Chapitre 1

Holomorphie : propriétés élémentaires

1.1 Premiers pas

Exercice 1.1.1 *Pour tout complexe $z = x + iy$ (avec x, y réels) on pose*

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) \ .$$

(a) Montrer qu'on a $e^0 = 1$ et $e^z.e^{z'} = e^{z+z'}$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$. Donner le module et un argument de e^z en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

(b) Montrer que la fonction exp: $z \mapsto e^z$ est périodique de période $2\pi i$, et est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

(c) Montrer que la fonction exp est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Quelle est sa dérivée ?

(d) Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction non nulle vérifiant $f(z + z') = f(z)f(z')$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$. On suppose de plus que f est drivable en 0. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, puis donner une relation entre f' et f. Prouver qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = e^{cz}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.1.2 *Dans cet exercice, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ de la façon usuelle ; pour deux complexes $z_0 = a_0 + ib_0$ et $z_1 = a_1 + ib_1$, la notation $\langle z_0, z_1\rangle$ désigne le réel $a_0a_1 + b_0b_1$ (le produit scalaire de z_0 et z_1 vus comme vecteurs du plan).*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ écrit dans la base canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) dét $A \geqslant 0$ et il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tous $u, v \in \mathbb{C}$ on a : $\langle Au, Av\rangle = k^2\langle u, v\rangle$;

(ii) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta \\ k\sin\theta & k\cos\theta \end{pmatrix} \ ;$$

(iii) $a = d$ et $b = -c$;

(iv) il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $u \in \mathbb{C}$ on a : $Au = wu$;

(v) A est la composée d'une rotation de centre 0 et d'angle θ et d'une homothétie de rapport k.

(vi) A est $\mathbb{C}$-linéaire ;

(vii) $A(i) = iA(1)$;

Si dét $A \neq 0$, ces conditions sont encore équivalentes à :

(viii) A préserve les angles orientés (dans ces conditions on dit que A est une similitude directe).

Rappelons que si z_1, z_2 sont deux éléments de $\mathbb{C}^*$, on appelle angle orienté entre les vecteurs z_1, z_2 l'unique réel $\alpha \in [-\pi, \pi[$ tel que :

$$\frac{z_2}{|z_2|} = e^{i\alpha} \frac{z_1}{|z_1|} .$$

Exercice 1.1.3 *1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une application différentiable. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) f est holomorphe sur U et $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.

(b) Pour tout $u \in U$, Df_u est de la forme $k_u A_u$ où $k_u \in]0, +\infty[$ et A_u est une rotation de $\mathbb{R}^2$.

(c) Pour tout $u \in U$, $Jacf_u > 0$ et Df_u conserve l'angle orienté de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Holomorphie et conditions de Cauchy

Exercice 1.2.1 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l' ensemble des points de $\mathbb{C}$ où la fonction est diffrentiable (comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$), l'ensemble des points où elle est dérivable, et l'ensemble des points où elle est holomorphe.*

1. $z \mapsto \overline{z}$.
2. $z \mapsto z\overline{z}$.
3. $z \mapsto \Re\mathrm{e}(\mathrm{z})$.
4. $z \mapsto \Im\mathrm{m}(\mathrm{z})$.
5. $z \mapsto \overline{z}^3$.
6. $z \mapsto z^k$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$ *fixé.*
7. $z \mapsto e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$ *si* $z = x + iy$.

Exercice 1.2.2 *1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x+iy) = x + 2ixy$. La fonction f est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?*

2. Soit $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $g(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$. La fonction g est-elle holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

Exercice 1.2.3 (Partiel 99) *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :*

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Déterminer les ensembles des points de $\mathbb{C}$ où

a) *f est holomorphe ;*

b) *f est différentiable (comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) ;*

c) *f admet des dérivées partielles et où les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites.*

Exercice 1.2.4 *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :*

$$f(x+iy) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{si } x+iy \neq 0, \\ 0 & \text{si } x+iy = 0. \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en 0, mais possède des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann en 0.

Exercice 1.2.5 *Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction g définie par $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est dérivable en $\overline{z_0}$, et calculer $g'(\overline{z_0})$.*

Exercice 1.2.6 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On note $P = \Re\mathrm{e(f)}$ et $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ les parties réelle et imaginaire de f.*

1. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) f est constante sur U.*
   - *(b) P est constante sur U.*
   - *(c) Q est constante sur U.*
2. *En déduire que les assertions précédentes sont aussi équivalentes à :*
   - *(d) $\overline{f}$ holomorphe sur U.*
   - *(e) $|f|$ est constante sur U.*
   - *(f) $|f|$ est holomorphe sur U.*

Exercice 1.2.7 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soient f et g des fonctions holomorphes sur U telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in U$.*

Exercice 1.2.8 *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soient f et g des fonctions holomorphes sur U telles que $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$. On suppose aussi que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = cg(z)$ pour tout $z \in U$.*

Exercice 1.2.9 *Soit $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $P = \Re\mathrm{e(f)}$ et $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ les parties réelle et imaginaire de f.*

- a) *Montrer que s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tel que $aP + bQ = c$ alors f est constante sur U.*
- b) *Soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable telle que $\forall z \in f(U)$, on ait $D\Psi_z \neq 0$.*
  - i) *Montrer que s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in U$, $\Psi(P(x, y), Q(x, y)) = k$, alors f est constante sur U.*
  - ii) *Quelles sont les fonctions holomorphes sur U dont l'image est incluse dans une droite du plan ? ; un cercle du plan ?*

Exercice 1.2.10 *Soit $f : U \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On note $P = \Re\mathrm{e(f)}$ et $Q = \Im\mathrm{m(f)}$ les parties réelle et imaginaire de f.*

1. *Caractériser les fonctions $Q_1 : U \to \mathbb{R}$ telles que $P + iQ_1$ est holomorphe sur U.*
2. *Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphes telles que*
   - *(a) $P(x, y) = x^2 - y^2 - x - y$.*
   - *(b) $P(x, y) = x^2 - y^2 - x$.*

(c) $P(x,y) = -ye^x \cos y - xe^x \sin y$.

(d) $Q(x,y) = sh(y)\sin(x)$.

Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ *et* $P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

1. *Donner une condition nécéssaire et suffisante portant sur* a,b,c *pour qu'il existe* f *holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *telle que* $\Re\mathrm{e}(\mathrm{f}) = \mathrm{P}$.
2. *Si cette condition est remplie, déterminer toutes les fonctions* f *holomorphes sur* $\mathbb{C}$ *telles que* $\Re\mathrm{e}(\mathrm{f}) = \mathrm{P}$.

Exercice 1.2.11 *Soit* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *une fonction polynômiale en* x,y. *On suppose que* f *est holomorphe en* 0 *; montrer qu'alors* f *est un polynôme en* $z = x + iy$.
Indication : on pourra utiliser Cauchy-Riemann en polaires en remarquant qu'il existe des fonctions λ_n *dérivables telles que* $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \sum \lambda_n(\theta) r^n$.