Chapitre 9

Partie 1 : le théorème des résidus

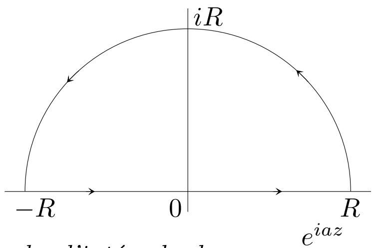
Exercice 9.1.1 *Calculer* $I = \int_\gamma f(z)\, dz$, *avec*

1. $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \dfrac{5z^2+1}{z(z-1)}$.
2. $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+2)}$.
3. $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 1$; $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$.
4. $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \dfrac{e^z}{z \sin z}$.

Exercice 9.1.2 *Si* γ *désigne le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer* $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$.

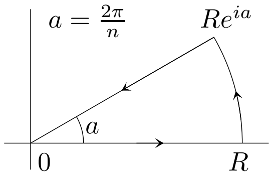
Exercice 9.1.3 *Pour* $r \neq 1$ *on note* γ_r *le cercle de centre* 0 *et de rayon* r, *parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer* $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1} dz$.

Exercice 9.1.4 *Pour* $R > 1$, *on considère le contour suivant :*

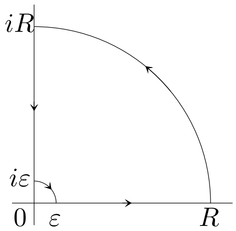


1. *On fixe* $a > 0$. *Calculer l'intégrale de* $z \mapsto \dfrac{e^{iaz}}{1+z^2}$ *sur ce circuit. En faisant tendre* R *vers* $+\infty$, *déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$.
2. *En intégrant* $\dfrac{ze^{iz}}{1+z^2}$ *sur le même contour, calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^2} dx$.

Exercice 9.1.5 *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. En considérant le contour ci-dessous, puis en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.



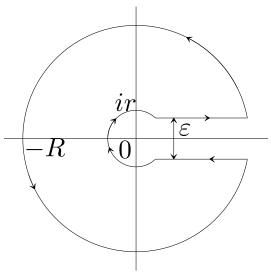
Exercice 9.1.6 *En intégrant* $\dfrac{e^{iz}}{z}$ *sur le circuit suivant, puis en faisant tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$, calculer* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.



Exercice 9.1.7 *On fixe $a \in]0,1[$. On note Log la détermination principale du logarithme définie sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, et on pose pour $z \in U$*

$$f(z) = e^{(a-1)Log(z)} \ .$$

1. *Montrer que la fonction* $x \mapsto \dfrac{x^{a-1}}{1+x}$ *est intégrable sur $]0,+\infty[$.*
   Pour $0 < \varepsilon < r < 1 < R$, on considère le circuit $\gamma_{\varepsilon,r,R}$ suivant :



On pose $I(\varepsilon, r, R) = \displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,r,R}} \frac{f(z)}{z+1}dz$.

2. *Calculer $I(\varepsilon, r, R)$ par le théorème des résidus.*
3. *Déterminer $I(r,R) = \lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon, r, R)$.*
4. *Déterminer la limite de $I(r,R)$ quand $r \to 0$ et $R \to +\infty$ et en déduire que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \ .$$