Chapitre 9

Partie 2 : le théorème de Rouché

9.2 Le théorème de Rouché

Exercice 9.2.1 *On fixe $R > r > 0$.*

1. *Soit h une fonction holomorphe sur $D(0, R[$ qui ne s'annule pas sur le cercle C_r de centre 0 et de rayon r. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{h'(z)}{h(z)}dz$ est égal au nombre de zéros de h, comptés avec multiplicité, dans $D(0, r[$ (γ_r étant C_r parcouru une fois dans le sens direct).*

   On considère maintenant deux fonctions holomorphes f, g sur le disque ouvert $D(0, R[$. On suppose de plus que $r < R$ est tel que $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout z appartenant à C_r.
2. *Montrer que f et g ne s'annulent pas sur C_r.*
3. *En considérant la fonction $h = \frac{f}{g}$ sur un ouvert bien choisi, montrer que f et g ont le même nombre de zéros dans $D(0, r[$, comptés avec multiplicité.*
4. *Le théorème reste-t-il vrai si l'on remplace l'inégalité stricte $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ par l'inégalité large $|f(z) - g(z)| \leq |g(z)|$?*

Exercice 9.2.2 *On fixe $a \in \mathbb{C}$, $|a| \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$. Montrer que l'équation $1 + z + az^n = 0$ a toutes ses racines dans le disque $D(0, 2[$.*

Exercice 9.2.3 *Soit $P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots a_m$ un polynôme. On suppose que $|P(z)| \leqslant 1$, $\forall z \in D(0, 1]$. Montrer qu'il existe z_0, $|z_0| = 1$, tel que $|P(z_0)| = 1$.*

Exercice 9.2.4 *Soit $r > 0$ et U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $D(0, r]$. Soit f holomorphe sur U. On suppose que*

$$|f(0)| + r|f'(0)| < m := \inf_{|z|=r} |f(z)|.$$

Montrer que f possède au moins deux zéros dans le disque ouvert $D(0, r[$.