Espaces hermitiens :

Rappel : On note $A^* = {}^t\bar{A}$. Matrice hermitienne : $A^* = A$. Matrice antihermitienne : $A^* = -A$. Matrice normale : $A^*A = AA^*$.

Exercice 1 *On pose $E = \mathbb{C}^3$, et on définit l'application q de E dans E par :*

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\bar{x_1}x_2 - ix_1\bar{x_2} + 2ix_2\bar{x_3} - 2i\bar{x_2}x_3$$

a) Démontrer qu'il existe une forme hermitienne $f : E \times E \to E$ telle que pour tout x, $f(x, x) = q(x)$.

b) Calculer la matrice de f dans la base canonique.

c) Calculer une base orthonormale de f.

Correction

a) Directement, ou matrice de q, ou formule de polarisation (mais c'est galère à calculer). On obtient : $f(x, y) = x_1\bar{y_1} + 3x_2\bar{y_2} + 6x_3\bar{y_3} + i\bar{x_1}y_2 - i\bar{x_2}y_1 + 2i\bar{x_3}y_2 - 2i\bar{x_2}y_3$. La forme f est évidemment hermitienne (vu son expression).

b) La matrice de f est :

[1 i 0]
[-i 3 -2i]
[0 2i 6]

c) On part de la base canonique, et on applique Gram-Schmidt :

$e_1 = (1, 0, 0)$ est le premier vecteur de la base.

Pour calculer e_2, on projette $(0, 1, 0)$ sur l'orthogonal de e_1, donc on cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0) = (\lambda, 1, 0)$ soit orthogonal à $(1, 0, 0)$. On résoud $f((\lambda, 1, 0), (1, 0, 0)) = 0$, et on trouve $\lambda = -i$.

Pour e_3, on projette $(0, 0, 1)$ sur l'orthogonal de e_1 et e_2, donc on cherche λ et μ tels que $(0, 0, 1) + \lambda e_1 + \mu e_2$ soit orthogonal à e_1 et e_2. On résoud comme précédemment (sauf que là, on a deux équations au lieu d'une) et on obtient $\lambda = 0$ et $\mu = i/2$. Finalement, on normalise les trois vecteurs obtenus, et on trouve la base orthonormée suivante :

$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (-i/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), e_3 = 3/\sqrt{2} \times (1/2, i/2, 1)$

(A condition que mes calculs soient justes, mais en tout cas l'idée est là.)

Exercice 2 *Soit $E = \mathbb{C}^3$ avec sa structure hermitienne canonique. Soit F le sous-espace d'équation $x_1 - x_2 + ix_3$.*

a) Calculer l'orthogonal de F.

b) Calculer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

c) Trouver une base orthonormale de F.

Correction

a) Un vecteur orthogonal à F est $(1, -1, i)$. L'orthogonal de F est la droite engendrée par ce vecteur (pour des raisons de dimension).

b) Comme dans la méthode de Gram-Schmidt : on cherche la projection de $(1, 0, 0)$ sur F parallèlement à $(1, -1, i)$. On calcule donc le produit scalaire de $(1, 0, 0) + \lambda(1, -1, i)$ et de $(1, -1, i)$, et lorsque ce produit scalaire est nul, on obtient la bonne valeur de λ. Au final, on a $(1, 0, 0)$ projeté sur $(0, 1, -i)$, et ainsi de suite. Sauf erreur de calcul, la matrice de la projection orthogonale est alors :

[0 1 i]
[1 0 -i]
[-i i 0]

c) Méthode de Gram-Schmidt appliquée à une base quelconque de F. Comme il y a plein de bases possibles, je n'écris pas de calculs, mais il n'y a qu'une seule étape dans Gram-Schmidt ici de toute façon, donc c'est facile de contrôler les calculs...

Exercice 3 *L'ensemble des matrices hermitiennes est-il un sous-$\mathbb{C}$-espace de $M_n(\mathbb{C})$?*
Démontrer que c'en est un sous-$\mathbb{R}$-espace, et calculer sa dimension.
Démontrer que l'ensemble des matrices antihermitiennes ($A^* = -A$) en est un supplémentaire.

Correction
Ce n'est pas un sous-espace complexe. Par exemple, l'identité est hermitienne, mais i fois l'identité ne l'est pas.

C'est un sous-espace réel (facile). Sa dimension (sur $\mathbb{R}$, donc) est $n+n(n-1) = n^2$: la diagonale doit être réelle, d'où le n, puis il faut choisir un nombre complexe (i.e. deux nombres réels) pour chaque élément de la partie triangulaire supérieure, c'est-à-dire $n(n-1)/2$ nombres complexes, ou $n(n-1)$ nombres réels.

Si A est hermitienne, et B est antihermitienne, alors $A+B = 0$ implique $A-B = 0$ (en passant à l'étoile), donc $A = 0$, et $B = 0$. Donc, la somme est directe. La dimension des antihermitiennes est n^2 également (la diagonale doit être imaginaire pure, et pareil pour le reste). Donc, ces deux espaces sont supplémentaires.

Exercice 4 *Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe un unique couple de matrices hermitiennes (H, H') telles que $M = H + iH'$. Démontrer que M est normale si et seulement si $HH' = H'H$.*

Correction
Existence : On cherche donc une matrice hermitienne H telle que $M - H$ soit antihermitienne (i.e. $A^* = -A$) puisque iH' est antihermitienne lorsque H' est hermitienne. Donc $(M - H)^* = M^* - H = H - M$, d'où $H = (M + M^*)/2$, et $H' = (M - H)/i = (M^* - M)/2i$, donc existence, et paf !

Unicité : Si H, H' et K, K' sont comme ça, on obtient $H - H' = i(K' - K)$, donc $H - H'$ est à la fois hermitienne et antihermitienne, donc est nulle. Donc $H = H'$ et $K = K'$, unicité, et boum ! (En fait, la démonstration de l'unicité est déjà plus ou moins contenue dans celle de l'existence ; voyez-vous pourquoi ?)

On a alors $M = H + iH'$ et $M^* = H - iH'$. On fait le calcul MM^* et M^*M, et on voit directement l'équivalence demandée.

Exercice 5 *Soit E un espace hermitien (de dimension finie), et $u \in L(E)$. Si u est normal, démontrer que $ker(u) = (im(u))^\perp$.*

Correction
Cet exercice est utilisé dans l'exercice 8.
Il peut être utile de rappeler (ou de redémontrer) que $im(u)^\perp = ker(u^*)$.

On doit donc démontrer que $ker(u) = ker(u^*)$. Pour des raisons de dimension (u et u^* ont même rang, donc leurs noyaux ont même dimension), il suffit de démontrer une inclusion. Soit $x \in ker(u)$. Comme u est normal, u et u^* commutent, donc u^* stabilise $ker(u)$ (ils doivent savoir ça depuis le cours d'algèbre 4 sur la réduction, sinon c'est facile à vérifier directement). Donc $u^*(x) \in ker(u) = im(u^*)^\perp$, et $u^*(x) \in im(u^*)$. Donc $u^*(x)$ est forcément nul, donc $x \in ker(u^*)$, ce qui démontre l'inclusion cherchée.

Exercice 6 *Soit E un espace hermitien (de dimension finie). On suppose que l'endomorphisme f est tel que pour tout $x \in E$, on ait $(f(x), x) = 0$.*

a) Démontrer que pour tous $x, y \in E$, on a $(f(x), y) = 0$.

b) En déduire que f est l'endomorphisme nul.

c) Peut-on démontrer la même chose dans le cas euclidien ?

<u>Correction</u>

a) On développe les expressions $(f(x+y), x+y) = 0$ et $(f(x+iy), x+iy) = 0$. On obtient respectivement (après avoir supprimé les termes nuls) : $(f(x), y)+(f(y), x) = 0$ et $(f(x), y)-(f(y), x) = 0$, et en additionnant les deux égalités, on trouve $(f(x), y) = 0$.

b) On peut le voir par exemple en disant que pour tout x, $(f(x), f(x)) = 0$, donc $f(x) = 0$.

c) Dans le cas réel, ce n'est plus vrai : par exemple en dimension 2, la rotation d'angle $\pi/2$ envoie chaque vecteur sur un vecteur orthogonal, mais n'est évidemment pas nulle.

Exercice 7 *a) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Démontrer que A^*A est la matrice d'un produit scalaire réel (euclidien). (ici, l'étoile, c'est juste la transposée)*

b) Est-ce que l'énoncé du a) avec $GL_n(\mathbb{C})$ est vrai ?

<u>Correction</u>

a) La matrice A^*A est symétrique et inversible de manière évidente. Il reste donc à démontrer que la forme bilinéaire associée est positive, puisqu'elle sera alors symétrique définie positive (donc un produit scalaire).

La forme associée associe à un vecteur (réel) X le vecteur $X^*A^*AX = (AX)^*(AX)$, qui est un réel positif (somme des carrés des modules des coefficients de AX). Ceci achève la démonstration.

b) Oui, si la conclusion est d'obtenir un produit scalaire complexe (hermitien). La démonstration est la même.

Exercice 8 *Soit u un endomorphisme normal d'un espace hermitien E.*

Démontrer que $Im(u) = (Ker u)^{\perp}$. (voir exercice 5)

Si v est un autre endomorphisme normal de E, démontrer que $u \circ v = 0$ si et seulement si $v \circ u = 0$.

<u>Correction</u>

Il suffit clairement de démontrer une seule implication. On prend u et v normaux, et on suppose $u \circ v = 0$. Alors $im(v) \subset ker(u) = (im(u))^{\perp}$. On passe à l'orthogonal dans cette relation, ce qui inverse l'ordre de l'inclusion : $im(u) \subset im(v)^{\perp} = ker(v)$. Donc $v \circ u = 0$.