Exercices sur la réduction 2.

Exercice 1. Soit G un sous-groupe fini commutatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les éléments de G sont simultanément diagonalisables.

Exercice 2. Soit A une matrice de taille n sur un corps k. On considère $r_A : M_n(k) \longrightarrow M_n(k), M \longmapsto MA$, $l_A : M_n(k) \longrightarrow M_n(k), M \longmapsto AM$ et $ad_A : M_n(k) \longrightarrow M_n(k), M \longmapsto AM - MA$.

1. Montrer que A est nilpotente si et seulement si r_A l'est si et seulement si l_A l'est. Comparer les indices de nilpotences.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si r_A l'est si et seulement si l_A l'est. Comparer les valeurs propres.
3. Montrer que A est nilpotente si et seulement si ad_A l'est. Comparer les indices de nilpotences.
4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si ad_A l'est. Comparer les valeurs propres.

Exercice 3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si sa classe de conjugaison est fermée.

Exercice 4. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$ fixé. On se propose de montrer qu'il existe un polynôme P tel que $P(M)^k = M$.

1. Rappeler le développement en série entière de $\sqrt[k]{1+z}$ en 0.
2. Traiter le cas $M = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente.
3. Conclure.

Exercice 5. On se place dans $M_n(k)$.

1. Montrer que, pour tout $t \in k$, toute matrice nilpotente N est semblable à tN.
2. Réciproquement soit $t \in k$ et $M \in M_n(k)$. Supposons que M soit semblable à tM. Montrer que soit M est nilpotente soit t est une racine de l'unité.

Exercice 6. Montrer que le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.