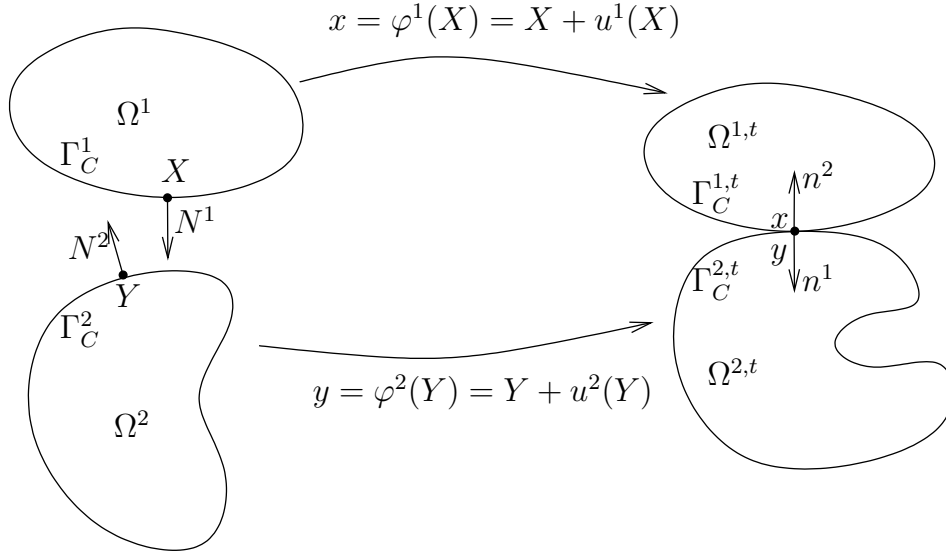


FIGURE 2: Description lagrangienne en grandes déformations.

L'application

$$\begin{aligned} \Pi : \Gamma_C^1 &\longrightarrow \Gamma_C^2 \\ X &\longmapsto Y = \Pi(X) \end{aligned}$$

qui lie les points de la surface esclave Γ_C^1 à leur candidat au contact sur la surface maître Γ_C^2 , n'est évidemment plus une donnée du problème comme dans le cas des petites déformations, mais une application qui dépend des deux déplacements u^1 et u^2 . Nous donnons dans la section 3.1 deux stratégies classiques de définition de Π .

Pour chaque corps i , les déformations sont décrites par le tenseur de Cauchy-Green : $C^i = (F^i)^T F^i$ où $F^i = \nabla \varphi^i = I + \nabla_x u^i$ est le gradient de la déformation, et $J^i = \det(F^i)$ le jacobien associé. On utilisera également le tenseur des déformations de Green-Lagrange $E^i = (C^i - I)/2$. On

note toujours σ^i le tenseur des contraintes de Cauchy, et $\hat{\sigma}^i = J^i \sigma(F^i)^{-T}$, $S^i = J^i(F^i)^{-1} \sigma(F^i)^{-T}$ seront respectivement le premier et le second tenseur de Piola-Kirchhoff. Pour une loi hyper-élastique, il existe alors un potentiel W^i qui dépend de la déformation à travers E^i ou C^i (voir par exemple [24, 37, 63]), tel que

$$S^i = \frac{\partial W^i}{\partial E}(E^i) = 2 \frac{\partial W^i}{\partial C}(C^i).$$

Pour se concentrer sur la description des termes de contact et de frottement, on manipulera dans la suite l'énergie potentielle du système $\mathcal{J}(u)$, qui s'écrit par exemple, en présence de forces de gravitation

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega^i} W^i(E^i) dX - \int_{\Omega^i} \rho_0^i g \cdot u^i dX \right),$$

où ρ_0^i est la densité dans la configuration de référence du corps i et g le vecteur d'accélération de la gravitation. Suivant les modélisations, cette énergie potentielle pourra contenir d'autres termes, comme par exemple des termes représentant les énergies potentielles de forces sur les bords Γ_N^1 et Γ_N^2 .

La dérivée directionnelle d'une quantité A par rapport à un déplacement $u = (u^1, u^2)$ et dans la direction $\delta u = (\delta u^1, \delta u^2)$ sera notée

$$\mathcal{D}A(u)[\delta u],$$

où même $\mathcal{D}A[\delta u]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'argument de la quantité A . Cette dérivée directionnelle est définie par

$$\mathcal{D}A(u)[\delta u] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(u^1 + \varepsilon \delta u^1, u^2 + \varepsilon \delta u^2) - A(u^1, u^2)}{\varepsilon},$$

quand cette limite existe.

Nous allons d'abord voir comment on peut définir la fonction de gap en 3.1, puis expliciter la formulation des conditions de contact en 3.2. Nous montrerons ensuite en 3.3 et 3.4 comment les méthodes de lagrangien augmenté et de Nitsche vues précédemment peuvent être adaptées au cadre des grandes transformations. Nous terminerons par des considérations d'ordre pratique en 3.5 sur le choix du paramètre numérique γ intervenant dans les différentes méthodes, puis en présentant quelques exemples numériques en 3.6.

3.1 Sur l'appariement de contact et la fonction gap

La fonction Π associe à un point X de la surface esclave un point Y de la surface maître, en vis à vis. Cette association peut se faire de différentes manières. La stratégie la plus classique consiste à utiliser la projection orthogonale de $x = \varphi(X)$ sur la surface maître déformée comme cela est présenté sur la figure 3(a) (voir par exemple [57]). Une stratégie alternative, dite de lancé

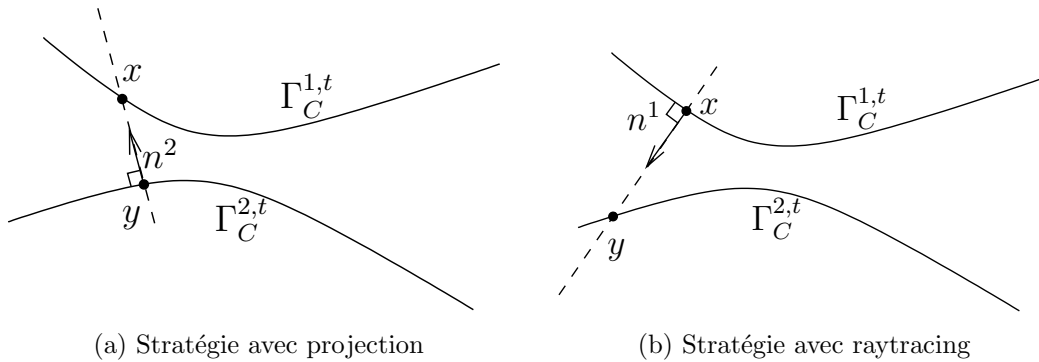


FIGURE 3: Illustration des stratégies de projection et de raytracing.

de rayon, ou raytracing, correspondant à la description de la figure 3(b), est de définir y comme étant l'intersection la plus proche entre la surface maître et la droite passant par le point x et portée par la normale n^1 (voir par exemple [67]). Les fonctions gap qui correspondent à ces deux stratégies sont alors définies par :

$$\begin{aligned} g &= n^1 \cdot (y - x), & \text{pour le raytracing} \\ \text{et } g &= n^2 \cdot (x - y), & \text{pour la projection,} \end{aligned}$$

ce qui donne aussi

$$y = x + g n^1, \quad \text{pour le raytracing} \quad (19)$$

$$\text{et } y = x - g n^2, \quad \text{pour la projection.} \quad (20)$$

Il est intéressant pour la suite d'obtenir la dérivée directionnelle du gap. On obtient d'abord (voir [67]) :

$$\mathcal{D}y[\delta u] = \delta u^2(Y) + F^2 \mathcal{D}Y[\delta u]. \quad (21)$$

Comme $\mathcal{D}Y[\delta u]$ est tangent à Γ_C^2 , le vecteur $F^2 \mathcal{D}Y[\delta u]$ est tangent à $\Gamma_C^{2,t}$ et donc :

$$n^2 \cdot F^2 \mathcal{D}Y[\delta u] = 0. \quad (22)$$

En utilisant (19) et (20), on peut également réécrire

$$\mathcal{D}y[\delta u] = \delta u^1(X) + \mathcal{D}g[\delta u] n^1 + g \mathcal{D}n^1[\delta u], \quad \text{pour le raytracing,} \quad (23)$$

$$\mathcal{D}y[\delta u] = \delta u^1(X) - \mathcal{D}g[\delta u] n^2 - g \mathcal{D}n^2[\delta u], \quad \text{pour la projection,} \quad (24)$$

et en combinant les expressions (21)–(22)–(23)–(24) obtenir les dérivées du gap suivantes :

$$\mathcal{D}g[\delta u] = -\frac{n^2}{n^1 \cdot n^2} \cdot (\delta u^1(X) - \delta u^2(Y) + g \mathcal{D}n^1[\delta u]), \quad \text{pour le raytracing,} \quad (25)$$

$$\mathcal{D}g[\delta u] = n^2 \cdot (\delta u^1(X) - \delta u^2(Y)), \quad \text{pour la projection.} \quad (26)$$

Le calcul de la dérivée de la normale n^1 ne pose pas de problème particulier et donne

$$\mathcal{D}n^1[\delta u] = -(I - n^1 \otimes n^1)(F^1)^{-T} (\nabla \delta u^1(X))^T n^1.$$

Par contre, la dérivée de la normale n^2 est beaucoup plus complexe car elle dépend de la variation du point y . Le calcul de la dérivée $\mathcal{D}Y[\delta u]$ dans le cas de la projection donne en fonction de $\mathcal{D}n^2[\delta u]$

$$\mathcal{D}Y[\delta u] = (F^2)^{-1} (I - n^2 \otimes n^2) (\delta u^1(X) - \delta u^2(Y) - g \mathcal{D}n^2[\delta u]),$$

alors que dans le cas du raytracing, avec utilisation de l'expression de $\mathcal{D}n^1[\delta u]$, il vient :

$$\mathcal{D}Y[\delta u] = (F^2)^{-1} \left(I - \frac{n^1 \otimes n^2}{n^1 \cdot n^2} \right) (\delta u^1(X) - \delta u^2(Y) - g (F^1)^{-T} (\nabla \delta u^1(X))^T n^1).$$

On voit donc que dans le cas projection, il sera nécessaire d'avoir une expression de la dérivée de la normale n^2 par rapport au déplacement, ce qui, d'une part, est très complexe car ces dérivées dépendent en particulier de la courbure de la surface maître (voir les expressions dans [57] par exemple) et d'autre part périlleux puisque la normale n^2 n'est pas continue par rapport au déplacement dans un certain nombre de situations et particulièrement dans le cas de la projection. On peut voir des cas de non-continuité décrits sur la figure 4.

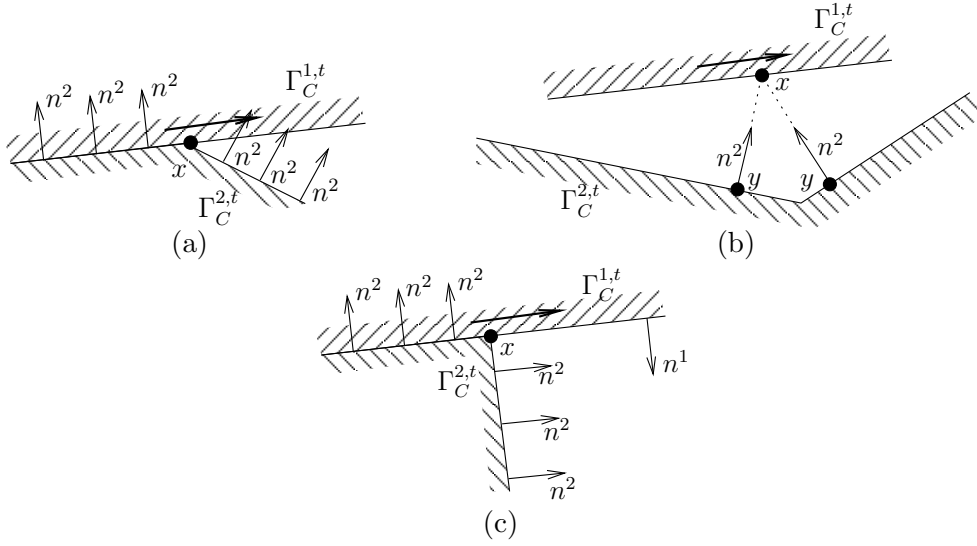


FIGURE 4: Cas de discontinuité de la normale n^2 en fonction de x : (a) lors de la traversée d'une frontière d'élément que ce soit pour la projection ou le raytracing, (b) en présence de bords concaves pour la projection (dans ce cas même y est discontinu), (c) lorsque le raytracing échoue (dans ce cas, y devient non défini).

Ces discontinuités engendrent des difficultés lorsque l'on cherche à faire converger une méthode de Newton. On peut éviter le cas (a) de la figure 4 en utilisant des éléments finis $\mathcal{C}^1$ qui assurent la continuité de la normale à la traversée de la frontière entre les éléments comme dans [64] avec des éléments de Hermite, ou comme dans [53, 59, 81] avec des splines, des courbes de Bézier ou des NURBS, respectivement. Cependant la difficulté demeure lors de la modélisation de surfaces anguleuses. Le cas (b) est plus difficile à éviter et peut faire osciller la méthode de Newton entre deux positions y possibles. Des stratégies sont alors parfois utilisées pour éviter ces oscillations (voir par exemple [2]). Lors de l'utilisation de la stratégie du raytracing, on utilise prioritairement la normale n^1 qui, en général, ne pose pas de problème de discontinuité. Un cas de discontinuité du point y avec le raytracing est toutefois illustré sur le cas (c) de la figure 4.

3.2 Formulation des conditions de contact et de frottement

La condition de non-interpénétration s'exprime simplement par $g(u) \geq 0$. La condition de contact avec frottement peut être décrite soit avec la contrainte de Cauchy, soit en contrainte de Piola. Nous faisons le choix ici d'une description en contrainte de Piola. On décompose donc la contrainte de contact de Piola au point X (bord esclave) en partie normale et tangentielle de la manière suivante :

$$\hat{\sigma}^1(u^1)N^1 = \underbrace{(\hat{\sigma}^1(u^1)N^1 \cdot n)}_{=\hat{\sigma}_n(u)} n + \underbrace{(I - n \otimes n) \hat{\sigma}^1(u^1)N^1}_{=\hat{\sigma}_t(u)},$$

où n est ou bien n^1 dans le cas du raytracing ou bien $-n^2$ dans le cas de la projection de sorte que

$$y = x + gn. \quad (27)$$

On peut remarquer que, lorsque le contact est effectif ($\hat{\sigma}_n < 0$), les normales unitaires sortantes n^1 et n^2 sont opposées. La quantité $\hat{\sigma}_n$ représente la pression de contact (ramenée en configuration de référence) en X , et doit être négative. Les conditions de contact peuvent s'écrire

$$g(u) \geq 0 \quad (28a)$$

$$\hat{\sigma}_n(u) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_C^1. \quad (28b)$$

$$\hat{\sigma}_n(u)g(u) = 0 \quad (28c)$$

Pour tout $\gamma > 0$ ces conditions de contact (28)–(28a)–(28b) peuvent se réécrire grâce à la reformulation suivante qui vient du lagrangien augmenté proximal (voir la section 1.4, et voir aussi (13) dans la section 2.3) :

$$\hat{\sigma}_n(u) = -(\hat{\sigma}_n(u) + \gamma g(u))_-.$$

En présence de frottement, les contraintes normales et tangentielles sont couplées à la vitesse de glissement relative. On peut définir la vitesse relative simplement comme étant

$$v_r(X) = \dot{\varphi}^1(X) - \dot{\varphi}^2(Y),$$

mais cette vitesse relative ne respecte pas le principe d’objectivité lorsque le gap est non nul (voir [27]). On peut alors utiliser comme dans [27] la définition

$$v_r(X) = \dot{\varphi}^1(X) - \dot{\varphi}^2(Y) + g \dot{n},$$

qui est une quantité objective et se confond avec la vitesse de glissement lorsque le contact est établi. Ceci indique bien sûr que l’on est en train de traiter un problème d’évolution. On peut revenir à un problème sans dérivée en temps en faisant une discrétisation temporelle, on posera alors

$$v_r(X) = \frac{1}{\Delta t}(\varphi^1(X) - \varphi^2(Y)) - \frac{1}{\Delta t}(\varphi_0^1(X) - \varphi_0^2(Y)),$$

dans le cas de la vitesse relative simple et

$$\begin{aligned} v_r(X) &= \frac{1}{\Delta t}(\varphi^1(X) - \varphi^2(Y) + g n) - \frac{1}{\Delta t}(\varphi_0^1(X) - \varphi_0^2(Y) + g n_0) \\ &= -\frac{1}{\Delta t}(\varphi_0^1(X) - \varphi_0^2(Y) + g n_0), \end{aligned}$$

dans le cas de la vitesse relative objective, où on a utilisé la formule (27) pour obtenir la deuxième ligne. Les notations φ_0^1, φ_0^2 et n_0 désignent respectivement la déformée et la normale au pas de temps précédent (dépendant toujours de la stratégie choisie), et Δt est le pas de temps associé à la discrétisation.

Si cette vitesse relative est a priori tangentielle lorsque le contact est persistant dans le problème continu, ce ne sera pas exactement le cas dans le problème approché, et on peut être tenté de définir l’incrément de déplacement tangentiel par $d_t = \Delta t(I - n \otimes n)v_r$. On se contentera dans la suite par simplicité de

$$d_t = \Delta t v_r.$$

Les conditions de frottement de Coulomb s’écrivent alors ($\mathcal{F}$ désigne toujours le coefficient de frottement) :

$$\begin{cases} \|\hat{\sigma}_t(u)\| \leq -\mathcal{F} \hat{\sigma}_n(u) & \text{si } d_t = 0, \\ \hat{\sigma}_t(u) = \mathcal{F} \hat{\sigma}_n(u) \frac{d_t}{\|d_t\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (29)$$

En utilisant les expressions provenant du lagrangien augmenté (voir aussi (13)), on peut reformuler la condition de frottement de Coulomb en utilisant la projection $P_{B(\tau)}$. Toujours pour $\gamma > 0$, la condition de frottement est alors équivalente à l’équation non régulière

$$\hat{\sigma}_t(u) = P_{B(-\mathcal{F} \hat{\sigma}_n(u))}(\hat{\sigma}_t(u) - \gamma d_t).$$

3.3 Lagrangien augmenté et pénalisation

On présente ici la technique de lagrangien augmenté pour le problème de contact en grandes transformations décrit précédemment. On commencera par en donner une première formulation. On verra ensuite qu’on peut aboutir à une formulation plus simple si on accepte de perdre la symétrie. On décrira ensuite la formulation éléments finis associée, ainsi que la méthode d’Uzawa pour la résolution effective du problème obtenu. Pour terminer, on verra comment il est possible de retrouver la formulation pénalisée à partir de l’algorithme d’Uzawa.

3.3.1 Lagrangien augmenté et forme faible du problème de frottement

L'obtention d'une formulation de type lagrangien augmenté en grandes déformations pour le problème avec frottement est moins directe que dans le cadre des petites déformations. Il est possible de donner un analogue du lagrangien augmenté proximal (8) pour les grandes déformations qui serait pour un problème à seuil de frottement s donné :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\gamma(u, \lambda_n, \lambda_t) &= \mathcal{J}(u) \\ &+ \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} ((\lambda_n + \gamma g(u))_-^2 - \lambda_n^2) d\Gamma - \int_{\Gamma_C^1} \lambda_t \cdot d_t(u) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} |\lambda_t - \gamma d_t(u) - P_{B(s)}(\lambda_t - \gamma d_t(u))|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \frac{\gamma}{2} |d_t(u)|^2 d\Gamma.\end{aligned}$$

Ici, en comparaison à (8) on a utilisé la propriété $x(x)_- = (x)_-^2$ pour simplifier l'expression associée à la contrainte normale. Le frottement de Tresca en grandes déformations peut paraître encore plus artificiel qu'en petites déformations puisque non seulement un frottement est autorisé en l'absence de contact mais la vitesse relative entre deux points potentiellement très éloignés ne peut pas être interprétée comme une vitesse de glissement et dépend fortement de la stratégie d'appariement de contact choisie. Si on écrit le système d'optimalité de ce lagrangien, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}\mathcal{J}(u)[\delta u] - \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n + \gamma g(u))_- \mathcal{D}g(u)[\delta u] d\Gamma \\ \quad - \int_{\Gamma_C^1} P_{B(s)}(\lambda_t - \gamma d_t(u)) \cdot \mathcal{D}d_t(u)[\delta u] d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u, (\delta u = 0 \text{ sur } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2), \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\lambda + (\lambda_n + \gamma g)_- n - P_{B(s)}(\lambda_t - \gamma d_t(u))) \cdot \delta \lambda d\Gamma = 0, \quad \forall \delta \lambda, \end{array} \right. \quad (30)$$

avec $\lambda = \lambda_n n + \lambda_t$. Si la deuxième équation de (30) est bien un équivalent faible des conditions de contact (28) et frottement (29), l'interprétation de λ_n et λ_t en tant que contrainte n'est assurée que si les termes $\mathcal{D}g(u)[\delta u]$ et $\mathcal{D}d_t(u)[\delta u]$ s'expriment en termes de déplacement relatif. C'est bien le cas pour $\mathcal{D}g(u)[\delta u]$ lors de l'utilisation de la projection (voir formule (26)) mais des termes supplémentaires sont déjà présents lors de l'utilisation du raytracing (voir formule (25)). En ce qui concerne la dérivée $\mathcal{D}d_t(u)[\delta u]$ elle s'écrit

$$\mathcal{D}d_t(u)[\delta u] = \delta u^1(X) - \delta u^2(Y) + (F_0^2 - F^2)\mathcal{D}Y[\delta u],$$

dans le cas de la vitesse relative simple et

$$\mathcal{D}d_t(u)[\delta u] = F_0^2 \mathcal{D}Y[\delta u] - \mathcal{D}g[\delta u] n_0,$$

dans le cas de la vitesse relative objective. Dans les deux cas, le calcul fait intervenir $\mathcal{D}Y[\delta u]$, ce qui suppose le calcul de la dérivée seconde de Y pour obtenir le problème tangent, dans le cadre de la résolution par méthode de Newton.

3.3.2 Forme faible simplifiée et non conservation de la symétrie

Pour simplifier l'expression de (30) on peut remplacer $\mathcal{D}g(u)[\delta u]$ par $-n \cdot (\delta u^1(X) - \delta u^1(Y))$ et $\mathcal{D}d_t(u)[\delta u]$ par $(\delta u^1(X) - \delta u^2(Y))$. Cela modifie l'interprétation du multiplicateur λ , mais pas le fait que l'on impose correctement une condition de contact unilatéral avec frottement. Pour tenir compte d'un frottement de Coulomb, on remplace le seuil s soit par $-\mathcal{F}\lambda_n$, soit par $\mathcal{F}(\lambda_n + \gamma g)_-$. La deuxième expression est préférée par exemple dans [26] et elle a l'avantage d'avoir un signe toujours positif quelque soit la valeur de λ_n au cours des itérations de résolution. Si on adopte cette deuxième expression, la forme faible du problème avec frottement de Coulomb s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}\mathcal{J}(u)[\delta u] + \int_{\Gamma_C^1} ((\lambda_n + \gamma g(u))_- n - P_{B(\mathcal{F}(\lambda_n + \gamma g(u))_-)}(\lambda_t - \gamma d_t(u)) \cdot (\delta u^1(X) - \delta u^2(Y))) d\Gamma \\ = 0, \quad \forall \delta u, (\delta u = 0 \text{ sur } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2), \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\lambda + (\lambda_n + \gamma g(u))_- n - P_{B(\mathcal{F}(\lambda_n + \gamma g(u))_-)}(\lambda_t - \gamma d_t(u))) \cdot \delta \lambda d\Gamma = 0, \quad \forall \delta \lambda. \end{array} \right. \quad (31)$$

La modification effectuée fait par contre perdre la symétrie du problème tangent, y compris lorsque le coefficient de frottement $\mathcal{F}$ est nul.

La conservation de la symétrie peut être un enjeu pour utiliser des solveurs linéaires potentiellement plus performants. Dans le cas présent, le dilemme est entre l'utilisation de la formulation (30) (préalablement adaptée au frottement de Coulomb) et l'utilisation de la formulation simplifiée (31). La formulation (31), en plus de sa simplicité, a l'avantage de donner une interprétation simple des multiplicateurs en termes de densité d'efforts de contact et est également plus simple à redériver pour obtenir le problème tangent. Son désavantage est la perte de symétrie du problème tangent. Ce n'est pas un désavantage si la perte de symétrie a déjà été actée, par exemple en raison de lois de comportement intrinsèquement non symétriques (plasticité non associée par exemple), mais cela peut en être un si c'est la seule cause de non symétrie et que l'on souhaite utiliser des solveurs linéaires symétriques. Dans ce dernier cas, on peut être tenté par l'utilisation de la formulation (30). Cependant, comme on l'a évoqué à la section 3.1, en plus de sa complexité supplémentaire, l'obtention de la dérivée de la normale n^2 et de la dérivée seconde de Y est également extrêmement complexe, car dépendant de la courbure de la surface maître, et bien souvent impossible à calculer du fait des discontinuités en n^2 et Y . C'est la raison pour laquelle nombre d'implantations utilisant la stratégie de projection adoptent des versions simplifiées du problème tangent ne faisant pas intervenir la courbure de la surface maître (voir par exemple [52]) quitte à éventuellement perdre la convergence d'ordre deux de la méthode de Newton.

De plus, du fait du caractère non associé de la loi de frottement de Coulomb, le système tangent global sera non symétrique. Dans le cadre de l'algorithme d'Uzawa (voir section 3.3.4), des stratégies ont été développées, par exemple dans [58] et [52, p.355], pour retrouver la symétrie du problème tangent en déplacement. Ces stratégies consistent principalement à prendre les parties non symétriques à l'itération d'Uzawa précédente.

Le parti pris dans ce chapitre est l'utilisation de la formulation simplifiée (31), quitte à perdre la symétrie du problème tangent. Ce choix, que l'on peut retrouver également dans [65, 67, 68], est guidé par le souci de fournir une formulation faible la plus régulière possible par rapport au déplacement. En effet, les cas de non-continuité de la normale n^2 et de la position Y constituent potentiellement une source de difficultés lors de l'utilisation de la méthode de Newton.

3.3.3 Approximation par éléments finis

Afin d'écrire l'approximation par éléments finis du problème (31), on considère V_0^h et X^h deux espaces éléments finis, le premier espace V_0^h étant destiné à approcher le déplacement (comme dans les sections précédentes, l'indice 0 signifie que les conditions d'encastrement y sont incorporées) et le second X^h le multiplicateur. Ce dernier est donc restreint au bord esclave Γ_C^1 . Comme en petites déformations, le choix relatif de ces deux espaces est soumis à la satisfaction d'une condition inf-sup (voir section 2.1) afin de garantir l'unicité du multiplicateur et de ne pas sur-contraindre le problème. Après discrétisation par éléments finis, le problème (31) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h = (u^{1,h}, u^{2,h}) \in V_0^h \text{ et } \lambda^h \in X^h \text{ tels que } \forall \delta u^h \in V_0^h \text{ et } \forall \delta \lambda^h \in X^h, \\ \mathcal{DJ}(u^h)[\delta u^h] + \int_{\Gamma_C^1} (\lambda_n^h + \gamma g(u^h))_- n \cdot (\delta u^{1,h}(X) - \delta u^{2,h}(Y)) d\Gamma \\ \quad - \int_{\Gamma_C^1} P_{B(\mathcal{F}(\lambda_n^h + \gamma g(u^h))_-)}(\lambda_t^h - \gamma d_t(u^h)) \cdot (\delta u^{1,h}(X) - \delta u^{2,h}(Y)) d\Gamma = 0, \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\lambda^h + (\lambda_n^h + \gamma g(u^h))_- n - P_{B(\mathcal{F}(\lambda_n^h + \gamma g(u^h))_-)}(\lambda_t^h - \gamma d_t(u^h))) \cdot \delta \lambda^h d\Gamma = 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

La résolution de ce problème discret fortement non-linéaire se fait habituellement en utilisant une méthode de Newton généralisée [26, 70] (appelée aussi méthode de Newton non régulière [23]). Il faut pour cela calculer le problème tangent associé au problème précédent.

Le problème tangent pour la résolution par une méthode de Newton est obtenu en redérivant (32) par rapport au déplacement et au multiplicateur. Ceci aboutit à un système tangent assez complexe en raison du nombre important de termes, y compris si on utilise les simplifications introduites plus haut. Une implantation informatique peut vite s'avérer délicate à mettre en œuvre,

la moindre omission ou erreur pouvant dégrader la vitesse de convergence de la méthode de Newton. Une alternative à l'implantation directe dans un langage compilé est d'utiliser des stratégies d'automatisation telles qu'on peut les trouver dans les logiciels AceGen [59] ou GetFEM [71] par exemple, qui permettent de dériver automatiquement le problème tangent et d'obtenir un calcul efficace à partir d'une description de la forme faible (32).

3.3.4 Résolution numérique par l'algorithme d'Uzawa

La résolution du problème (32) par une méthode de Newton signifie que l'on effectue une résolution simultanée en déplacement et en multiplicateur de Lagrange. Une alternative largement utilisée dans les codes de mécanique de structures est l'utilisation de l'algorithme d'Uzawa (voir par exemple [79], dans ce contexte). Nous renvoyons à [9, 54, 55] pour le principe de l'algorithme d'Uzawa pour un lagrangien ou un lagrangien augmenté. Dans le cas présent, l'algorithme peut s'écrire

- 0) Choisir une valeur initiale λ_0^h pour le multiplicateur et un pas d'avancement $r > 0$.
- 1) Résoudre la première équation de (32) en déplacement, pour le multiplicateur fixé à la valeur $\lambda^{h,k}$. Soit $u^{h,k}$ la solution obtenue.
- 2) Calculer $\lambda^{h,k+1}$ grâce aux mises à jour suivantes :

$$\lambda_n^{h,k+1} = \lambda_n^{h,k} + \frac{r}{\gamma} (-(\lambda_n^{h,k} + \gamma g(u^{h,k}))_- - \lambda_n^{h,k}), \quad (33)$$

$$\lambda_t^{h,k+1} = \lambda_t^{h,k} + \frac{r}{\gamma} (P_{B(\mathcal{F}(\lambda_n^{h,k} + \gamma g(u^{h,k}))_-)}(\lambda_t^{h,k} - \gamma d_t(u^{h,k})) - \lambda_t^{h,k}). \quad (34)$$

- 3) Boucler à l'étape 1 en incrémentant k tant qu'un critère de convergence n'est pas atteint.

L'étape 1 de l'algorithme consistant en la résolution d'un problème non linéaire, elle s'effectue en général à l'aide d'une méthode de Newton. L'étape 2 correspond à une méthode de gradient à pas fixe $r > 0$ sur le multiplicateur λ^h . Pour le problème continu, non approché par éléments finis, la mise à jour donnée par les équations (33) et (34) donne un point fixe dans $L^2(\Gamma_C^1)$ dont il a été montré dans [54, 80] qu'il est toujours convergent pour le problème avec frottement de Tresca (en petites déformations), lorsque $r = \gamma$. En pratique, c'est toujours ce choix qui est effectué. De plus, le point fixe admet une constante de contraction d'autant plus petite que $r = \gamma$ est choisi grand (et donc converge d'autant plus vite). Il s'agit par contre d'une convergence d'ordre 1 à comparer avec la convergence d'ordre 2 de la méthode de Newton.

En ce qui concerne le problème approché par éléments finis, les équations (33) et (34) ne sont évidemment pas satisfaisantes telles quelles car le résultat des membres de droite ne sont pas nécessairement dans l'espace élément fini X^h . Une première solution est de les y reprojeter, ce qui donne (pour $r = \gamma$) : chercher $\lambda^{h,k+1} \in X^h$ tel que pour tout $\delta \lambda^h \in X^h$ on ait

$$\int_{\Gamma_C^1} \left(\lambda^{h,k+1} + (\lambda_n^{h,k} + \gamma g(u^{h,k}))_- n - P_{B(\mathcal{F}(\lambda_n^{h,k} + \gamma g(u^{h,k}))_-)}(\lambda_t^{h,k} - \gamma d_t(u^{h,k})) \right) \cdot \delta \lambda^h d\Gamma = 0.$$

Ceci revient à considérer la deuxième équation du problème (32) en prenant tous les termes à l'itération k à l'exception du premier λ^h , pris à l'itération $k+1$. Le prix à payer est une inversion d'un système linéaire supplémentaire réduit au bord de contact esclave. Le coût de cette résolution est cependant la plupart du temps négligeable par rapport à la résolution par une méthode de Newton de la première équation.

Le coût supplémentaire de cette résolution est évité dans beaucoup de références en effectuant la mise à jour sur les degrés de liberté du multiplicateur (voir par exemple [79]). En notant $\lambda_i^{h,k+1}$ la contrainte de contact au nœud élément fini $a_i \in \Gamma_C^1$ et $\lambda_{t,i}^{h,k+1}$, $\lambda_{n,i}^{h,k+1}$ les parties normale et tangentielle, cette mise à jour s'écrit :

$$\begin{aligned} \lambda_{n,i}^{h,k+1} &= -(\lambda_{n,i}^{h,k} + \gamma g(u^{h,k}(a_i)))_-, \\ \lambda_{t,i}^{h,k+1} &= P_{B(\mathcal{F}(\lambda_{n,i}^{h,k} + \gamma g(u^{h,k}(a_i)))_-)}(\lambda_{t,i}^{h,k} - \gamma d_t(u^{h,k}(a_i))). \end{aligned}$$

Ceci représente en général une approximation supplémentaire et signifie que la condition de contact et de frottement est imposée localement sur les nœuds éléments finis du multiplicateur. L'utilisation de bases bi-orthogonales dans [66, 65] permet de réaliser cette opération sans approximation supplémentaire.

3.3.5 Lien avec l'approximation par pénalisation

Outre ses bonnes propriétés de convergence, une des raisons de l'utilisation de l'algorithme d'Uzawa pour le lagrangien augmenté réside dans sa proximité avec le problème avec pénalisation. En effet, si on prend $\lambda^{h,0} = 0$, la première itération de l'algorithme d'Uzawa consiste à trouver $u^h = (u^{1,h}, u^{2,h})$ solution de

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathcal{J}(u^h)[\delta u^h] + \int_{\Gamma_C^1} (\gamma g(u^h))_- n \cdot (\delta u^{1,h}(X) - \delta u^{2,h}(Y)) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_C^1} P_{B(\mathcal{F}(\gamma g(u^h))_-)}(\gamma d_t(u^h)) \cdot (\delta u^{1,h}(X) - \delta u^{2,h}(Y)) d\Gamma = 0, \quad \forall \delta u^h \in V_0^h, \end{cases} \quad (35)$$

qui est précisément un problème avec des conditions de contact et de frottement pénalisées, γ étant maintenant le paramètre de pénalisation (voir section 2.5). Ainsi, il est possible de résoudre le problème avec pénalisation (35), puis, sur un critère de condition de contact ou de condition de frottement mal respectée de faire une ou plusieurs itérations de l'algorithme d'Uzawa pour obtenir une meilleure solution.

3.4 Méthode de Nitsche

Il a été vu à la section 2.3 que la méthode de Nitsche pouvait être interprétée comme une méthode de lagrangien stabilisé dans laquelle une opération de condensation du multiplicateur a été effectuée. Si la méthode du lagrangien stabilisé permet d'effectuer cette condensation assez simplement, dans des cas particuliers d'espaces de multiplicateurs (voir [38, 39]), il est à noter que de telles stratégies existent aussi sur le lagrangien augmenté pour des multiplicateurs constants ou des bases bi-orthogonales dans [66, 65, 76], la condensation étant toutefois limitée au problème tangent.

On va présenter ici d'abord la méthode de Nitsche, en la redérivant à partir d'une fonctionnelle d'énergie pour retrouver sa variante symétrique $\theta = 1$. On verra ensuite que dans le cadre du contact entre plusieurs solides élastiques (ou de l'auto-contact) il est possible d'écrire une variante non biaisée de cette méthode.

3.4.1 Dérivation à partir d'un potentiel

Pour le problème sans frottement, il est possible d'obtenir une méthode de Nitsche en partant du potentiel (15) obtenu en petites déformations (voir [17, 61]) que l'on transpose ici au cas des grandes déformations :

$$\mathcal{J}_N(u^h) = \mathcal{J}(u^h) - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} \hat{\sigma}_n(u)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{2\gamma} (\hat{\sigma}_n(u) + \gamma g(u))_-^2 d\Gamma,$$

où $\gamma > 0$ est redevenu le paramètre de Nitsche. Le système d'optimalité de ce potentiel s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{D}\mathcal{J}(u^h)[\delta u^h] \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} \hat{\sigma}_n(u^h) \mathcal{D}\hat{\sigma}_n(u^h)[\delta u^h] d\Gamma - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\hat{\sigma}_n(u^h) + \gamma g(u^h))_- \mathcal{D}(\hat{\sigma}_n(u^h) + \gamma g(u^h))[\delta u^h] d\Gamma \\ = 0 \quad \forall \delta u^h \in V_0^h. \end{cases}$$

On voit apparaître le terme $\mathcal{D}\hat{\sigma}_n[\delta u]$ dans lequel la dérivée de la normale intervient :

$$\mathcal{D}\hat{\sigma}_n[\delta u] = \mathcal{D}((\hat{\sigma}N) \cdot n)[\delta u] = (\mathcal{D}\hat{\sigma}[\delta u]N) \cdot n + (\hat{\sigma}N) \cdot \mathcal{D}n[\delta u].$$

Ce terme peut évidemment sembler problématique puisqu'il fait intervenir la rigidité tangente $\mathcal{D}\hat{\sigma}[\delta u]$ dans la forme faible, ce qui implique, de manière assez inhabituelle, de calculer la dérivée de cette rigidité tangente pour avoir l'expression du problème tangent.

Toujours pour le problème sans frottement, on obtient alors assez naturellement les différentes variantes de la méthode de Nitsche pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mathcal{DJ}(u^h)[\delta u^h] \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{\theta}{\gamma} \hat{\sigma}_n(u^h) \mathcal{D}\hat{\sigma}_n(u^h)[\delta u^h] d\Gamma - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} (\hat{\sigma}_n(u^h) + \gamma g(u^h))_- \mathcal{D}(\theta \hat{\sigma}_n(u^h) + \gamma g(u^h))[\delta u^h] d\Gamma \\ = 0 \quad \forall \delta u^h \in V_0^h. \end{cases}$$

Dans ce contexte, la variante $\theta = 0$ paraît spécialement intéressante car elle fait disparaître le terme $\mathcal{D}\hat{\sigma}[\delta u]$, bien sûr toujours au prix d'un problème tangent non symétrique.

Pour l'obtention de la méthode de Nitsche dans le cas avec frottement de Coulomb, il semble préférable de partir de la formulation en lagrangien augmenté simplifiée (32). En effet, en remplaçant le multiplicateur λ par $\hat{\sigma}N$, on obtient directement la variante $\theta = 0$, puis en généralisant pour $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque, on obtient alors (voir aussi [61]) :

$$\begin{cases} \mathcal{DJ}(u^h)[\delta u^h] - \int_{\Gamma_C^1} \frac{\theta}{\gamma} (\hat{\sigma}^h N) \cdot (\mathcal{D}\hat{\sigma}^h[\delta u^h] N) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_C^1} \frac{1}{\gamma} ((\hat{\sigma}_n^h + \gamma g^h)_- n - P_{B(\mathcal{F}(\hat{\sigma}_n^h + \gamma g^h)_-)}(\hat{\sigma}_t^h - \gamma d_t^h)) \\ \cdot (\theta \mathcal{D}\hat{\sigma}^h[\delta u^h] N - \gamma(\delta u^{1,h}(X) - \delta u^{2,h}(Y))) d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u^h \in V_0^h. \end{cases}$$

Comme dans le cas du lagrangien augmenté, cette formulation évite des termes en dérivée de la normale mais au prix de la perte de symétrie du problème tangent, y compris en l'absence de frottement ($\mathcal{F} = 0$).

Il est à noter également que d'autres variantes de la méthode de Nitsche peuvent être obtenues par des principes un peu différents. On peut le voir par exemple dans [14] en petites déformations, et aussi dans le cadre des grandes déformations dans [76, 78], où est introduite une famille avec un paramètre supplémentaire recouvrant la méthode présentée ici.

3.4.2 Variante non biaisée

Une méthode d'approximation est dite non biaisée si aucune différence n'est faite entre surface maître et surface esclave (voir par exemple [75]). Dans ce cas, on note $\Gamma_C = \Gamma_C^1 \cup \Gamma_C^2$ la surface de contact potentielle totale. On notera toujours X le point courant de Γ_C et $Y \in \Gamma_C$ le point trouvé à l'aide de la stratégie de projection ou raytracing, qui n'est évidemment plus nécessairement sur la surface maître Γ_C^2 . Il est alors facile de voir qu'une formulation non-biaisée est obtenue simplement en ajoutant des facteurs 1/2 et en étendant les intégrales sur tout Γ_C (voir [61]) :

$$\begin{cases} \mathcal{DJ}(u^h)[\delta u^h] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \frac{\theta}{\gamma} (\hat{\sigma}^h N) \cdot (\mathcal{D}\hat{\sigma}^h[\delta u^h] N) d\Gamma \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma} ((\hat{\sigma}_n^h + \gamma g^h)_- n - P_{B(\mathcal{F}(\hat{\sigma}_n^h + \gamma g^h)_-)}(\hat{\sigma}_t^h - \gamma d_t^h)) \\ \cdot (\theta \mathcal{D}\hat{\sigma}^h[\delta u^h] N - \gamma(\delta u^{1,h}(X) - \delta u^{2,h}(Y))) d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u^h \in V_0^h. \end{cases}$$

L'avantage de cette formulation, en plus d'apporter une symétrie supplémentaire, est qu'en cas de recherche d'auto-contact, l'absence de séparation de la surface de contact en partie maître et partie esclave implique qu'aucun a priori sur l'endroit effectif où le contact va avoir lieu n'est nécessaire. Il y a bien sûr un coût supplémentaire lié à la nécessité d'intégrer sur toute la surface de contact.

3.5 Sur la valeur du paramètre γ

Le paramètre γ qui apparaît comme paramètre de pénalisation dans la formulation pénalisée (35), comme paramètre d’augmentation dans la formulation en lagrangien augmenté (32) et comme paramètre de Nitsche dans la formulation (35) a un rôle malgré tout assez similaire dans les trois approches. Même si la solution numérique est assez peu affectée par la valeur du paramètre γ dans les formulations en lagrangien augmenté et de Nitsche, une valeur minimale est à respecter en ce qui concerne la méthode de Nitsche pour conserver la coercivité du problème. Pour la méthode de pénalité, il s’agira de trouver le bon compromis entre une valeur de γ grande qui assurera une bonne approximation des conditions de contact et de frottement et une valeur modérée qui n’affecte pas la convergence de la méthode de Newton. Même si les préoccupations sont différentes dans les trois approches, les valeurs optimales du paramètre γ sont toutefois similaires. En effet, les analyses d’erreur a priori dans le cas des petites déformations, aussi bien pour la méthode de Nitsche [22] que pour la convergence au premier ordre de la méthode de pénalité [19], font état d’une dépendance en $\gamma = \gamma_0/h$ où h est la taille de maille. De plus l’étude [70] et l’analyse aux dimensions faite dans [67] dans le cadre du lagrangien augmenté amènent à la conclusion que γ_0 a la dimension d’un module d’élasticité. Il est donc assez naturel de choisir pour γ :

$$\gamma = K/h \text{ où } K = \frac{1}{3} \frac{E}{1-2\nu} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

désigne le module d’élasticité isostatique (bulk modulus en anglais), qui est égal au module de Young E lorsque le coefficient de Poisson ν est égal à $1/3$ (λ et μ désignent ici les coefficients de Lamé).

Bien sûr, et principalement pour la méthode de Nitsche en grandes déformations, cette valeur peut s’avérer insuffisante pour assurer la coercivité. En effet, quand la déformation est très importante, la valeur de γ_0 serait plutôt à relier à la valeur maximale des modules tangents d’élasticité. Une manière de procéder, est alors, comme proposé dans [78], d’adapter la valeur de γ_0 aux valeurs propres maximales des matrices de rigidité tangentes élémentaires.

3.6 Tests numériques

Nous reproduisons ici des tests numériques qui ont été réalisés à l’aide du logiciel domaine public GetFEM [71] à la fois dans [67] avec une stratégie de lagrangien augmenté et dans [61] avec la méthode de Nitsche non biaisée présentée précédemment. Ces résultats obtenus avec les deux méthodes sont très proches. Ils sont de plus corroborés par [76] où une étude similaire est présentée.

Parmi les aspects pratiques dans l’implantation de ces méthodes, que ce soit pour le lagrangien augmenté ou la méthode de Nitsche, on trouve la préoccupation de l’intégration numérique sur le bord de contact. Ceci est commun à toutes les méthodes de type mortar, pour lesquelles une intégration des quantités entre deux maillages incompatibles (ceux de la surface esclave et de la surface maître) est nécessaire. Les intégrales portant sur des polynômes par morceaux, une intégration optimale passe a priori par un sous-découpage de l’interface qui soit conforme avec les deux maillages. Lorsqu’il est pratiqué, celui-ci se fait en général en sous-découpant les faces des éléments de la surface esclave de manière conforme avec une projection des éléments de la surface maître en configuration déformée comme dans [68]. Ce sous-découpage est non seulement assez complexe mais doit a priori être effectué à chaque itération de la méthode de Newton. De plus, lorsque des éléments courbes (isoparamétriques ou isogéométriques) sont utilisés, ou simplement pour des éléments de degré supérieur à un, les intersections des faces d’éléments deviennent excessivement complexes et nécessitent alors d’être simplifiées.

Dans un cas linéaire avec conditions de transmission, une comparaison est effectuée dans [56]. Une méthode d’intégration non-symétrique y est aussi proposée, celle-ci a été adaptée ensuite dans [60] pour la méthode de Nitsche. Même s’il est clair que le sous-découpage des faces esclaves pour l’intégration apporte une précision supplémentaire, il n’est pas certain que le gain obtenu soit suffisamment important pour justifier une étape qui reste coûteuse. Ainsi, dans [34], une comparaison est effectuée entre une intégration sans découpage, avec découpage complet et avec découpage partiel. La stratégie de découpage partiel consiste à découper exclusivement les éléments qui sont en regard

d'une discontinuité de la surface maître. Dans les tests effectués, le découpage partiel offre approximativement les mêmes précisions que le découpage total. Dans [60], des tests ont été effectués entre un découpage total et une absence de découpage. Dans la plupart de ces tests effectués avec des éléments linéaires, le découpage total n'apporte pas un gain substantiel de précision. Un gain plus important est cependant constaté pour l'utilisation d'éléments quadratiques. Les tests présentés dans la suite ont été effectués sans découpage.

3.6.1 Demi-anneau élastique

Ce test a été introduit dans [35]. Un anneau élastique composé de deux couches de matériaux hyper-élastiques néo-hookéens a pour énergie de déformation

$$W(C) = \frac{\mu}{2}(i_1(C) - 3) + \frac{\lambda}{4}(i_3(C) - 1) - \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)\ln(i_3(C))$$

où λ , μ sont les coefficients de Lamé du matériau, $C = F^T F$ est toujours le tenseur de Cauchy-Green, et $i_1(C) = \text{trace}(C)$ et $i_3(C) = \det(C)$ sont les premier et troisième invariants de C . L'anneau extérieur a un module de Young de 10^3 MPa et l'anneau intérieur de 10^5 MPa. Le coefficient de Poisson est de 0.3 pour les deux matériaux. Cette différence importante de raideur crée des difficultés à la méthode de pénalité (voir [35]). Ce demi-anneau est poussé contre un bloc élastique de module de Young 300 MPa et de coefficient de Poisson 0.3. Les dimensions sont indiquées sur le dessin du haut de la figure 5 qui précise également la géométrie des corps en contact. Les extrémités du demi-anneau sont fixées et déplacées verticalement de 70 mm vers le bas en 140 pas de 0.5 mm chacun.

La figure 5 montre quatre états de déformation à différents pas de chargement. Les graphiques de gauche correspondent à un contact sans frottement alors que les graphiques de droite correspondent à un contact avec frottement de Coulomb et $\mathcal{F} = 0.5$. Les graphiques présentés correspondent à l'utilisation de la variante $\theta = 0$ de la méthode de Nitsche non biaisée pour un paramètre de Nitsche $\gamma = \gamma_0/h$ avec h la taille de maille, γ_0 égal au module de Young du matériau (10^3 MPa pour le demi-anneau et 300 MPa pour le bloc) et l'utilisation de la stratégie d'appariement du raytracing.

Afin de pouvoir comparer les résultats obtenus à ceux de la littérature existante, le déplacement vertical du point milieu de l'anneau est tracé sur la figure 6 dans les deux cas, avec ou sans frottement. Les résultats obtenus avec Nitsche sont en très bon accord avec ceux produits dans [67] avec une formulation en lagrangien augmenté.

3.6.2 Tubes creux croisés avec auto-contact

Dans cet exemple, on étudie le contact entre deux tubes creux appuyés l'un sur l'autre et qui se croisent. Les tubes sont de longueur 100 mm, de diamètre extérieur 24 mm et d'épaisseur de paroi 0.8 mm. Le matériau est considéré néo-hookéen de module de Young $E_1 = 10^5$ MPa pour le tube du bas et $E_2 = 10^4$ MPa pour le tube du haut. Le coefficient de Poisson est de 0.3 pour les deux tubes. Des éléments hexaédriques quadratiques sont utilisés avec deux éléments dans l'épaisseur. Les maillages utilisés sont visibles sur la figure 7 dans laquelle sont représentées en vert les parties où le calcul a effectivement lieu, la symétrie du problème étant utilisée pour réduire la zone de calcul. Les extrémités des tubes sont soumises à des conditions de déplacement imposé, nul pour le tube du bas et vers le bas pour le tube du haut avec un déplacement total imposé de 40 mm divisé en 80 pas égaux de chargement. Ceci amène les deux tubes en contact et induit des déformations suffisamment larges pour observer de l'auto-contact à l'intérieur du tube du haut, comme le montre la figure 8. La variante $\theta = 0$ de la méthode de Nitsche non biaisée est utilisée avec comme surface de contact toutes les surfaces intérieures et extérieures des tubes. Le paramètre de Nitsche utilisé est toujours $\gamma = \gamma_0/h$ avec γ_0 le module de Young du solide sur lequel on intègre et h la taille de maille.

On peut voir sur la figure 8 que la condition d'auto-contact est correctement prise en compte malgré les très grandes déformations qui sont en jeu. Ici aussi, les résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus pour le lagrangien augmenté sur le même cas test dans [67].

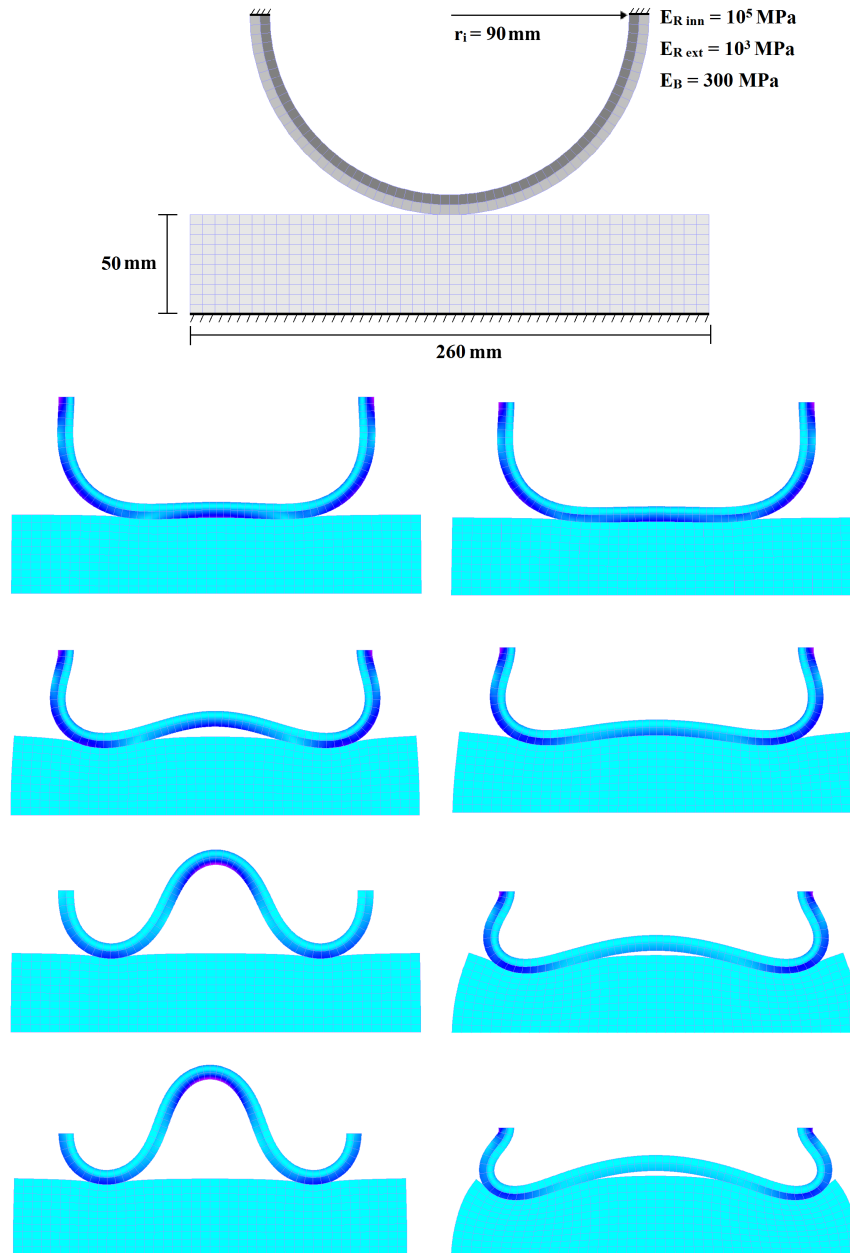


FIGURE 5: Déformation du demi-anneau élastique entrant en contact sans frottement (graphiques de gauche) et avec frottement pour $\mathcal{F} = 0.5$ (graphiques de droite) pour des éléments finis quadrilatéraux quadratiques, aux pas de chargement correspondant à 25, 45, 60 et 70 mm d'enfoncement.

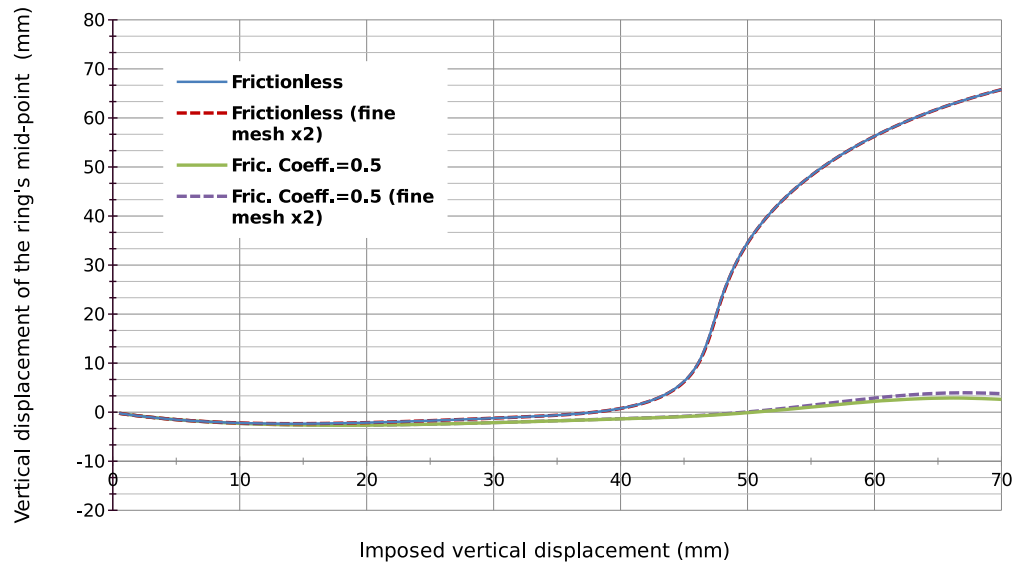


FIGURE 6: Déplacement vertical du point milieu du demi-anneau pour différentes tailles de maille.

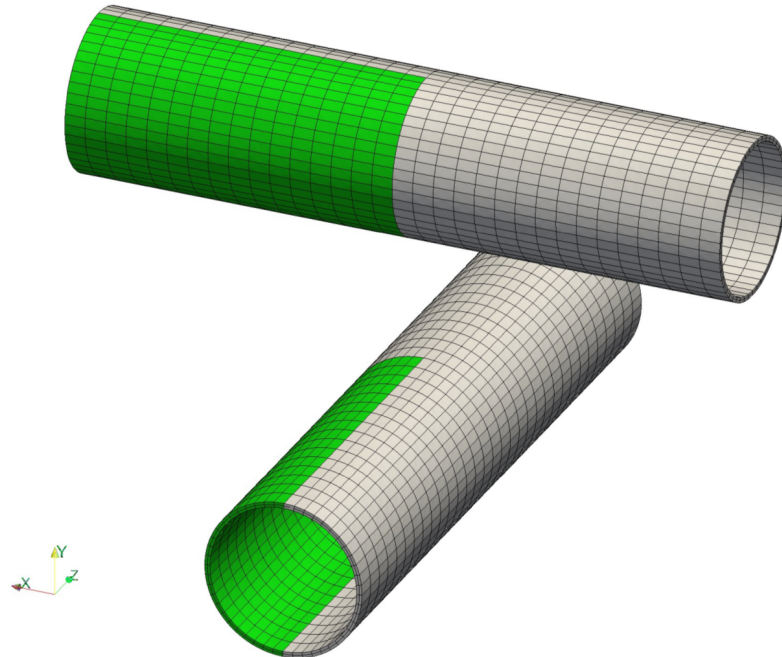


FIGURE 7: Géométrie et maillage des tubes creux dans leurs configurations non déformées.

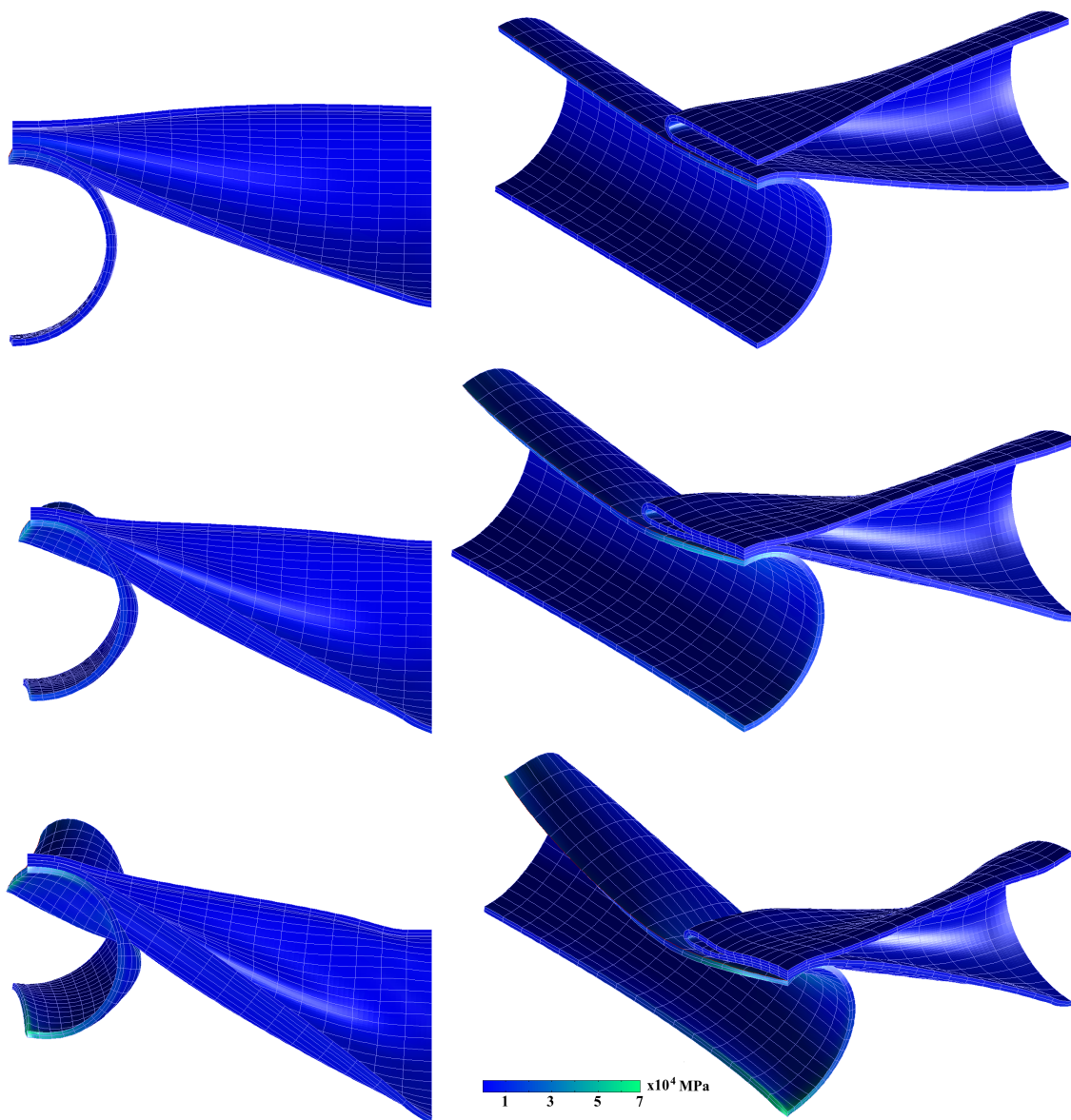


FIGURE 8: Déformation et contrainte de Von-Mises des deux tubes croisés. Cas sans frottement pour un enfoncement de 20, 30 and 40 mm, respectivement.

Remerciements

Nous tenons à remercier ici nos collaborateurs, Guillaume Drouet, Mathieu Fabre, Vanessa Lleras, Rabii Mlika et Konstantinos Poullos qui ont participé, de manière souvent décisive, aux travaux décrits dans ce chapitre.

Références

- [1] M. Abbas, G. Drouet, and P. Hild. The local average contact (LAC) method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 339 :488–513, 2018.
- [2] P. Alart. Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 76(1) :83–108, 1997.
- [3] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 92(3) :353–375, 1991.
- [4] C. Annavarapu, M. Hautefeuille, and J. E. Dolbow. A Nitsche stabilized finite element method for frictional sliding on embedded interfaces. Part I : Single interface. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 268 :417–436, 2014.
- [5] P. Antolin, A. Buffa, and M. Fabre. A priori error for unilateral contact problems with Lagrange multipliers and isogeometric analysis. *IMA J. Numer. Anal.*, 2019.
- [6] H. J. C. Barbosa and T. J. R. Hughes. Boundary Lagrange multipliers in finite element methods : error analysis in natural norms. *Numer. Math.*, 62(1) :1–15, 1992.
- [7] H. J. C. Barbosa and T. J. R. Hughes. Circumventing the Babuška-Brezzi condition in mixed finite element approximations of elliptic variational inequalities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 97(2) :193–210, 1992.
- [8] F. Ben Belgacem, P. Hild, and P. Laborde. Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 9(2) :287–303, 1999.
- [9] D. P. Bertsekas. *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, Inc., New York-London, 1982.
- [10] H. Brézis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).
- [11] E. Burman. A penalty-free nonsymmetric Nitsche-type method for the weak imposition of boundary conditions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 50(4) :1959–1981, 2012.
- [12] E. Burman and P. Hansbo. Deriving robust unfitted finite element methods from augmented Lagrangian formulations. In *Geometrically unfitted finite element methods and applications*, volume 121 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 1–24. Springer, Cham, 2017.
- [13] E. Burman, P. Hansbo, and M. G. Larson. Augmented Lagrangian finite element methods for contact problems. *preprint arXiv :1609.03326*, September 2016.
- [14] E. Burman, P. Hansbo, and M. G. Larson. The penalty-free Nitsche method and nonconforming finite elements for the Signorini problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 55(6) :2523–2539, 2017.
- [15] K. Cascavita, F. Chouly, and A. Ern. Hybrid High-Order discretizations combined with Nitsche’s method for Dirichlet and Signorini problems, 2019. In preparation.
- [16] F. Chouly. An adaptation of Nitsche’s method to the Tresca friction problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 411(1) :329–339, 2014.
- [17] F. Chouly, M. Fabre, P. Hild, R. Mlika, J. Pousin, and Y. Renard. An overview of recent results on Nitsche’s method for contact problems. In *Geometrically unfitted finite element methods and applications*, volume 121 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 93–141. Springer, Cham, 2017.

- [18] F. Chouly and P. Hild. A Nitsche-based method for unilateral contact problems : numerical analysis. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51(2) :1295–1307, 2013.
- [19] F. Chouly and P. Hild. On convergence of the penalty method for unilateral contact problems. *Appl. Numer. Math.*, 65 :27–40, 2013.
- [20] F. Chouly, P. Hild, V. Lleras, and Y. Renard. Nitsche-based finite element method for contact with Coulomb friction. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2017*, volume 126 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 839–847. Springer, Cham, 2019.
- [21] F. Chouly, P. Hild, V. Lleras, and Y. Renard. Nitsche method for contact with Coulomb friction. *In preparation*, 2019.
- [22] F. Chouly, P. Hild, and Y. Renard. Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche’s method for contact problems in elasticity : theory and numerical experiments. *Math. Comp.*, 84(293) :1089–1112, 2015.
- [23] P. W. Christensen. A semi-smooth Newton method for elasto-plastic contact problems. *Int. J. Solids Struct.*, 39(8) :2323–2341, 2002.
- [24] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Vol. I*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Three-dimensional elasticity.
- [25] P. G. Ciarlet. The finite element method for elliptic problems. In *Handbook of Numerical Analysis (eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions)*, volume II, pages 17–352. North Holland, 1991.
- [26] A. Curnier and P. Alart. A generalized Newton method for contact problems with friction. *J. Méc. Théor. Appl.*, 7(suppl. 1) :67–82, 1988.
- [27] A. Curnier, Q. C. He, and A. Klarbring. Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction. In *Contact Mechanics (eds. M. Raous, M. Jean and J.J. Moreau)*, pages 145–158. Springer, Boston, MA, 1995.
- [28] L. De Lorenzis, P. Wriggers, and G. Zavarise. A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method. *Comput. Mech.*, 49(1) :1–20, 2012.
- [29] I. Dione. Optimal error estimates of the unilateral contact problem in a curved and smooth boundary domain by the penalty method. *IMA J. Numer. Anal.*, 2019.
- [30] G. Drouet and P. Hild. Optimal convergence for discrete variational inequalities modelling Signorini contact in 2D and 3D without additional assumptions on the unknown contact set. *SIAM J. Numer. Anal.*, 53(3) :1488–1507, 2015.
- [31] G. Drouet and P. Hild. An accurate local average contact method for nonmatching meshes. *Numer. Math.*, 136(2) :467–502, 2017.
- [32] G. Duvaut and J. L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*, volume 21 of *Travaux et Recherches Mathématiques*. Dunod, Paris, 1972.
- [33] C. Eck, J. Jarušek, and M. Krbec. *Unilateral contact problems*, volume 270 of *Pure and Applied Mathematics (Boca Raton)*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [34] P. Farah, A. Popp, and W. A. Wall. Segment-based vs. element-based integration for mortar methods in computational contact mechanics. *Comput. Mech.*, 55(1) :209–228, 2015.
- [35] K. A. Fischer and P. Wriggers. Frictionless 2D contact formulations for finite deformations based on the mortar method. *Comput. Mech.*, 36(3) :226–244, 2005.
- [36] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [37] M. E. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*, volume 158 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc., New York-London, 1981.
- [38] T. Gustafsson, R. Stenberg, and J. Videman. Mixed and stabilized finite element methods for the obstacle problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 55(6) :2718–2744, 2017.
- [39] T. Gustafsson, R. Stenberg, and J. Videman. A stabilised finite element method for the plate obstacle problem. *preprint arXiv :1711.04166*, 2017.

- [40] J. Haslinger. Approximation of the Signorini problem with friction, obeying the Coulomb law. *Math. Methods Appl. Sci.*, 5(3) :422–437, 1983.
- [41] R. Hassani, P. Hild, I. R. Ionescu, and N. Sakki. A mixed finite element method and solution multiplicity for Coulomb frictional contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(41-42) :4517–4531, 2003.
- [42] P. Hild. Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184(1) :99–123, 2000.
- [43] P. Hild. On finite element uniqueness studies for Coulomb’s frictional contact model. *Appl. Math. Comp. Sci.*, 12(1) :41–50, 2002.
- [44] P. Hild. An example of nonuniqueness for the continuous static unilateral contact model with Coulomb friction. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(10) :685–688, 2003.
- [45] P. Hild. Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 57(2) :225–235, 2004.
- [46] P. Hild and Y. Renard. An error estimate for the Signorini problem with Coulomb friction approximated by finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(5) :2012–2031, 2007.
- [47] P. Hild and Y. Renard. A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of contact problems in elastostatics. *Numer. Math.*, 115(1) :101–129, 2010.
- [48] Q. Hu, F. Chouly, P. Hu, G. Cheng, and S. P. A. Bordas. Skew-symmetric Nitsche’s formulation in isogeometric analysis : Dirichlet and symmetry conditions, patch coupling and frictionless contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 341 :188–220, 2018.
- [49] M. Juntunen. On the connection between the stabilized Lagrange multiplier and Nitsche’s methods. *Numer. Math.*, 131(3) :453–471, 2015.
- [50] N. Kikuchi and J. T. Oden. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, volume 8 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1988.
- [51] J. Y. Kim and S. K. Youn. Isogeometric contact analysis using mortar method. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 89(12) :1559–1581, 2012.
- [52] A. Konyukhov and K. Schweizerhof. *Computational contact mechanics : geometrically exact theory for arbitrary shaped bodies*, volume 67. Springer Science & Business Media, 2012.
- [53] L. Krstulović-Opara, P. Wriggers, and J. Korelc. A C^1 -continuous formulation for 3D finite deformation frictional contact. *Comput. Mech.*, 29(1) :27–42, 2002.
- [54] K. Kunisch and G. Stadler. Generalized Newton methods for the 2D-Signorini contact problem with friction in function space. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(4) :827–854, 2005.
- [55] P. Laborde and Y. Renard. Fixed point strategies for elastostatic frictional contact problems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 31(4) :415–441, 2008.
- [56] C. Lacour, Y. Maday, and L. Cazabeau. Numerical quadratures and mortar methods. In *Computational Science for the 21st Century*, pages 119–128. John Wiley & Sons, 1997.
- [57] T. A. Laursen. *Computational contact and impact mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [58] T. A. Laursen and J. C. Simo. Algorithmic symmetrization of Coulomb frictional problems using augmented lagrangians. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 108(1-2) :133–146, 1993.
- [59] J. Lengiewicz, J. Korelc, and S. Stupkiewicz. Automation of finite element formulations for large deformation contact problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 85(10) :1252–1279, 2011.
- [60] R. Mlika. *Nitsche method for frictional contact and self-contact : mathematical and numerical study*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2018.
- [61] R. Mlika, Y. Renard, and F. Chouly. An unbiased Nitsche’s formulation of large deformation frictional contact and self-contact. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 325 :265–288, 2017.
- [62] J. Nitsche. Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36 :9–15, 1971.

- [63] R. W. Ogden. *Nonlinear elastic deformations*. Ellis Horwood Series : Mathematics and its Applications. Ellis Horwood Ltd., Chichester ; Halsted Press, New York, 1984.
- [64] V. Padmanabhan and T. A. Laursen. A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. *Finite Elem. Anal. Des.*, 37(3) :173–198, 2001.
- [65] A. Popp, A. Seitz, M. W. Gee, and W. A. Wall. Improved robustness and consistency of 3D contact algorithms based on a dual mortar approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 264 :67–80, 2013.
- [66] A. Popp, B. I. Wohlmuth, M. W. Gee, and W. A. Wall. Dual quadratic mortar finite element methods for 3D finite deformation contact. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(4) :B421–B446, 2012.
- [67] K. Poulios and Y. Renard. An unconstrained integral approximation of large sliding frictional contact between deformable solids. *Comput. Struct.*, 153 :75–90, 2015.
- [68] M. A. Puso and T. A. Laursen. A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193(45-47) :4891–4913, 2004.
- [69] Y. Renard. A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(2) :452–467, 2006.
- [70] Y. Renard. Generalized Newton’s methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 256 :38–55, 2013.
- [71] Y. Renard and K. Poulios. GetFEM : Automated FE modeling of multiphysics problems based on a generic weak form language, 2019. Submitted.
- [72] R. T. Rockafellar. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming. *SIAM J. Control*, 12 :268–285, 1974.
- [73] R. T. Rockafellar. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming. *Math. Oper. Res.*, 1(2) :97–116, 1976.
- [74] R. T. Rockafellar and R. J. B. Wets. *Variational analysis*, volume 317 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [75] R. A. Sauer and L. De Lorenzis. An unbiased computational contact formulation for 3D friction. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 101(4) :251–280, 2015.
- [76] A. Seitz. *Computational methods for thermo-elasto-plastic contact*. PhD thesis, Technische Universität München, 2019.
- [77] A. Seitz, P. Farah, J. Kremheller, B. I. Wohlmuth, W. A. Wall, and A. Popp. Isogeometric dual mortar methods for computational contact mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 301 :259–280, 2016.
- [78] A. Seitz, W. A. Wall, and A. Popp. Nitsche’s method for finite deformation thermomechanical contact problems. *Comput. Mech.*, 2019.
- [79] J. C. Simo and T. A. Laursen. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comput. Struct.*, 42(1) :97–116, 1992.
- [80] G. Stadler. *Infinite-dimensional semi-smooth Newton and augmented lagrangian methods for friction and contact problems in elasticity*. PhD thesis, University of Graz, 2004.
- [81] M. Stadler, G. A. Holzapfel, and J. Korelc. C^n continuous modelling of smooth contact surfaces using NURBS and application to 2D problems. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 57(15) :2177–2203, 2003.
- [82] R. Stenberg. On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method. *J. Comput. Appl. Math.*, 63(1-3) :139–148, 1995.
- [83] İ. Temizer, P. Wriggers, and T. J. R. Hughes. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200(9-12) :1100–1112, 2011.
- [84] İ. Temizer, P. Wriggers, and T. J. R. Hughes. Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 209/212 :115–128, 2012.

- [85] B. I. Wohlmuth. Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems. *Acta Numer.*, 20 :569–734, 2011.
- [86] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. Wiley, 2002.
- [87] P. Wriggers, W. T. Rust, and B. D. Reddy. A virtual element method for contact. *Comput. Mech.*, 58(6) :1039–1050, 2016.