Exercices d'algèbre linéaire I

Exercice 1.

1. Dessiner « tous » les sev de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
2. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions d'un système linéaire de 2 équations à 3 inconnus avec second membre non nul ?
3. Combien y a t-il de sev dans $\mathbb{F}_p^2$?
4. Combien y a t-il de sev de dimension d dans $\mathbb{F}_q^n$?

Exercice 2.

1. Est-ce qu'une intersection de sev est un sev ?
2. Est-ce que l'union de 2 sev est un sev ? si la réponse est non donner une CNS.
3. A t-on $E = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ si et seulement si $E = F_1$, F_2 ou F_3 ?
4. ** On suppose que k est infini. Montrer que $E = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ si et seulement s'il existe i tel que $E = F_i$.

Exercice 3.

1. Décrire toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ (puis $\mathbb{R}^n$) vers $\mathbb{R}$.
2. Décrire toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$.
3. Décrire toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'élément e_λ de E par la formule $e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ et l'élément a_λ de E par : $a_\lambda(t) = |t - \lambda|$.

1. Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre mais pas génératrice.
2. Montrer que la famille $(a_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre mais pas génératrice.

3. ** Completer la famille $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ en une base de l'espace vectoriel des fonctions de E qui sont continues, affines par morceaux et dérivables sauf en un nombre fini de points.

Exercice 5. Somme et produit...

1. Caractériser l'égalité $\bigoplus_{i\in I} E_i = \prod_{i\in I} E_i$.
2. Montrer que $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}[X]$.
3. À quoi $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ est-il isomorphe ?

Exercice 6.

1. Définir la notion de somme et de somme directe de sev.
2. Dans $\mathbb{R}^2$, les sev
$$\mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
sont-ils en somme directe ?
3. Montrer que $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \bigoplus_{i\in I} k & \longrightarrow & E \\ & (\lambda_i)_{i\in I} & \longrightarrow & \sum_{i\in I} \lambda_i v_i \end{array}$$
est un isomorphisme.
4. Soit $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{P}$ (resp. I) le sev de E constitué des fonctions paires (resp. impaires). Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
5. Pour des sev L, M et N d'un ev E, a t-on
$$L\cap(M+(L\cap N)) = (L\cap M)+(L\cap N) \text{ et } L\cap(M+N) = (L\cap M)+(L\cap N)?$$
6. Soit $(v_0, \cdots, v_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que si v_0 est combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \cdots, v_n)$ la famille $(v_0, \cdots, v_n)$ est liée. La réciproque est-elle vrai ?

Exercice 7. Trouver une combinaison linéaire nulle et non triviale des 5 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Montrer que $k[X]$ n'est pas de dimension finie. Montrer qu'un espace vectoriel qui a une base infinie n'est pas de dimension finie.

Exercice 9.

1. Montrer que E est de dimension finie si et seulement si toute famille libre est finie.
2. Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 10.

1. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f+g)$ et $\mathrm{rg}(f \circ g)$?
2. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim(E)=\dim(F)$. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si f est injective si et seulement si f est surjective.
   Ce résultat est TRÈS souvent utilisé ; et doit être un réflexe. Deux applications de cet exercice sont le théorème d'interpolation de Lagrange et le théorème Chinois pour les polynômes.

Exercice 11.

1. Soit $\phi : k_n[X] \longrightarrow k_n[X]$, $P \longmapsto P(X+1)$. Montrer que ϕ est un isomorphisme. Quelle est la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$ (appelée base canonique de $k_n[X]$) ?

2. Soit dans $\mathbb{R}^2$ les deux droites d et d' engendrées par les vecteurs $(1,1)$ et $(2,-1)$. Montrer que la projection p sur d le long de d' est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice A dans la base canonique de p. Vérifier à la main que $A.A = A$.

Exercice 12. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout j, $a_{jj} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible. Même question avec l'hypothèse pour tout j, $a_{jj} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un k-ev de dimension finie.

1. Montrer que les suites $\mathrm{Ker}(f^n)$ et $\mathrm{Im}(f^n)$ sont stationnaires à partir d'un même rang p.

2. Posons $\delta_n := \dim(\mathrm{Ker}(f^{n-1})) - \dim(\mathrm{Ker}(f^n))$. Montrer que δ_n est décroissante.

Exercice 14. Un exemple de dimension infinie... Exhiber une base de $\mathbb{C}(X)$ (resp. $\mathbb{R}(X)$). Ces espaces vectoriels sont-ils isomorphes à $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$) ?