
SUR LES ORBITES D'UN SOUS-GROUPE SPHÉRIQUE DANS LA VARIÉTÉ DES DRAPEAUX

PAR NICOLAS RESSAYRE

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe algébrique complexe réductif et connexe, B un sous-groupe de Borel de G , et H un sous-groupe sphérique de G .

Soit X un plongement $G \times G$ -équivariant de G . Nous savons que $B \times H$ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans G ; nous montrons qu'il n'en a qu'un nombre fini dans X . Soit \overline{V} l'adhérence dans X d'une orbite de $B \times H$ dans G et \overline{O} l'adhérence d'une orbite de $G \times G$ dans X . Si X est toroïdal, nous montrons que l'intersection $\overline{V} \cap \overline{O}$ est propre dans X et la décrivons ensemblistement. Si de plus X est lisse, nous calculons les multiplicités d'intersections qui sont des puissances de 2. Enfin, si X est toroïdal, lisse et complet, nous exprimons la classe de cohomologie de \overline{V} comme une combinaison linéaire des classes d'adhérence dans X d'orbites de $B \times B$ dans G . Nous utilisons la cohomologie B -équivariante pour montrer ce dernier résultat.

Soit Y un plongement lisse G -équivariant et toroïdal de G/H et \overline{O} l'adhérence d'une orbite de G dans Y . Soit \overline{V} l'adhérence dans Y d'une orbite de B dans G/H . Dans [Bri01, après la proposition 6], M. Brion demande si chaque composante irréductible de $\overline{V} \cap \overline{O}$ contient des points lisses de \overline{V} . Dans la dernière partie de cet article nous donnons un exemple qui répond à cette question par la négative.

NICOLAS RESSAYRE, Université Montpellier II, Département de Mathématiques, Case courrier 051-Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France
E-mail : ressayre@math.univ-montp2.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14M15, 14M17, 14C17, 55N91.

Mots clefs. — plongement de groupes, variétés sphériques, adhérences d'orbites, variété des drapeaux, cohomologie équivariante .

ABSTRACT (*On the orbits of a spherical subgroup in the flag manifold*)

Let G be a complex reductive algebraic group, B be a Borel subgroup of G and H be a spherical subgroup of G .

Let X be a $G \times G$ -equivariant embedding of G . We know that $B \times H$ have finitely many orbits in G ; we show that it has finitely many ones in X . Let \overline{V} be the closure in X of a $(B \times H)$ -orbit in G , and $\overline{\mathcal{O}}$ be the closure of a $(G \times G)$ -orbit in X . If X is toroidal, we show that the intersection $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}}$ is proper in X and we describe this intersection. If in addition X is smooth, we determine the intersection multiplicities of $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}}$, which are powers of 2. If X is toroidal, smooth and complete, we write the class of cohomology of \overline{V} as a linear combination of the classes of the closures in X of the $(B \times B)$ -orbits in G . The proof of this last statement uses B -equivariant cohomology.

Let Y be a smooth G -equivariant embedding of G/H and $\overline{\mathcal{O}}$ be the closure of a G -orbit in Y . Let \overline{V} be the closure in Y of a B -orbit in G/H . In [Bri01, just after Proposition 6], M. Brion asks if each irreducible component of $\overline{V} \cap \overline{\mathcal{O}}$ intersects the set of the smooth points in \overline{V} . In the last part of this article, we give an example which answers no to this question.

1. Introduction

Soit G un groupe algébrique complexe réductif et connexe, et B un sous-groupe de Borel de G . Soit H un sous-groupe fermé de G . On suppose que H est sphérique c'est-à-dire (voir [Bri86]) que l'ensemble $\mathbf{H}(G/B)$ des orbites de H dans G/B est fini. Ces orbites et leurs adhérences jouent un rôle important en théorie des représentations (voir par exemple [Wol93]). Par ailleurs, les classes des adhérences d'orbites de B dans les G -variétés sphériques (c'est-à-dire les variétés normales, munies d'une action de G et ne contenant qu'un nombre fini d'orbites de B) sont des générateurs naturels de la cohomologie de ces variétés, supposées lisses et complètes. Il est donc intéressant de comprendre l'ensemble $\mathbf{B}(G/H)$ des orbites de B dans G/H . Ce dernier est en bijection naturelle avec $\mathbf{H}(G/B)$.

Fixons un tore maximal T de G inclus dans B . Si V est une orbite de B dans G/H , on note \overline{V} son adhérence dans G/H . Dans [RS90], [Kno95] et [Bri01], on construit un graphe orienté $\Gamma(G/H)$ dont les sommets sont les éléments de $\mathbf{B}(G/H)$ et dont les arêtes, qui peuvent être simples ou doubles, sont étiquetées par les racines simples de G . Soit α une racine simple et P_α le sous-groupe parabolique minimal de G et contenant B associé à α . Soit V et V' deux orbites de B dans G/H . Une arête étiquetée par α monte de V à V' si et seulement si $\overline{V} \neq P_\alpha \cdot \overline{V} = \overline{V}'$. Alors, l'application naturelle $P_\alpha \times_B \overline{V} \rightarrow \overline{V}'$ est génériquement finie de degré 1 ou 2; ceci détermine si l'arête est simple ou double.

Des travaux de M. Brion mais aussi de S. Pin ont montré que ce graphe $\Gamma(G/H)$ apporte des informations sur la lissité, la normalité, la classe de

cohomologie des adhérences d'orbites de H dans G/B (voir [Bri98, Bri01] et [Pin01]). Comprendre les interactions entre les propriétés combinatoires, géométriques et topologiques de l'ensemble $\mathbf{H}(G/B)$ est un sujet vaste auquel cet article apporte une modeste contribution.

On considère l'action de $G \times G$ sur G par multiplication à gauche et à droite. L'ensemble $\mathbf{B}(G/H)$ est en bijection naturelle avec l'ensemble $\mathbf{BH}(G)$ des orbites de $B \times H$ dans G . Dans cette introduction, on utilisera implicitement les bijections naturelles entre les trois ensembles $\mathbf{H}(G/B)$, $\mathbf{B}(G/H)$ et $\mathbf{BH}(G)$. Dans cet article, on s'intéresse aux éléments de $\mathbf{BH}(G)$ et surtout à leurs adhérences dans les plongements $G \times G$ -équivariant de G . Soit X un tel plongement. Notre premier résultat (voir le corollaire 4.7) est le

THÉORÈME A. — *L'ensemble des orbites de $B \times H$ dans X est fini.*

Lorsque $H = B$, ce résultat était déjà connu puisque plus généralement, toute variété sphérique ne contient qu'un nombre fini d'orbite d'un sous-groupe de Borel. Simultanément à la rédaction du présent article, T.A. Springer a paramétré les orbites de $B \times B$ dans le plongement canonique de G (supposé semi-simple adjoint) (voir [Spr02]). Ici, dans le cas où X est toroïdal (voir le paragraphe 4.1.1 pour une définition précise), nous paramétrons (voir la proposition 4.6) les orbites de $B \times H$ dans X .

Soit V_G dans $\mathbf{BH}(G)$. Notons $\overline{V_G}^X$ l'adhérence de V_G dans X . Nous obtenons des résultats sur les sous-variétés $\overline{V_G}^X$ dès que X est toroïdal. Cependant, par soucis de simplicité, nous supposons dans l'introduction, que G est semi-simple adjoint et que X est le plongement canonique de G (voir [DCP83]). Notons Z l'unique orbite fermée de $G \times G$ dans X . Celle-ci est isomorphe à $G/B \times G/B$, ou encore à $G/B^- \times G/B$ où B^- est le sous-groupe de Borel de G contenant T et opposé à B .

Nous avons encore besoin de notations pour énoncer nos résultats. Soit W le groupe de Weyl de T et U le radical unipotent de B . Pour tout w dans W , on pose $U_w = U \cap wUw^{-1}$ et $B_w = B \cap wBw^{-1}$.

Considérons un chemin γ de $\Gamma(G/H)$ qui monte à partir du sommet correspondant à V_G . Soit $V'_{G/B}$ l'orbite de H dans G/B associée au sommet le plus haut de γ . On note $D(\gamma)$ le nombre d'arêtes doubles le long de γ et $w(\gamma)$ le produit dans W des réflexions simples associées aux étiquettes de γ . Le théorème 4.9 de cet article décrit un ouvert de $\overline{V_G}^X$ associé à $w(\gamma)$. Dans le contexte de l'introduction, on obtient le

THÉORÈME B. — *On reprend les notations ci-dessus.*

Alors, il existe un ouvert $\Omega_{V,w(\gamma)}$ de \overline{V}_G^X stable par $B_{w(\gamma)} \times H$ et une fibration localement triviale $B_{w(\gamma)}$ -invariante et H -équivariante $\psi : \Omega_{V,w(\gamma)} \rightarrow V'_{G/B}$.

De plus, il existe une sous-variété $S_{V,w(\gamma)}$ de $\Omega_{V,w(\gamma)}$ stable par T , telle que l'action de $U_{w(\gamma)}$ induise un isomorphisme de $U_{w(\gamma)} \times S_{V,w(\gamma)}$ sur la fibre de ψ .

Enfin, la variété $S_{V,w(\gamma)}$ a $2^{D(\gamma)}$ composantes irréductibles ; chacune est isomorphe à l'espace affine de dimension rang de G et intersecte Z suivant l'unique point fixe de $B^- \times B$ dans Z .

Le théorème 4.10 décrit l'intersection de \overline{V}_G^X et de l'adhérence d'une orbite de $G \times G$ dans X . Dans le cadre de l'introduction, ce dernier implique le

THÉORÈME C. — *Rappelons que Z est canoniquement isomorphe à $G/B^- \times G/B$. On a :*

- (1) *Les sous-variétés \overline{V}_G^X et Z s'intersectent proprement dans X .*
- (2) *Les composantes irréductibles de $\overline{V}_G^X \cap Z$ sont les adhérences dans $G/B^- \times G/B$ des orbites de $B \times H$*

$$BwB^-/B^- \times V'_{G/B},$$

telles que w s'écrit $w(\gamma)$ pour un chemin γ dans $\Gamma(G/H)$ qui monte de V_G à une orbite $V'_{G/B}$ de H dans G/B .

- (3) *La multiplicité de l'intersection $\overline{V}_G^X \cap Z$ le long de $\overline{Bw(\gamma)B^-}/B^- \times \overline{V'_{G/B}}$ est $2^{D(\gamma)}$.*

Sous certaines hypothèses, le théorème 4.13 de cet article donne une expression pour la classe $[\overline{V}_G^X]$ de cohomologie $B \times \{1\}$ -équivariante (ou $T \times \{1\}$ -équivariante) de \overline{V}_G^X à coefficients rationnels. Ici, ceci nous donne le

THÉORÈME D. — *Dans $H^*_{B \times \{1\}}(X)$, on a :*

$$[\overline{V}_G^X] = \sum_{w=w(\gamma)} 2^{D(\gamma)} [\overline{Bw^{-1}B^-}],$$

où la somme porte sur tous les chemins γ issus de V_G .

Remarquons que la formule du théorème D est valable dans la cohomologie ordinaire $H^*(X)$ de X . En revanche, la démonstration faite en 4.5 utilise fortement la cohomologie équivariante.

Considérons un plongement lisse G -équivariant et toroïdal Y de G/H et \mathcal{O} une orbite de G dans Y . Soit V une orbite de B dans G/H . Dans [Bri01, après la proposition 6], M. Brion demande si chaque composante irréductible de $\overline{V}^Y \cap \overline{\mathcal{O}}^Y$ contient des points lisses de \overline{V}^Y . Dans la dernière partie de cet article nous répondons à cette question par la négative.

En effet, nous considérons l'unique orbite fermée V d'un sous-groupe de Borel B dans l'espace homogène $\mathrm{PSL}(4)/\mathrm{PSO}(4)$. Soit Y le plongement canonique de $\mathrm{PSL}(4)/\mathrm{PSO}(4)$ et Z l'unique orbite fermée de $\mathrm{PSL}(4)$ dans Y . Le dernier résultat de cet article (théorème 5.1 dans le corps du texte) est le :

THÉORÈME E. — *Avec les notations ci-dessus, l'intersection $Z \cap \overline{V}^Y$ a une composante irréductible constituée de points singuliers de \overline{V}^Y .*

La majeure partie de cet article (les théorèmes A, B, C et D) étudie les adhérences d'orbites de $B \times H$ dans les plongements de G . Ce travail s'inspire de celui de M. Brion (voir [Bri01]) sur les adhérences d'orbites de B dans les plongements de G/H . Par exemple, le théorème B (ou le théorème 4.9 ci-dessous) est l'analogue de la proposition 6 de [Bri01]. On peut remarquer que la description de la variété $S_{V,w(\gamma)}$ du théorème B est plus précise que celle de la variété $S_{Y,w}$ de M. Brion. Il est par exemple facile de déterminer le lieu non lisse (ou non normal) de $S_{V,w(\gamma)}$. Le théorème C (ou 4.10) est l'analogue du théorème 1 de [Bri01]. Avec les notations du théorème C, une différence notable est qu'ici tous les chemins dans $\Gamma(G/H)$ issus de V_G interviennent dans la description de $\overline{V}_G^X \cap Z$; alors que, dans la situation étudiée par M. Brion seuls ceux arrivant à l'orbite ouverte comptent.

Dans [Res02], j'ai montré que certains plongements Y de G/H s'obtiennent comme quotient géométriques par H d'ouverts de plongements X de G . Ainsi, sous certaines hypothèses, les adhérences d'orbites de B dans Y sont des quotients géométriques d'ouverts d'adhérences d'orbites de $B \times H$ dans X . Ceci est un lien explicite entre le travail de M. Brion [Bri01] et cet article. Il est donc permis de penser que ce travail peut aider à mieux comprendre les adhérences d'orbites de B dans des plongements de G/H . Par exemple, ce point de vue m'a conduit à examiner l'exemple de la section 5.

Remerciements. Je tiens à remercier M. Brion pour ses encouragements et sa lecture attentive de versions préliminaires à cet article. Je voudrais également remercier S. Pin pour nos nombreuses et utiles discussions.

2. Le graphe associé aux orbites de H dans \mathcal{B}

2.1. — Soit G un groupe algébrique réductif connexe sur \mathbb{C} et \mathcal{B} la variété des drapeaux de G . Soit H un sous-groupe algébrique de G qui a une orbite dense dans \mathcal{B} ; on dit alors que H est *sphérique*. Dans cet article, nous nous intéressons à l'ensemble $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ des orbites de H dans \mathcal{B} . En fait, cet ensemble est fini (voir [Bri86], [Vin86] ou [Kno95]).

Rappelons brièvement comment on construit un graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$. Le point de vue choisi ici est différent de celui de

l'introduction ou de [Bri01]. Il est cependant facile de voir que ces constructions sont équivalentes.

Considérons l'ensemble Δ des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques non résolubles minimaux de G . Si α appartient à Δ , on note \mathcal{P}_α le G -espace homogène d'isotropie α . Alors, il existe une unique application G -équivariante

$$\phi_\alpha : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{P}_\alpha.$$

Remarquons que les fibres de ϕ_α sont isomorphes à \mathbb{P}^1 .

Soit V_α une orbite de H dans \mathcal{P}_α et v un point de V_α . Chaque orbite de H dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ intersecte $\phi_\alpha^{-1}(v)$ suivant une orbite du stabilisateur H_v de v dans H . Considérons le morphisme

$$\theta : H_v \longrightarrow \text{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v)) \simeq \text{PSL}(2)$$

induit par l'action de H_v sur $\phi_\alpha^{-1}(v)$. Comme l'ensemble $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ est fini, H_v n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(v)$. Autrement dit, l'image de θ est un sous-groupe sphérique de $\text{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$. Il y a quatre possibilités :

Type SL : θ est surjective. Alors, $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ est une orbite de H .

Type T : $\text{Im}\theta$ est un tore maximal de $\text{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$. Alors, H a trois orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$: une ouverte et deux de codimension 1.

Type N : $\text{Im}\theta$ est le normalisateur d'un tore maximal de $\text{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$. Alors, H a deux orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$: une ouverte et une de codimension 1.

Type U : θ non surjective et $\text{Im}\theta$ contient un sous-groupe unipotent non trivial de $\text{Aut}(\phi_\alpha^{-1}(v))$. Alors, H a deux orbites dans $\phi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$: une ouverte et une de codimension 1.

Soit $V_\mathcal{B}$ une orbite de H dans \mathcal{B} . On dit que α *monte* $V_\mathcal{B}$ si $V_\mathcal{B}$ est strictement inclus dans $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_\mathcal{B}))$; alors $V_\mathcal{B}$ est de codimension 1 dans $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_\mathcal{B}))$. Si $V'_\mathcal{B}$ est l'orbite ouverte de H dans $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(V_\mathcal{B}))$, on dit que α *monte* $V_\mathcal{B}$ *sur* $V'_\mathcal{B}$. Si α monte $V_\mathcal{B}$, la restriction de ϕ_α à $V_\mathcal{B}$ est fini. De plus, son degré $d(V_\mathcal{B}, \alpha)$ vaut 1 pour les types T et U et vaut 2 pour le type N .

2.2. — On construit un graphe orienté $\Gamma(G/H)$ comme suit :

DÉFINITION 2.1. — Les sommets de $\Gamma(G/H)$ sont les éléments de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$. Le sommet $V_\mathcal{B}$ est l'origine d'une arête indexée par α et d'extrémité $V'_\mathcal{B}$ si et seulement si α monte $V_\mathcal{B}$ sur $V'_\mathcal{B}$. De plus, cette arête est simple (resp. double) si $d(V_\mathcal{B}, \alpha)$ vaut 1 (resp. 2).

D'après ce qui précède, tout graphe $\Gamma(G/H)$ est construit à partir des quatre « briques élémentaires » de la figure 1. Les sommets de chacune de ces briques sont les orbites de H dans la préimage d'une même orbite de H dans \mathcal{P}_α .

Dans la section 5, nous donnons un exemple de graphe $\Gamma(G/H)$. Dans [Bri01], M. Brion en donne plusieurs autres.

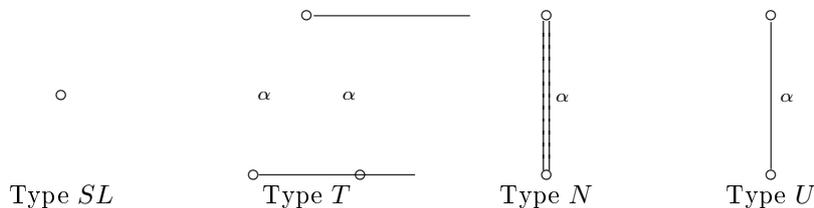


FIGURE 1. Briques élémentaires de $\Gamma(G/H)$.

2.3. — Notons \mathcal{H} le G -espace homogène d'isotropie H . Fixons un sous-groupe de Borel B de G tel que BH est dense dans G (on dira que B est *opposé* à H). Notons que B est unique à conjugaison par un élément de H près. Si V_B appartient à $\mathbf{H}(\mathcal{B})$, on pose :

$$V_{\mathcal{H}} := \{gH/H : g^{-1}B/B \in V_B\}.$$

Alors, $V_{\mathcal{H}}$ est une orbite de B dans \mathcal{H} et l'application $V_B \mapsto V_{\mathcal{H}}$ est une bijection de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ sur l'ensemble $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ des orbites de B dans \mathcal{H} .

2.4. — Soit T un tore maximal de B et W le groupe de Weyl de T . Tout α dans Δ a un unique représentant P_{α} contenant B . De plus, il existe un unique s_{α} dans W tel que $Bs_{\alpha}B$ soit dense dans P_{α} ; ce s_{α} est une réflexion simple de W . Enfin, l'application $\Delta \rightarrow W$, $\alpha \mapsto s_{\alpha}$ est une bijection de Δ sur l'ensemble des réflexions simples de W .

Soit $V_{\mathcal{H}}$ dans $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ et α dans Δ . Le groupe B agit sur $P_{\alpha} \times V_{\mathcal{H}}$ par : $b.(p, v) = (pb^{-1}, bv)$ (avec des notations évidentes). Alors le quotient de $P_{\alpha} \times V_{\mathcal{H}}$ par B existe et est noté $P_{\alpha} \times_B V_{\mathcal{H}}$ (voir l'annexe 6). On note $[p : v]$ la classe de (p, v) dans $P_{\alpha} \times_B V_{\mathcal{H}}$ si $p \in P_{\alpha}$ et $v \in V_{\mathcal{H}}$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha} : P_{\alpha} \times_B V_{\mathcal{H}} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ [p : v] &\longmapsto pv. \end{aligned}$$

Soit $V'_{\mathcal{H}}$ l'orbite ouverte de B dans l'image de π_{α} . Notons V_B et V'_B les orbites de H dans \mathcal{B} correspondant à $V_{\mathcal{H}}$ et $V'_{\mathcal{H}}$. On montre aisément que α monte V_B sur V'_B si et seulement si π_{α} est finie sur son image. Dans ce cas, le degré de π_{α} est $d(V_B, \alpha)$. Ceci nous conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. — Soit $V_{\mathcal{H}}$ et $V'_{\mathcal{H}}$ dans $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ et w dans W . On dit que w *monte* $V_{\mathcal{H}}$ sur $V'_{\mathcal{H}}$ si l'application (propre)

$$\begin{aligned} \pi_w : \overline{BwB} \times_B \overline{V_{\mathcal{H}}} &\longrightarrow \overline{V'_{\mathcal{H}}} \\ [p : v] &\longmapsto pv. \end{aligned}$$

est surjective et génériquement finie. On note $d(V_{\mathcal{H}}, w)$ le degré de π_w .

3. Orbites de $B \times H$ dans G

3.1. — On munit G de l'action de $G \times G$ définie par : $(g_1, g_2).g = g_1 g g_2^{-1}$ pour tout g, g_1 et g_2 dans G . On considère la restriction de cette action à $B \times H$ et on note $\mathbf{BH}(G)$ l'ensemble des orbites de $B \times H$ dans G . Si $V_B \in \mathbf{H}(\mathcal{B})$, on pose

$$V_G = \{g \in G : g^{-1}B/B \in V_B\}.$$

Alors, $V_B \mapsto V_G$ est une bijection de $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ sur $\mathbf{BH}(G)$.

3.2. — Notons \mathcal{V} l'ensemble des triplets $(V_B, V_{\mathcal{H}}, V_G) \in \mathbf{H}(\mathcal{B}) \times \mathbf{B}(\mathcal{H}) \times \mathbf{BH}(G)$ dont les trois composantes coïncident via les bijections des paragraphes 2.3 et 3.1. Par exemple, le triplet $V^\circ := (H.B/B, B.H/H, BH)$ est dans \mathcal{V} ; on l'appelle *l'orbite ouverte*. Si V est un élément de \mathcal{V} , alors V_B (resp. $V_{\mathcal{H}}$ et V_G) désigne la projection de V sur $\mathbf{H}(\mathcal{B})$ (resp. $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ et $\mathbf{BH}(G)$). Soit V et V' dans \mathcal{V} et w dans W . Nous dirons que w *monte* V sur V' si w monte $V_{\mathcal{H}}$ sur $V'_{\mathcal{H}}$. Dans ce cas on pose $d(V, w) := d(V_{\mathcal{H}}, w)$.

3.3. — Si w appartient à W , on pose : $B_w := B \cap wBw^{-1}$. Considérons l'application

$$\eta : G \longrightarrow \mathcal{B}, g \longmapsto g^{-1}B/B.$$

Soit V et V' dans \mathcal{V} et w dans W qui monte V sur V' . Fixons un point v dans V'_B . Notons wV_G pour $(w, 1).V_G$ et posons

$$\Sigma_{V,w} := wV_G \cap \eta^{-1}(v).$$

Soit H_v le stabilisateur de v dans H . Alors, $B_w \times H_v$ stabilise $\Sigma_{V,w}$. En fait, $B_w \times H_v$ agit transitivement sur $\Sigma_{V,w}$ et on a même le résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 3.1. — *On a :*

- (1) *La variété $\Sigma_{V,w}$ a $d(V, w)$ composantes irréductibles (ou connexes). Chacune est une orbite de B_w .*
- (2) *Le groupe H_v agit transitivement sur l'ensemble des composantes irréductibles de $\Sigma_{V,w}$.*
- (3) *Le produit fibré $H \times_{H_v} \Sigma_{V,w}$ existe (voir l'annexe 6). De plus, l'application $H \times_{H_v} \Sigma_{V,w} \longrightarrow wV_G$ est une immersion ouverte.*

Démonstration. — Il est clair que $B_w \times H_v$ stabilise wV_G et $\eta^{-1}(v)$. Il stabilise alors $\Sigma_{V,w}$.

Posons $\Omega = \eta^{-1}(H.v) \cap wV_G$. Alors, Ω est ouvert dans wV_G et la restriction de η à Ω est un morphisme H -équivariant de Ω sur $H.v$. De plus, la fibre au-dessus de v est $\Sigma_{V,w}$. L'assertion 3 découle alors du lemme 6.1 en annexe.

Comme Ω est ouvert dans wV_G , $H \times_{H_v} \Sigma_{V,w}$ est irréductible. On en déduit l'assertion 2.

Considérons l'application naturelle $\pi_w : BwB \times_B V_{\mathcal{H}} \longrightarrow BwV_{\mathcal{H}}$. Soit g_v dans G tel que $\eta(g_v) = v$. Posons $y = g_v H/H \in V'_{\mathcal{H}} \subset BwV_{\mathcal{H}}$. Alors, $\pi_w^{-1}(y)$ est formé de $d(V, w)$ points. Soit \hat{w} un représentant de w dans $N(T)$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \zeta : \Sigma_{V, w} &\longrightarrow \pi_w^{-1}(y) \\ g &\longmapsto [g_v g^{-1} \hat{w} : \hat{w}^{-1} g H/H]. \end{aligned}$$

Vérifions que ζ est bien définie. Comme $\Sigma_{V, w}$ est inclus dans Bg_v , si g appartient à $\Sigma_{V, w}$ alors $g_v g^{-1}$ appartient à B . Ainsi, $g_v g^{-1} \hat{w} \in BwB$.

Par ailleurs, $\Sigma_{V, w}$ est inclus dans wV_G ; donc $\hat{w}^{-1} g \in V_G$. Alors, $\hat{w}^{-1} g H/H$ appartient à $V_{\mathcal{H}}$. Ainsi, $[g_v g^{-1} \hat{w} : \hat{w}^{-1} g H/H]$ a bien un sens dans $BwB \times_B V_{\mathcal{H}}$. Enfin, $\pi_w([g_v g^{-1} \hat{w} : \hat{w}^{-1} g H/H]) = g_v g^{-1} \hat{w} \hat{w}^{-1} g H/H = y$. Ainsi, ζ est bien définie.

Montrons que ζ est surjective. Soit b dans B et x dans $V_{\mathcal{H}}$ tels que $\pi_w([b\hat{w} : x]) = y$. Comme $\hat{w}x = b^{-1}y$, $b^{-1}g_v$ appartient à wV_G puis à $\Sigma_{V, w}$. Mais alors, $x = \hat{w}^{-1}b^{-1}y$ implique $[b\hat{w} : x] = \zeta(b^{-1}g_v)$ et la surjectivité de ζ .

Montrons que les fibres de ζ sont des orbites de B_w . Soit g_1 et g_2 dans $\Sigma_{V, w}$. Si $\zeta(g_1) = \zeta(g_2)$, alors il existe b dans B tel que

$$\begin{cases} g_v g_1^{-1} \hat{w} b = g_v g_2^{-1} \hat{w} & (1) \\ b^{-1} \hat{w}^{-1} g_1 g_v^{-1} \cdot y = \hat{w}^{-1} g_2 g_v^{-1} \cdot y & (2) \end{cases}$$

L'égalité (1) montre que $g_1 g_2^{-1} = \hat{w} b \hat{w}^{-1}$. Par ailleurs, $\eta(g_1) = \eta(g_2)$. Ainsi, $g_1 g_2^{-1}$ appartient à B_w .

Réciproquement, si $g_1 g_2^{-1}$ appartient à B_w alors l'élément $b = \hat{w}^{-1} g_1 g_2^{-1} \hat{w}$ de B vérifie les égalités (1) et (2).

On a montré que les fibres de ζ sont les orbites de B_w dans $\Sigma_{V, w}$. Comme B_w est connexe, ceci montre que chaque composante irréductible (ou connexe) de $\Sigma_{V, w}$ est une orbite de B_w . Le fait que $\Sigma_{V, w}$ a $d(V, w)$ composantes irréductibles découle alors de la surjectivité de ζ . \square

4. Orbites de $B \times H$ dans les plongements de G

4.1. Préliminaire sur les plongements du groupe

4.1.1. Soit Y une variété normale munie d'une action algébrique de G . Si Y est de plus munie d'une immersion ouverte et G -équivariante de \mathcal{H} dans Y , on dit que Y est un *plongement* de \mathcal{H} . Un plongement Y de \mathcal{H} est dit *toroïdal* si tout diviseur irréductible stable par B de Y qui contient une orbite de G est stable par G . Soit Δ_Y la réunion des diviseurs de Y stables par B et non par G . Soit $P_{\mathcal{H}}$ le stabilisateur dans G de l'orbite ouverte de B dans \mathcal{H} et $P_{\mathcal{H}}^u$ son radical unipotent. Supposons que Y est toroïdal. Alors, il existe un sous-groupe de Levi $L_{\mathcal{H}}$ de $P_{\mathcal{H}}$, ne dépendant que de \mathcal{H} , et une sous-variété

fermée S de $Y - \Delta_Y$ stable par $L_{\mathcal{H}}$, tels que l'application

$$P_{\mathcal{H}}^u \times S \longrightarrow Y - \Delta_Y, (p, s) \longmapsto ps$$

est un isomorphisme. De plus, le sous-groupe dérivé de $L_{\mathcal{H}}$ agit trivialement sur S , qui est donc une variété torique. Enfin, toute orbite de G dans Y rencontre S suivant une unique orbite de $L_{\mathcal{H}}$.

Le groupe G muni de l'action de $G \times G$ définie en 3.3 est un $G \times G$ -espace homogène sphérique (et même symétrique). Les plongements de cet espace homogène seront simplement appelés *plongements du groupe G* . Chacun d'eux ne contient qu'un nombre fini d'orbites de $B \times B$ et donc de $G \times G$.

4.1.2. Jusqu'à la fin de cette sous-section, nous oublions le sous-groupe sphérique H pour nous concentrer sur les plongements toroïdaux du groupe G . Soit X un tel plongement. Le premier résultat que nous rappelons décrit la structure locale d'un tel plongement.

Commençons par fixer quelques notations. Soit B et B^- deux sous-groupes de Borel opposés de G . Posons $T = B \cap B^-$. Notons U (resp. U^-) le radical unipotent de B (resp. B^-).

Soit \mathcal{O} une orbite de $G \times G$ dans X . Posons :

$$X_{\mathcal{O}} := \{x \in X : \overline{(G \times G).x}^X \supset \mathcal{O}\},$$

et

$$X_{\mathcal{O}, B \times B^-} := \{x \in X : \overline{(B \times B^-).x}^X \supset \mathcal{O}\}.$$

Remarquons que $X_{\mathcal{O}, B \times B^-}$ contient BB^- et donc T . Considérons l'adhérence $S_{\mathcal{O}}$ de T dans $X_{\mathcal{O}, B \times B^-}$. En fait, avec les notations du paragraphe 4.1.1 pour $Y = X_{\mathcal{O}}$, $X_{\mathcal{O}, B \times B^-} = X_{\mathcal{O}} - \Delta_{X_{\mathcal{O}}}$ et $S_{\mathcal{O}} = S$. Dans [Bri97], il est montré la :

PROPOSITION 4.1. — *On a :*

- (1) $X_{\mathcal{O}, B \times B^-}$ est un ouvert affine de X .
- (2) L'application

$$\begin{aligned} U \times U^- \times S_{\mathcal{O}} &\longrightarrow X_{\mathcal{O}, B \times B^-} \\ (u, u^-, s) &\longmapsto (u, u^-).s \end{aligned}$$

est un isomorphisme $B \times B^-$ -équivariant.

- (3) Pour toute orbite \mathcal{O}' de $G \times G$ dans $X_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}' \cap S_{\mathcal{O}}$ est une orbite de $T \times T$.

4.1.3. On va maintenant décrire les isotropies dans $G \times G$ des points de $S_{\mathcal{O}}$. On note $\mathcal{X}_*(T)$ le groupe constitué des sous-groupes à un paramètre de T . Si $\lambda \in \mathcal{X}_*(T)$, on pose :

$$P(\lambda) := \{g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t^{-1}) \text{ existe dans } G\}.$$

D'après [MFK94], $P(\lambda)$ est un sous-groupe parabolique de G dont le radical unipotent est :

$$P^u(\lambda) = \{g \in G : \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t^{-1}) = 1\}.$$

De plus, $P(-\lambda)$ est opposé à $P(\lambda)$ et leur sous-groupe de Levi commun est le centralisateur $L(\lambda)$ de l'image de λ . Enfin, on pose $\Delta L(\lambda) = \{(l, l) \in G \times G : l \in L(\lambda)\}$ et on note $C(\lambda)$ le centre connexe de $L(\lambda)$.

Remarquons que (d'après la proposition 4.1) $S_{\mathcal{O}}$ est un plongement affine et $T \times T$ -équivariant de T dont l'orbite fermée est $S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$. Alors, il existe un sous-groupe à un paramètre λ de T tel que $z := \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)$ existe et appartient à $S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$. De plus, z ne dépend que de T , B et \mathcal{O} ; il est appelé *le point base de \mathcal{O}* .

PROPOSITION 4.2. — *On a :*

- (1) $P(-\lambda)$ contient B
- (2) l'isotropie de z dans $G \times G$ est le produit semi-direct de $P^u(\lambda) \times P^u(-\lambda)$ et de $\Delta L(\lambda).(C(\lambda) \times \{1\})_z$.

En particulier, $P(-\lambda)$ ne dépend que de \mathcal{O} et de B .

La proposition A1 de [Bri98] implique la proposition précédente sous des hypothèses sensiblement plus fortes. Cependant, la démonstration de [Bri98] s'applique sans changement ici.

4.1.4. Posons :

$$X_{\mathcal{O}, B \times G} := (\{1\} \times G).X_{\mathcal{O}, B \times B^-}.$$

D'après la proposition 4.1, $X_{\mathcal{O}, B \times G}$ rencontre chaque orbite de $G \times G$ dans $X_{\mathcal{O}}$ suivant une orbite de $B \times G$. On a alors la

PROPOSITION 4.3. — *Il existe une application $B \times G$ -équivariante*

$$\psi : X_{\mathcal{O}, B \times G} \longrightarrow \mathcal{B} = (B \times G)/(B \times B).$$

De plus, la fibre au-dessus de $(B/B, B/B)$ est $U \times S_{\mathcal{O}}$. Enfin, si \mathcal{O}' est une orbite de $G \times G$ dans $X_{\mathcal{O}}$, chaque fibre de ψ intersecte \mathcal{O}' suivant une orbite de $B \times \{1\}$.

REMARQUE 4.4. — Comme l'application naturelle $G \longrightarrow G/B$ est une fibration localement triviale, celle de la proposition l'est aussi.

Démonstration. — Rappelons que η désigne l'application $\eta : G \longrightarrow \mathcal{B}$, $g \longmapsto g^{-1}B/B$. Il est clair que η s'étend en une application rationnelle de X sur \mathcal{B} , $B \times \{1\}$ -invariante et $\{1\} \times G$ -équivariante. De plus, d'après la proposition 4.1, la restriction de η à $X_{\mathcal{O}, B \times B^-}$ est régulière. On a même le diagramme

commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\mathcal{O}, B \times B^-} & \xleftarrow{\sim} & U \times U^- \times S_{\mathcal{O}} \\
 \downarrow \eta & & \downarrow (u, u^-, s) \mapsto u^- \\
 \mathcal{B} & \xleftarrow{u^- B/B \leftarrow u^-} & U^-
 \end{array}$$

Alors, η s'étend par $\{1\} \times G$ -équivariance en une fibration ψ localement triviale de fibre $U \times S_{\mathcal{O}}$.

Soit \mathcal{O}' une orbite de $G \times G$ dans $X_{\mathcal{O}}$. Alors, $\psi^{-1}(B/B) \cap \mathcal{O}'$ qui vaut $\left((U \times \{1\}) \cdot S_{\mathcal{O}} \right) \cap \mathcal{O}'$ ou encore $(U \times \{1\}) \cdot (S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}')$ est une orbite de $B \times \{1\}$ d'après la proposition 4.1. Soit $x \in \mathcal{B}$ et $g \in G$ tels que $g.x = B/B$. Alors, $\psi^{-1}(x) \cap \mathcal{O}'$ qui vaut $(1, g) \cdot (\psi^{-1}(B/B) \cap \mathcal{O}')$ est une orbite de $B \times \{1\}$. \square

4.2. Orbites de $B \times H$ dans une orbite de $G \times G$ dans X

4.2.1. Considérons à nouveau un sous-groupe sphérique H de G et un sous-groupe de Borel B opposé à H . Conservons les notations des propositions 4.1 et 4.2. Posons de plus $P := P(-\lambda)$, $Q := Q(\lambda)$, $L := L(\lambda)$ et $C := C(\lambda)$.

Nous allons décrire l'ensemble $\mathbf{BH}(\mathcal{O})$ des orbites de $B \times H$ dans \mathcal{O} . Nous nous intéressons d'abord à l'ensemble $\mathbf{B}(G/P)$ des orbites de B dans G/P .

Remarquons que T est un tore maximal de $B \cap L$. Notons Φ_L l'ensemble des racines de (L, T) , Φ_L^+ celles de $(B \cap L, T)$ et Φ^+ celles de (B, T) . Posons :

$$W^L = \{w \in W : w \cdot \Phi_L^+ \subseteq \Phi^+\}.$$

La décomposition de Bruhat (voir [Hum75] ou [Spr98]) affirme alors que :

$$G/P = \coprod_{w \in W^L} BwP/P.$$

Ainsi, on identifie W^L à $\mathbf{B}(G/P)$ par $w \mapsto BwP/P$.

Le groupe de Weyl W est engendré par les réflexions simples associées aux racines simples de (B, T) . Si w appartient à W , on note $l(w)$ et on appelle *longueur de w* le nombre minimal de réflexions simples nécessaires pour écrire w comme leur produit. L'interprétation géométrique de cette longueur est :

$$l(w) = \dim(BwP/P), \quad \text{si } w \in W^L.$$

Considérons l'application canonique $q_{P^u} : P \rightarrow P/P^u$. Remarquons que q_{P^u} induit un isomorphisme de groupes de L sur P/P^u . Nous utiliserons le :

LEMME 4.5. — *Soit w dans W^L .*

- (1) *Le sous-groupe $w^{-1}Bw$ contient $B \cap L$.*
- (2) *On a : $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw) = q_{P^u}(B \cap L)$.*

Démonstration. — Assertion 1 : Le tore T est inclus dans $B \cap L$ et dans $w^{-1}Bw$. Mais alors, comme $\Phi_L^+ \subseteq w^{-1}\Phi^+$, l'algèbre de Lie de $B \cap L$ est incluse dans celle de $w^{-1}Bw$. Or $B \cap L$ est connexe donc $w^{-1}Bw$ contient $B \cap L$.

Assertion 2 : Le groupe $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw)$ est résoluble puisque $P \cap w^{-1}Bw$ l'est. Or la première assertion montre que $q_{P^u}(P \cap w^{-1}Bw)$ contient l'image par q_{P^u} de $B \cap L$. Comme la restriction de q_{P^u} à L est un isomorphisme, $q_{P^u}(B \cap L)$ est un sous-groupe de Borel de P/P^u et la deuxième assertion suit. \square

4.2.2. L'inclusion de $(G \times G)_z$ dans $P \times G$ induit un morphisme $G \times G$ -équivariant :

$$p : \mathcal{O} = G \times G / (G \times G)_z \longrightarrow G/P = (G \times G) / (P \times G).$$

On vérifie aisément que l'application :

$$q : p^{-1}(P/P) \longrightarrow \mathcal{B} \\ (lp^u, g).z \longmapsto gl^{-1}B/B,$$

(où $p^u \in P^u$, $l \in L$ et $g \in G$) définit un morphisme $\{1\} \times G$ -équivariant de $p^{-1}(P/P)$ sur \mathcal{B} .

PROPOSITION 4.6. — *On a :*

(1) Soit $V_{\mathcal{O}} \in \mathbf{BH}(\mathcal{O})$. Alors, il existe un unique couple $(w, V') \in W^L \times \mathcal{V}$ tel que :

$$p(V_{\mathcal{O}}) = BwP/P \text{ et } w^{-1}V_{\mathcal{O}} \cap p^{-1}(P/P) = q^{-1}(V'_B).$$

(2) L'application $\mathbf{BH}(\mathcal{O}) \longrightarrow W^L \times \mathcal{V}$, $V_{\mathcal{O}} \longmapsto (w, V')$ définie par l'assertion 1 est une bijection. On notera $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$ la préimage de (w, V') .

Démonstration. — Soit $V_{\mathcal{O}} \in \mathbf{BH}(\mathcal{O})$. L'image de $V_{\mathcal{O}}$ par p est une orbite de B dans G/P . Ceci implique l'existence et l'unicité de $w \in W^L$ tel que $p(V_{\mathcal{O}}) = BwP/P$.

De plus, $p^{-1}(P/P) \cap w^{-1}V_{\mathcal{O}}$ est une orbite de $(w^{-1}Bw \cap P) \times H$. Mais alors, l'assertion 2 du lemme 4.5 implique que $p^{-1}(P/P) \cap w^{-1}V_{\mathcal{O}}$ est une orbite de $(B \cap L) \times H$ dans $p^{-1}(P/P) \simeq (P \times G) / (P^u \times Q^u) \cdot \Delta L \cdot C_z$. L'assertion 1 suit aisément.

L'assertion 2 est alors banale. \square

COROLLAIRE 4.7. — Soit X un plongement du groupe G . Alors, $B \times H$ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X .

Démonstration. — Il est montré dans [Bri97] l'existence d'un plongement toroïdal \tilde{X} de G et d'un morphisme surjectif et $G \times G$ -équivariant de \tilde{X} sur X . Donc, il suffit de montrer le corollaire pour \tilde{X} . Or, la proposition 4.6 s'applique à chaque orbite de $G \times G$ dans \tilde{X} : le corollaire est démontré. \square

4.3. Description d'ouverts de $\overline{V_G^X}$

4.3.1. — On se donne deux éléments V et V' de \mathcal{V} , et $w \in W$ qui monte V sur V' . Rappelons que $\overline{V_G^X}$ désigne l'adhérence de V_G dans X .

Reprenons les notations du paragraphe 3.3 ; en particulier, v est un point de V'_B . Considérons l'adhérence $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ de $\Sigma_{V,w}$ dans $X_{\mathcal{O},B \times G}$. D'après la proposition 3.1, H_v agit sur $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$. Alors, on a le

LEMME 4.8. — *Reprenons les notations de la proposition 4.3. Alors, le produit fibré $H \times_{H_v} \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ existe. De plus, l'application naturelle $H \times_{H_v} \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}} \longrightarrow w\overline{V_G^X}$ est une immersion ouverte.*

Démonstration. — Le lemme 6.1 de l'annexe montre ici que $w\overline{V_G^X} \cap \psi^{-1}(V'_B)$ est isomorphe à $H \times_{H_v} \left(w\overline{V_G^X} \cap \psi^{-1}(v) \right)$. Il reste à montrer l'égalité :

$$w\overline{V_G^X} \cap \psi^{-1}(v) = \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}.$$

L'inclusion de $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ dans le membre de gauche de l'égalité est évidente. Soit C une composante irréductible de $w\overline{V_G^X} \cap \psi^{-1}(v)$. Alors, $(\{1\} \times H).C$ est une composante irréductible de $w\overline{V_G^X} \cap \psi^{-1}(V'_B)$. Comme $\psi(w\overline{V_G^X})$ est inclus dans l'adhérence de V'_B , $\psi^{-1}(V'_B) \cap w\overline{V_G^X}$ est ouvert dans $w\overline{V_G^X}$. En particulier, toutes les composantes irréductibles de $\psi^{-1}(V'_B) \cap w\overline{V_G^X}$ rencontrent l'orbite ouverte G . Donc $(\{1\} \times H).C$ rencontre G . Mais alors, C rencontre $G \cap \psi^{-1}(v)$. On en déduit que C est inclus dans $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$. \square

4.3.2. — On veut maintenant décrire plus en détail la géométrie de $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$. Rappelons que U_w désigne le groupe $U \cap wUw^{-1}$.

Soit g dans G tel que $g.B/B = v$. Rappelons que la multiplication induit un isomorphisme T -équivariant du produit $U_w \times (U \cap wU^{-1}w^{-1})$ sur U . Alors, la proposition 4.3 montre que l'application :

$$\Theta : \begin{array}{ccc} U_w \times (U \cap wU^{-1}w^{-1}) \times S_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & \psi^{-1}(v) \\ (u_1, u_2, s) & \longmapsto & (u_1 u_2, g) \cdot s, \end{array}$$

est un isomorphisme $T \times \{1\}$ -équivariant.

Posons

$$S_{V,w,\mathcal{O}} := \overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}} \cap \left((U \cap wU^{-1}w^{-1}, g).S_{\mathcal{O}} \right).$$

Il est clair que l'action de B_w sur $\Sigma_{V,w}$ induit une action de T sur $S_{V,w,\mathcal{O}}$. Notons $\phi_{V,w} : \psi^{-1}(v) \longrightarrow S_{\mathcal{O}}$ l'application T -équivariante définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
U_w \times (U \cap wU^{-1}w^{-1}) \times S_{\mathcal{O}} & \xrightarrow{(u_1, u_2, s) \mapsto s} & S_{\mathcal{O}} \\
\Theta \downarrow & & \phi_{V,w} \\
\psi^{-1}(v) & \xrightarrow{\hspace{10em}} &
\end{array}$$

THÉORÈME 4.9. — Avec les notations ci-dessus, on a :

- (1) $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ est isomorphe comme B_w -variété à $U_w \times S_{V,w,\mathcal{O}}$. En particulier, $S_{V,w,\mathcal{O}}$ a $d(V,w)$ composantes irréductibles.
- (2) Si w^{-1} appartient à W^L (avec les notations du paragraphe 4.2.1), alors $S_{V,w,\mathcal{O}} \cap \mathcal{O} = S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$. En particulier, $S_{V,w,\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$ est irréductible.
- (3) La restriction de $\phi_{V,w}$ à toute composante irréductible de $S_{V,w,\mathcal{O}}$ est un isomorphisme T -équivariant sur $S_{\mathcal{O}}$.

Démonstration. — La première assertion résulte immédiatement de l'invariance par B_w de $\Sigma_{V,w}$.

Soit $S_{V,w,\mathcal{O}}^1$ une composante irréductible de $S_{V,w,\mathcal{O}}$. Toute composante irréductible de $\overline{\Sigma_{V,w,\mathcal{O}}}$ est l'adhérence d'une orbite de B_w dans G . Mais alors, l'assertion 1 montre que $S_{V,w,\mathcal{O}}^1$ est l'adhérence dans $S_{V,w,\mathcal{O}}$ d'une orbite de T dans G . On en déduit qu'il existe u dans $U \cap wU^{-1}w^{-1}$ tel que $(T \times \{1\}) \cdot (u, g)$ soit dense dans $S_{V,w,\mathcal{O}}^1$ (où g est l'élément de G utilisé dans la définition de Θ). Fixons un tel u .

L'intersection $S_{V,w,\mathcal{O}}^1 \cap \mathcal{O}$ est incluse dans $U_w \cdot (S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O})$. On en déduit que tout point de $S_{V,w,\mathcal{O}}^1 \cap \mathcal{O}$ est de la forme $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot u$, pour un sous-groupe à un paramètre λ de T tel que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)$ existe et appartient à $S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$. Alors, L est le centralisateur de l'image de λ (voir la proposition 4.2).

Supposons que w^{-1} appartient à W^L . Alors, Φ_L^+ est inclus dans $w \cdot \Phi^+$. Donc, si α appartient à Φ_L^+ alors $w^{-1}\alpha$ n'appartient pas à Φ^- . Ainsi, $\Phi^+ \cap w\Phi^-$ est inclus dans Φ^+ et ne rencontre pas Φ_L^+ . On en déduit que U_w est inclus dans le radical unipotent $Q^u(\lambda)$ de $Q(\lambda)$. Or

$$Q^u(\lambda) = \{g \in G : \lambda(t)g\lambda(t^{-1}) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1\}.$$

On en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot u = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)$ appartient à $S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}$. L'assertion 2 est démontrée.

D'après la théorie des plongements des espaces homogènes sphériques (voir [Kno91] ou [Bri97]), il existe un plongement toroïdal X' de G contenant $X_{\mathcal{O}}$ et dont l'unique orbite fermée Z est projective. Il suffit alors de montrer l'assertion 3 lorsque $\mathcal{O} = Z$ est projective.

Considérons à nouveau une composante irréductible $S_{V,w,\mathcal{O}}^1$ de $S_{V,w,\mathcal{O}}$ et la restriction $\overline{\phi_{V,w}} : S_{V,w,\mathcal{O}}^1 \rightarrow S_{\mathcal{O}}$ de $\phi_{V,w}$. L'application $\overline{\phi_{V,w}}$ est T -équivariante et dominante. De plus, comme $S_{V,w,\mathcal{O}}^1$ rencontre G , $S_{V,w,\mathcal{O}}^1$ contient un ouvert isomorphe à T et $\overline{\phi_{V,w}}$ est birationnelle.

Considérons l'unique point z_0 de $S_{\mathcal{O}} \cap Z$. Alors, $\overline{\phi_{V,w}}^{-1}(z_0)$ est inclus dans $S_{V,w,\mathcal{O}}^1 \cap Z$. Mais alors, l'assertion 2 montre que $\overline{\phi_{V,w}}^{-1}(z_0) = \{z_0\}$. On en déduit que $\overline{\phi_{V,w}} : S_{V,w,\mathcal{O}}^1 \rightarrow S_{\mathcal{O}}$ est un isomorphisme. \square

4.4. Intersection de $\overline{V_G^X}$ et d'une orbite de $G \times G$ dans X

On conserve les notations de la sous-section précédente. On note $\overline{\mathcal{O}}^X$ l'adhérence de \mathcal{O} dans X . Dans cette sous-section, nous déterminons l'intersection $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V_G^X}$. Nous utilisons la notation $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$ de la proposition 4.6.

THÉORÈME 4.10. — *L'intersection $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V_G^X}$ est propre (i.e. sa codimension dans X est la somme de celles de \mathcal{O} et de V_G). De plus, on a :*

$$\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V_G^X} = \bigcup \overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')^X},$$

où la réunion porte sur les couples $(w, V') \in W^L \times \mathcal{V}$ tels que w^{-1} monte V sur V' . Si de plus X est lisse, la multiplicité d'intersection de $\overline{\mathcal{O}}^X \cap \overline{V_G^X}$ le long de $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')^X}$ est $d(V, w^{-1})$.

Démonstration. — Soit C une composante irréductible de $\overline{V_G^X} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ qui rencontre \mathcal{O} . Comme C est stable par $B \times H$, la proposition 4.6 montre qu'il existe w dans W^L et V' dans \mathcal{V} tels que C soit l'adhérence de $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$ dans X .

Considérons la fibration $\psi : X_{\mathcal{O}, B \times G} \rightarrow \mathcal{B}$ définie par la proposition 4.3. Il est clair que $\psi(w^{-1}\overline{V_G^X})$ est inclus dans $\overline{V_G^{-1}wB/B}$. Mais alors, V'_B est inclus dans $\overline{V_G^{-1}wB/B}$.

Par ailleurs, la codimension de C dans \mathcal{O} est égale à la somme de la longueur de w et de la codimension de V'_B dans \mathcal{B} . Comme C est une composante irréductible de $\overline{V_G^X} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$, cette codimension est inférieure ou égale à celle de V_G dans G c'est-à-dire celle de V_B dans \mathcal{B} . On en déduit que V'_B est l'orbite ouverte de H dans $V_G^{-1}wB/B$ et que w^{-1} monte V sur V' . De plus, on a :

$$\dim(\overline{\mathcal{O}}^X) - \dim(C) = \dim(X) - \dim(\overline{V_G^X}). \quad (3)$$

Soit C' une composante irréductible quelconque de $\overline{V_G^X} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$. Alors, il existe une orbite \mathcal{O}' de $G \times G$ dans $\overline{\mathcal{O}}^X$ telle que $C' \cap \mathcal{O}'$ soit un ouvert non vide de C' . L'égalité (3) appliquée à \mathcal{O}' et C' montre que $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Ainsi, on a montré que l'intersection $\overline{V_G}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ est propre et que toute composante irréductible de cette intersection est l'adhérence dans X de $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$ pour un élément w dans W^L qui monte V sur V' .

Réciproquement, soit $w \in W^L$ et V' dans \mathcal{V} tels que w monte V sur V' . Notons $\mathcal{O}_{B \times G}$ l'orbite ouverte de $B \times G$ dans \mathcal{O} . Considérons l'application $p : \mathcal{O} \rightarrow G/P$ définie au paragraphe 4.2.2. Montrons que $p(\mathcal{O}_{B \times G} \cap w^{-1}\overline{V_G}^X)$ et $w^{-1}BwP/P$ ont la même adhérence dans G/P .

Comme $(\{1\} \times H) \cdot \Sigma_{V, w^{-1}}$ est ouvert dans $w^{-1}V_G$ et p est $\{1\} \times G$ -invariante, les adhérences de $p(w^{-1}\overline{V_G}^X \cap \mathcal{O}_{B \times G})$ et de $p(\overline{\Sigma_{V, w^{-1}, \mathcal{O}}} \cap \mathcal{O}_{B \times G})$ dans G/P coïncident. Or, $p(\overline{\Sigma_{V, w^{-1}, \mathcal{O}}} \cap \mathcal{O}_{B \times G})$ est égal à $(U \cap w^{-1}Uw) \cdot p(S_{V, w^{-1}, \mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_{B \times G})$ qui est égal à $(U \cap w^{-1}Uw) \cdot p(S_{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_{B \times G})$ d'après l'assertion 3 du théorème 4.9. On en déduit que $p(w^{-1}\overline{V_G}^X \cap \mathcal{O}_{B \times G}) = w^{-1}BwP/P$.

La proposition 4.6 montre alors qu'il existe une composante irréductible C de $\overline{V_G}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ de la forme $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V'')^X}$, pour V'' dans \mathcal{V} . Mais alors, le début de la démonstration montre que $V'' = V'$. Ainsi, $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')^X}$ est une composante irréductible de $\overline{V_G}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$.

De plus, au voisinage de $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$, l'application ψ induit un isomorphisme d'un ouvert de $w^{-1}\overline{V_G}^X$ sur un produit fibré dont la fibre est $\overline{\Sigma_{V, w^{-1}, \mathcal{O}}}$. Mais alors, la multiplicité de $\overline{V_G}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ le long de $\overline{\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')^X}$ est égale à celle de $\overline{\Sigma_{V, w^{-1}, \mathcal{O}}}$. D'après le théorème 4.9 (assertions 2 et 3), cette multiplicité est celle de $S_{V, w^{-1}, \mathcal{O}} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ le long de $S_{\mathcal{O}} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$. Si de plus X est lisse, la proposition 4.1 montre que $S_{\mathcal{O}}$ est lisse. Mais alors, le théorème 4.9 montre que chacune des $d(V, w^{-1})$ composantes irréductibles de $S_{V, w^{-1}, \mathcal{O}}$ est lisse. On en déduit que la multiplicité de $S_{V, w^{-1}, \mathcal{O}} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ le long de $S_{\mathcal{O}} \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ est $d(V, w^{-1})$ puis le théorème. \square

COROLLAIRE 4.11. — *Supposons que X est lisse et toroïdal. Soit C une composante irréductible de $\overline{V_G}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$. Alors, se valent :*

- (1) *L'ouvert des points lisses de $\overline{V_G}^X$ rencontre C .*
- (2) *L'intersection $\overline{V_G}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ est transverse le long de C .*

Démonstration. — Il suffit de montrer que si la multiplicité de l'intersection $\overline{V_G}^X \cap \overline{\mathcal{O}}^X$ le long de C est supérieure ou égale à 2, C est constitué de points singuliers de $\overline{V_G}^X$. Soit w dans W et V' dans \mathcal{V} tels que l'orbite $\mathbf{BH}_{\mathcal{O}}(w, V')$ est ouverte dans C . Alors, la variété $\overline{\Sigma_{V, w, \mathcal{O}}}$ a au moins deux composantes irréductibles qui se rencontrent dans C . Mais alors, le corollaire découle du lemme 4.8. \square

4.5. Classe de cohomologie $B \times \{1\}$ -équivariante de \overline{V}_G^X

4.5.1. — Dans cette sous-section, nous fixons un plongement X toroïdal complet et lisse de G . Rappelons que B est un sous-groupe de Borel de G opposé à H , que B^- est un sous-groupe de Borel de G opposé à B , que T égale $B \cap B^-$ et enfin que V appartient à \mathcal{V} . Le théorème 4.13 ci-dessous donne une expression pour la classe de cohomologie $B \times \{1\}$ -équivariante de \overline{V}_G^X .

Si Y est une variété munie d'une action de B , on note $H_B^*(Y)$ (resp. $H_T^*(Y)$) l'algèbre de cohomologie B -équivariante (resp. T -équivariante) de Y à coefficients rationnels (voir [Hsi75] pour une définition). Comme l'application $B \rightarrow B/T$ est une fibration triviale dont la fibre est un espace affine, $H_B^*(Y)$ et $H_T^*(Y)$ sont canoniquement isomorphes. Dans la suite de cette section nous travaillerons avec la cohomologie T -équivariante.

La proposition 4.2 montre que les orbites fermées de $G \times G$ dans X sont isomorphes à $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Elle implique aussi que les points fixes de $T \times \{1\}$ dans X appartiennent tous à des orbites fermées de $G \times G$ dans X . Ces deux propriétés de X et le théorème de localisation en cohomologie T -équivariante (voir [Hsi75]) sont les ingrédients essentiels de la preuve du théorème 4.13 ci-dessous.

D'après la formule de Künneth, on a :

$$H_{T \times \{1\}}^*(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) = H_T^*(\mathcal{B}) \otimes H^*(\mathcal{B}).$$

Nous utiliserons également le fait que $H_T^*(\mathcal{B})$ est un $H_T^*(\text{pt})$ -module libre (voir [Hsi75]).

Rappelons que $V^\circ = (H.B/B, B.H/H, BH) \in \mathcal{V}$ désigne l'orbite ouverte.

4.5.2. — Avec les notations ci-dessus, on a le

LEMME 4.12. — *Soit Z une orbite fermée de $G \times G$ dans X . Posons*

$$c = \sum_{w \in W \text{ t. q. } w \text{ monte } V \text{ sur } V^\circ} d(V, w) [\overline{Bw^{-1}B^{-X}}],$$

dans $H_{T \times \{1\}}^*(X)$. Alors, dans $H_{T \times \{1\}}^*(X)$, on a :

$$[\overline{V}_G^X] \cup [Z] = c \cup [Z].$$

Démonstration. — Avec les notations de la proposition 4.1 pour $\mathcal{O} = Z$, $S_Z \cap Z$ est réduit à un point z . Alors, le couple (Z, z) s'identifie à $(\mathcal{B} \times \mathcal{B}, (B^-/B^-, B/B))$. Avec cette identification, le théorème 4.10 montre que dans $H_{T \times \{1\}}^*(X)$, on a :

$$[\overline{V}_G^X] \cup [Z] = \sum_{w \in W \text{ t. q. } w \text{ monte } V \text{ sur } V'} d(V, w) [\overline{Bw^{-1}B^-} / B^- \times V'_B].$$

Or, d'après [Bri98], dans $H^*(\mathcal{B})$ on a :

$$[V'_B] = \sum_{\tau \in W \text{ t. q. } \tau \text{ monte } V' \text{ sur } V^\circ} d(V', \tau) [\overline{B^- \tau B} / B].$$

Alors, on obtient :

$$(1) \quad [\overline{V_G^X}] \cup [Z] = \sum d(V, w) d(V', \tau) [\overline{Bw^{-1}B^-} / B^- \times \overline{B^- \tau B} / B],$$

où la somme porte sur les couples $(w, \tau) \in W \times W$ tels que w monte V sur V' et τ monte V' sur V° .

À tout couple (w, τ) apparaissant dans cette somme on associe le couple $(w_1, \tau_1) \in W \times W$ défini par :

$$(2) \quad \begin{cases} w_1 = \tau w \\ \tau_1 = w \end{cases} \quad \begin{cases} w = \tau_1 \\ \tau = w_1 \tau_1^{-1} \end{cases}$$

Alors, w_1 monte V sur V° et $l(\tau_1) + l(w_1 \tau_1^{-1}) = l(w_1)$. Réciproquement, à tout couple (w_1, τ_1) satisfaisant ces deux conditions on peut associer par les formules (2) un couple (w, τ) apparaissant dans la somme (1). De plus, la condition « $l(\tau_1) + l(w_1 \tau_1^{-1}) = l(w_1)$ » est équivalente à « τ_1 monte $Bw_1^{-1}B^- / B^-$ dans $\Gamma(G/B^-)$ ». On en déduit que :

$$[\overline{V_G^X}] \cup [Z] = \sum_{\substack{w_1 \text{ monte } V \text{ sur } V^\circ \\ \tau_1 \text{ monte } Bw_1^{-1}B^- / B^-}} d(V, w_1) [\overline{B\tau_1^{-1}B^-} / B^- \times \overline{B^- w_1 \tau_1^{-1} B} / B].$$

Par ailleurs, on a :

$$c \cup [Z] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } V^\circ} d(V, w) [\overline{Bw^{-1}B^-}] \cup [Z].$$

On applique alors le théorème 4.10 avec $H = B^-$ à chaque $[\overline{Bw^{-1}B^-}] \cup [Z]$. On obtient :

$$c \cup [Z] = \sum_{\substack{w \text{ monte } V \text{ sur } V^\circ \\ \tau \text{ monte } \overline{Bw^{-1}B^-} / B^-}} d(V, w) [\overline{B\tau^{-1}B^-} / B^- \times \overline{B^- w \tau^{-1} B} / B].$$

Le lemme est démontré. \square

4.5.3. — Au cours de la preuve du lemme 4.12, nous avons utilisé une expression de la classe de $[V_B]$ dans $H^*(\mathcal{B})$ démontrée dans [Bri98]. Cette dernière nous dit que dans $H_{T \times \{1\}}^*(G) \simeq H^*(G/T) \simeq H^*(\mathcal{B})$, on a :

$$[\overline{V_G^G}] = \sum_{w \text{ monte } V \text{ sur } V^\circ} d(V, w) [\overline{Bw^{-1}B^-^G}].$$

Le théorème suivant montre que cette expression est encore valable dans un plongement toroïdal complet et lisse de G .

THÉORÈME 4.13. — *Soit X un plongement toroïdal complet et lisse de G . Soit V dans \mathcal{V} .*

Alors, dans $H_{T \times \{1\}}^(X)$, on a :*

$$[\overline{V}_G^X] = \sum_{w \in W \text{ t. q. } w \text{ monte } V \text{ sur } V^\circ} d(V, w) [\overline{Bw^{-1}B^{-X}}].$$

Démonstration. — Comme au lemme 4.12, notons c le membre de droite de l'égalité du théorème. Soit Z_1, \dots, Z_k les orbites fermées de $G \times G$ dans X . Considérons pour tout $i = 1, \dots, k$ le morphisme de restriction $\iota_i : H_{T \times \{1\}}^*(X) \rightarrow H_{T \times \{1\}}^*(Z_i)$; et le morphisme

$$\begin{aligned} I : H_{T \times \{1\}}^*(X) &\rightarrow \prod_{i=1}^k H_{T \times \{1\}}^*(Z_i) \\ \delta &\longmapsto (\iota_i(\delta))_{i=1, \dots, k}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.2, seules les orbites fermées de $G \times G$ dans X contiennent des point fixes de $T \times \{1\}$. Mais alors, le théorème de localisation (voir [Hsi75]) montre que I est injective. Il suffit alors de montrer que $I([\overline{V}_G^X]) = I(c)$. Or d'après le lemme 4.12, on a

$$I([\overline{V}_G^X]) \cup I([Z_i]) = I(c) \cup I([Z_i]) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Il suffit alors de montrer que pour tout $i = 1, \dots, k$, l'application

$$H_{T \times \{1\}}^*(Z_i) \rightarrow H_{T \times \{1\}}^*(Z_i), d \longmapsto \iota_i([Z_i]) \cup d$$

est injective. Jusqu'à la fin de la démonstration, on fixe un indice i entre 1 et k . Posons pour alléger les notations $Z := Z_i$ et $\iota := \iota_i$.

Considérons le fibré $\mathcal{N}_{Z,X}$ normal à Z dans X . Remarquons que $\mathcal{N}_{Z,X}$ est naturellement muni d'une $G \times G$ -linéarisation. De plus, $\iota(Z)$ est la classe de Chern de degré maximal et $T \times \{1\}$ -équivariante de $\mathcal{N}_{Z,X}$. Si \mathcal{M} est un fibré vectoriel T -linéarisé sur une T -variété, on note $c^{\max}(\mathcal{M})$ la classe de Chern de degré maximal de \mathcal{M} et $c_T^{\max}(\mathcal{M})$ sa classe T -équivariante. Si \mathcal{M} est un fibré en droites, nous omettrons le max en exposant.

Si γ est un caractère de B , on note \mathcal{L}_γ le produit fibré $G \times_B \mathbb{C}$, où B agit sur \mathbb{C} par le caractère γ . Alors, \mathcal{L}_γ est un fibré en droites G -linéarisé sur \mathcal{B} . On identifie Z à $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ comme dans la preuve du lemme 4.12. Si α et β sont des caractères de B , on note $\mathcal{L}_\alpha \boxtimes \mathcal{L}_\beta$ le produit fibré $(G \times G) \times_{B \times B} \mathbb{C}$, où $B \times B$ agit sur \mathbb{C} par le caractère (α, β) . Alors, $\mathcal{L}_\alpha \boxtimes \mathcal{L}_\beta$ est un fibré en droites $G \times G$ -linéarisé sur Z .

Reprenons les notations de la proposition 4.1 pour $\mathcal{O} = Z$. Comme S_Z est un plongement affine lisse et $T \times T$ -équivariant de T , la proposition 4.1 montre qu'il existe des caractères $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de B tels que $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{L}_{\alpha_j} \boxtimes \mathcal{L}_{-\alpha_j}$ coïncide avec $\mathcal{N}_{Z,X}$ sur l'orbite ouverte de $B \times B^-$ dans Z . Comme ces deux fibrés sont $G \times G$ -linéarisés et Z est une orbite de $G \times G$, on en déduit que $\mathcal{N}_{Z,X}$ est isomorphe à $\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{L}_{\alpha_j} \boxtimes \mathcal{L}_{-\alpha_j}$ en tant que fibré vectoriel $G \times G$ -linéarisé.

On peut maintenant calculer $\iota(Z)$:

$$\begin{aligned} \iota(Z) &= c_{T \times \{1\}}^{\max}(\mathcal{N}_{Z,X}) \\ &= c_{T \times \{1\}}^{\max} \left(\bigoplus_{j=1}^r \mathcal{L}_{\alpha_j} \boxtimes \mathcal{L}_{-\alpha_j} \right) \\ &= \prod_{j=1}^r c_{T \times \{1\}}(\mathcal{L}_{\alpha_j} \boxtimes \mathcal{L}_{-\alpha_j}) \\ &= \prod_{j=1}^r c_{T \times \{1\}}((\mathcal{L}_{\alpha_j} \boxtimes \mathcal{L}_0) \otimes (\mathcal{L}_0 \boxtimes \mathcal{L}_{-\alpha_j})) \\ &= \prod_{j=1}^r (c_T(\mathcal{L}_{\alpha_j}) \otimes 1 + 1 \otimes c(\mathcal{L}_{-\alpha_j})). \end{aligned}$$

Or, $H_T^*(\mathcal{B})$ est un $H_T^*(pt)$ -module libre. En particulier, $c_T(\mathcal{L}_{\alpha_j}) \otimes 1$ n'est pas diviseur de zéro dans l'anneau $H_{T \times \{1\}}^*(Z)$. Par ailleurs, $1 \otimes c(\mathcal{L}_{-\alpha_j}) \in H_{T \times \{1\}}^*(Z)$ est nilpotent. Mais alors, $c_T(\mathcal{L}_{\alpha_j}) \otimes 1 + 1 \otimes c(\mathcal{L}_{-\alpha_j})$ n'est pas diviseur de zéro. On en déduit que $\iota(Z)$ n'est pas un diviseur de zéro dans $H_{T \times \{1\}}^*(Z)$. Le théorème suit. \square

Remarque : Il peut être étonnant de remarquer que la classe $[\overline{V}_G^X]$ est une combinaison linéaire de classes d'adhérences d'orbites de $B \times B^-$ qui rencontrent G , bien que ces adhérences n'engendrent pas la cohomologie $T \times \{1\}$ -équivariante de X .

5. Un exemple d'adhérence d'orbite de B dans un plongement de \mathcal{H}

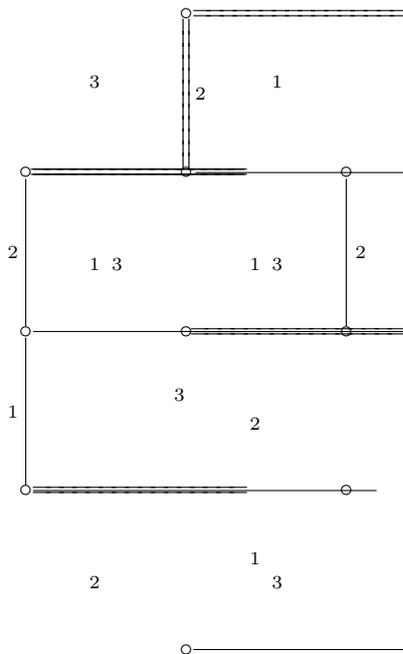
Dans cette section, nous donnons un exemple qui répond par la négative à une question posée par M. Brion (voir [Bri01] ; après la proposition 6) à propos du lieu singulier des adhérences d'orbites d'un sous-groupe de Borel dans un plongement lisse de \mathcal{H} .

Soit $G = \mathrm{SL}(4)$ et $V \simeq \mathbb{C}^4$ le G -module standard. Alors G agit par changement de variable sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[V]_2$ des polynômes homogènes de degré 2 sur V . Notons (e_1, \dots, e_4) la base canonique de V et (x_1, \dots, x_4) sa base duale. Posons $q_0 = x_1^2 + \dots + x_4^2 \in \mathbb{C}[V]_2$. Soit H le stabilisateur dans G de $[q_0] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}[V]_2)$. Alors, $\mathcal{H} = G.[q_0]$ est l'ensemble des quadriques non dégénérées de \mathbb{P}^3 .

Soit B le sous-groupe de Borel de G constituée des matrices triangulaires supérieures. Alors, B est opposé à H (en particulier, H est sphérique). Les représentants contenant B des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques minimaux de G sont :

$$P_1 = \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & \\ \hline 0 & & 0 * \end{array} \right) \quad P_2 = \left(\begin{array}{c|cc|c} * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & \\ \hline 0 & 0 & & * \end{array} \right) \quad P_3 = \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ 0 & * & * \\ \hline 0 & & * & * \end{array} \right).$$

D'après [Pin01], le graphe $\Gamma(G/H)$ est représenté par la figure 2.

FIGURE 2. $\Gamma(G/H)$

L'orbite fermée $V_{\mathcal{H}}$ de B dans \mathcal{H} est :

$$\{[q] \in \mathcal{H} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}[V]_2) : q(e_1, e_i) = 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } q(e_2, e_2) = 0\}.$$

En fait, \mathcal{H} est un $\mathrm{PSL}(4)$ -espace homogène symétrique. Considérons le plongement magnifique Y de \mathcal{H} construit par De Concini et Procesi dans [DCP83]. On peut montrer que Y est l'unique plongement toroïdal complet de \mathcal{H} et contenant une unique orbite fermée Z . De plus, C. De Concini et C. Procesi ont montré que Y était lisse. Considérons l'adhérence $\overline{V_{\mathcal{H}}}^Y$ de $V_{\mathcal{H}}$ dans Y . On peut maintenant énoncer le

THÉORÈME 5.1. — *Avec les notations ci-dessus, $\overline{V_{\mathcal{H}}}^Y \cap Z$ a une composante irréductible constituée de points singuliers de $\overline{V_{\mathcal{H}}}^Y$.*

Démonstration. — Soit T le tore maximal de G constitué des matrices diagonales. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ les racines simples de (B, T) . Posons :

$$Y_{Z,B} := \{y \in Y : \overline{B \cdot y} \supset Z\}.$$

Notons S l'adhérence de $T \cdot [q_0]$ dans $Y_{Z,B}$. Il est montré dans [DCP83] que la T -variété S est isomorphe à \mathbb{A}^3 sur lequel T agit linéairement par les poids

$2\alpha_1, 2\alpha_2$ et $2\alpha_3$. Fixons un tel isomorphisme $\xi : \mathbb{A}^3 \longrightarrow S$. Soit U le radical unipotent de B . Alors (voir [DCP83]) l'application

$$\begin{aligned} \Theta : U \times \mathbb{A}^3 &\longrightarrow Y_{Z,B} \\ (u, \tau) &\longmapsto u \cdot \xi(\tau) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. De plus, $\Theta^{-1}(Y_{Z,B} \cap Z) = U \times \{0\}$.

Soit s_1, s_2 et s_3 les réflexions simples du groupe de Weyl W de T associées respectivement à P_1, P_2 et P_3 . Considérons l'élément $w = s_2 s_1 s_3 s_2$ de W et fixons le représentant \tilde{w} de w suivant :

$$\tilde{w} = \left(\begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Posons $\Omega := w \overline{V_{\mathcal{H}}}^Y \cap Y_{Z,B}$. Alors, Ω est un ouvert de $w \overline{V_{\mathcal{H}}}^Y$ stable par B_w . Comme Θ est un isomorphisme, on a :

$$\Omega = B_w \cdot \left(\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & \\ \hline & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot [q_0] \cap \tilde{w} V_{\mathcal{H}} \right).$$

Soit $b = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & u_3 & u_4 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} b \cdot [q_0] \in \tilde{w} V_{\mathcal{H}} &\iff \tilde{w}^{-1} b [q_0] \in V_{\mathcal{H}} \\ &\iff [(1 + u_3^2 + u_1^2) x_1^2 + 2(u_3 u_4 + u_1 u_2) x_1 x_2 - 2 u_1 x_1 x_3 \\ &\quad - 2 u_3 x_1 x_4 + (1 + u_2^2 + u_4^2) x_2^2 - 2 u_2 x_2 x_3 - 2 u_4 x_2 x_4 \\ &\quad + x_3^2 + x_4^2] \in V_{\mathcal{H}} \\ &\iff \begin{cases} 1 + u_3^2 + u_1^2 = 0 \\ u_3 u_4 + u_1 u_2 = 0 \\ u_1 = 0 \\ 1 + u_2^2 + u_4^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u_1 = u_4 = 0 \\ u_2 = \pm i \\ u_3 = \pm i \end{cases} \end{aligned}$$

Si $y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot [q_0]$ on en déduit que :

$$w V_{\mathcal{H}} \cap Y_{Z,B} = U_w \cdot T \cdot y.$$

Comme Θ est un isomorphisme, on a :

$$\Omega = w\overline{V_{\mathcal{H}}}^Y \cap Y_{Z,B} = U_w \cdot \overline{T.y}^{Y_{Z,B}}.$$

Muni de l'action de T , $Y_{Z,B}$ est isomorphe à un T -module. De plus, les poids de $y \in Y_{Z,B}$ pour l'action de T sont :

$$2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Comme cette famille de $\mathcal{X}^*(T)$ ne contient pas de sous-famille libre qui engendre le même sous-groupe de $\mathcal{X}^*(T)$, l'adhérence $\overline{T.y}^{Y_{Z,B}}$ n'est pas lisse. En particulier, $\xi(0)$ est un point singulier de $\overline{T.y}^{Y_{Z,B}}$.

Par ailleurs, comme $\Theta^{-1}(Y_{Z,B} \cap Z) = U \times \{0\}$, on a :

$$w\overline{V_{\mathcal{H}}}^Y \cap Y_{Z,B} \cap Z = U_w \cdot \xi(0).$$

Le théorème suit aisément. \square

6. Appendice : Espaces fibrés algébriques

N'ayant pas trouvé de référence satisfaisante dans la littérature, je démontre dans cette appendice un lemme sur les espaces fibrés algébriques au sens de J.P. Serre [Ser58] (voir aussi [PV91, Paragraphe 4.8]).

Soit H un groupe algébrique affine. Soit P une H -variété et $\pi : P \rightarrow X$ un morphisme H -invariant de P dans une variété X . Le triplet (H, P, X) est appelé un *système fibré*. On appelle *espace fibré principal de base X et de groupe H* un système fibré (H, P, X) qui est localement trivial dans la topologie étale. Dans [Ser58], J.P. Serre dit que (H, P, X) est *localement isotrivial*.

Soit G un groupe algébrique affine et H un sous-groupe fermé de G . Soit F une H -variété. Considérons sur $G \times F$ l'action de H donnée par la formule : $h.(g, f) = (gh^{-1}, hf)$. S'il existe une variété X et un morphisme $\pi : G \times F \rightarrow X$ tels que $(H, G \times F, X)$ soit un espace fibré principal, cette variété et ce morphisme sont uniques (voir [Ser58, preuve de la proposition 4]). On appelle alors X le produit fibré de G par F au-dessus de H et on le note $G \times_H F$.

Dans le cas où le système fibré $(H, G, G/H)$ est localement trivial dans la topologie de Zariski, il est facile de voir que $G \times_H F$ existe. Ceci s'applique par exemple lorsque H est résoluble et connexe (voir [Ros56]).

Dans une autre direction, les propositions 3 et 4 de [Ser58] (ou le théorème 4.19 de [PV91]) montrent que $G \times_H F$ existe si F est quasiprojective.

Si le produit fibré $G \times_H F$ existe, l'action de G sur $G \times F$ par multiplication à gauche sur le premier facteur induit une action algébrique de G sur $G \times_H F$. De plus, la projection de $G \times F$ sur G induit un morphisme G -équivariant $G \times_H F \rightarrow G/H$. Le lemme suivant montre que $G \times_H F$ est l'unique G -variété qui soit munie d'un morphisme G -équivariant sur G/H dont la fibre au-dessus de H/H soit F .

LEMME 6.1. — Soit X une G -variété et $\phi : X \rightarrow G/H$ un morphisme G -équivariant. Posons $F = \phi^{-1}(H/H)$ et considérons $\pi : G \times F \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto g.x$.

Alors, le triplet $(H, G \times F, X)$ est un espace fibré principal de base X et de groupe H . Autrement dit, $G \times_H F$ existe et est isomorphe à X .

Démonstration. — Il est évident que $(H, G \times F, X)$ est un système fibré. Il suffit donc de montrer qu'il est localement trivial dans la topologie étale. D'après [Ser58, proposition 2], il suffit de montrer les propriétés (FP) et (SL) ci-après :

(FP) Si (g, x) et (g', x') sont deux éléments de $G \times F$ tels que $g.x = g'.x'$ alors il existe un unique $h \in H$ tel que $(g', x') = h.(g, x)$. De plus, l'application qui, à un tel couple $\left((g, x), (g', x') \right)$ fait correspondre l'élément h est un morphisme de la sous-variété T de $(G \times F) \times (G \times F)$ où elle est définie dans le groupe H .

(SL) Pour tout $x \in X$, il existe un revêtement non ramifié $f : U' \rightarrow U$ d'un voisinage ouvert U de x , et un morphisme $s : U' \rightarrow G \times F$ tels que $\pi \circ s = f$ sur U' .

La condition (FP) se vérifie immédiatement (on a : $h = g'^{-1}g$).

Soit $x \in X$. Notons $p : G \rightarrow G/H$ la projection canonique. D'après [Ser58, proposition 3], le triplet $(H, G, G/H)$ est un espace fibré principal. En particulier, il existe un revêtement non ramifié $\psi : \Omega' \rightarrow \Omega$ d'un voisinage ouvert Ω de $\phi(x)$ et $\sigma : \Omega' \rightarrow G$ tels que $\psi = p \circ \sigma$. Posons $U' = \{(\omega, x) \in \Omega' \times X : \psi(\omega) = \phi(x)\}$. Alors, par [Ser58, 1.3.d], la projection de $\Omega' \times X$ sur X induit un revêtement non ramifié $f : U' \rightarrow \phi^{-1}(\Omega)$. Posons

$$s : U' \rightarrow G \times F \\ (\omega, x) \mapsto \left(\sigma(\omega), \sigma(\omega)^{-1}.x \right).$$

On vérifie que $\pi \circ s = f$. □

BIBLIOGRAPHIE

- [Bri86] M. BRION — «Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques», *Manuscripta Math.* **55** (1986), no. 2, p. 191–198.
- [Bri97] ———, «Variétés sphériques», *Notes de la session de la S. M. F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques"*, Grenoble (1997), p. 1–60, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.ps>.
- [Bri98] ———, «The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition», *Comment. Math. Helv.* **73** (1998), no. 1, p. 137–174.
- [Bri01] ———, «On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties», *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), no. 2, p. 263–299.

- [DCP83] C. DE CONCINI & C. PROCESI – « Complete symmetric varieties », in *Invariant theory (Montecatini, 1982)*, Springer, Berlin, 1983, p. 1–44.
- [Hsi75] W. HSIANG – *Cohomology theory of topological transformation groups*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [Hum75] J. HUMPHREYS – *Linear algebraic groups*, Springer Verlag, New York, 1975.
- [Kno91] F. KNOP – « The Luna-Vust theory of spherical embeddings », in *Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups (Hyderabad, 1989)* (Madras), Manoj Prakashan, 1991, p. 225–249.
- [Kno95] ———, « On the set of orbits for a Borel subgroup », *Comment. Math. Helv.* **70** (1995), no. 2, p. 285–309.
- [MFK94] D. MUMFORD, J. FOGARTY & F. KIRWAN – *Geometric invariant theory*, 3d éd., Springer Verlag, New York, 1994.
- [Pin01] S. PIN – « Sur les singularités des orbites d'un sous-groupe de Borel dans les espaces symétriques », *Thèse, Université Grenoble I* (2001), p. 1–109, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/these_daterev.html.
- [PV91] V. L. POPOV & È. B. VINBERG – « Algebraic Geometry IV », *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, vol. 55, ch. Invariant Theory, p. 123–284, *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, 1991.
- [Res02] N. RESSAYRE – « Quotients of group completions by spherical subgroups », *Journal of Algebra* (2002), p. 1–44.
- [Ros56] M. ROSENBLICHT – « Some basic theorems on algebraic groups », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 401–443.
- [RS90] R. W. RICHARDSON & T. A. SPRINGER – « The Bruhat order on symmetric varieties », *Geom. Dedicata* **35** (1990), no. 1-3, p. 389–436.
- [Ser58] J.-P. SERRE – « Espaces fibrés algébriques », in *Séminaire C. Chevalley; 2e année: 1958. Anneaux de Chow et applications*, E. N. S. Paris, 1958, p. 1–37.
- [Spr98] T. A. SPRINGER – *Linear algebraic groups*, second éd., Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998.
- [Spr02] ———, « Intersection cohomology of $B \times B$ -orbit closures in group compactifications », *J. Algebra* **258** (2002), no. 1, p. 71–111.
- [Vin86] È. B. VINBERG – « Complexity of actions of reductive groups », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **20** (1986), no. 1, p. 1–13, 96.
- [Wol93] J. A. WOLF – « Admissible representations and geometry of flag manifolds », in *The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory (South Hadley, MA, 1992)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 21–45.