

Chapitre 2

Séries entières

2.1 Rappels sur \limsup et \liminf

Exercice 2.1.1 Dans cet exercice, (u_n) désigne une suite de réels.

1. Rappeler la définition de $\limsup u_n$.
2. Pour chacune des suites (u_n) suivantes, calculer sa \limsup :

$$\text{a) } u_n = (-1)^n ; \quad \text{b) } u_n = \begin{cases} \cos(n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n & \text{sinon} \end{cases} ; \quad \text{c) } u_n = \frac{e^n}{n!}$$

Dans les questions suivantes, on suppose que (u_n) est bornée.

3. Montrer qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers $\limsup(u_n)$.
4. Montrer que $L = \limsup u_n$ est caractérisée par la condition suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des n tels que $u_n \geq L + \varepsilon$ est fini, et l'ensemble des n tels que $u_n \geq L - \varepsilon$ est infini.
5. Reprendre cet exercice avec la \liminf .

Exercice 2.1.2

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites bornées de réels. Etablir les propositions suivantes :

$$\limsup (u_n + v_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n + \limsup v_n ;$$

$$(\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n) \Rightarrow \limsup u_n \leq \limsup v_n.$$

Donner un exemple de deux suites pour lesquelles la première inégalité est stricte.

2. Reprendre la question précédente avec la \liminf .

2.2 Disque de convergence et comportement au bord.

Exercice 2.2.1

1. Soit (u_n) une suite de réels qui décroît vers 0, et (v_n) une suite de complexes telle que

$$\exists M > 0 \quad \forall n \quad \left| \sum_{k=0}^n v_k \right| \leq M.$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ est convergente.

2. Application : soit (u_n) une suite de réels qui décroît vers 0, et θ un réel non multiple de 2π . Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n e^{in\theta}$ est convergente.

Exercice 2.2.2 Calculer le rayon de convergence des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^n & \text{b)} \quad \sum_{n \geq 0} n! z^n & \text{c)} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \\ \text{d)} \quad \sum_{n \geq 0} n! z^{n^2} & \text{e)} \quad \sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!}. & \end{array}$$

Montrer que la série c) converge pour tout z tel que $z \neq \frac{1}{4}$ et $|z| = \frac{1}{4}$.

Exercice 2.2.3 Soit $\theta \in [0, 2\pi]$.

- a) Montrer que si $|z| < 1$, la série $S(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$ converge absolument.
- b) Montrer que, pour $z = 1$, la série dérivée de S diverge. En déduire le rayon de convergence de S .
- c) Montrer, sur cet exemple, qu'une série entière et sa série dérivée n'ont pas le même comportement sur le bord du disque de convergence.

Exercice 2.2.4 Calculer le rayon de convergence des séries suivantes et étudier la convergence de la série sur le bord du disque de convergence :

$$\text{a)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n}} \quad \text{b)} \quad \sum_{n \geq 2} \frac{z^n}{n(\ln n)^2} \quad \text{c)} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{e^{i\pi n^2/2}}{n} z^n.$$

Exercice 2.2.5

1. Montrer que la fonction $z \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est définie et continue sur le disque unité fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
2. Montrer que f n'est pas prolongeable par une fonction holomorphe en 1 (on montrera que la restriction de f à \mathbb{R} n'a pas de dérivée à gauche en 1).

Exercice 2.2.6

1. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où $a_{2n+1} = a^{2n+1}$ et $a_{2n} = b^{2n}$ avec $0 < a, b$.
2. Pour la série $\sum a_n z^n$, où $a_{2n} = a^n b^n$ et $a_{2n+1} = a^n b^{n+1}$ avec $a, b > 0$, comparer l'inverse du rayon, R^{-1} , avec $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Exercice 2.2.7

- a) Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = R$. Montrer que si la série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ converge alors la série de fonctions $z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$ du plan complexe.
- b) **Application** : on veut montrer que

$$\log 2 = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}. \quad (2.1)$$

- (i) Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence

$$1 \text{ et que pour tout } t \in]-1, 1[, \log(1+t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}.$$

- (ii) En utilisant a), en déduire la formule (??).

2.3 Développement en série entière

Exercice 2.3.1 Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence) :

- a) $g(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$.
- b) $\frac{1}{1+z+z^2}$.
- c) $\frac{z \sin \alpha}{z^2 - 2(\cos \alpha)z + 1}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).
- d) $h(z) = e^{\frac{z}{\tan(\alpha)}} \cos(z)$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ est fixé et $\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Exercice 2.3.2 1. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} 2^n z^n$. Calculer sa somme f dans son disque de convergence. Donner le développement en série de f au point $z = -1/4$ et le rayon de convergence de cette série.

2. De même, on considère la série entière $S(z) = \sum_{n \geq 0} n z^n$. Calculer le rayon de convergence de cette série entière et expliciter $S(z)$.

Exercice 2.3.3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- a) Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
 b) Montrer que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0 et n'est donc pas analytique en 0.

2.4 Théorème de Liouville et formule de Parseval

Exercice 2.4.1 Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Pour $|z| < R$, on pose $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

- a) On fixe $r \in]0, R[$. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

- b) Pour $r \in]0, R[$, on pose $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Justifier que $M(r) < +\infty$ et que, pour tout $n \geq 0$, on a $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.
 c) On suppose que $R = +\infty$. Montrer que s'il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k . Comme cas particulier, en déduire le **théorème de Liouville** : toute fonction entière et bornée est constante.
 d) On revient au cas général. Etablir la **formule de Parseval** :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}, \quad (r \in [0, R]).$$

- e) On suppose que f se prolonge en une fonction continue \tilde{f} sur le disque fermé $D(0, R]$.

e.i) Soit $\varphi : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(re^{i\theta})|^2 d\theta$.

Montrer que φ est continue sur $[0, R]$.

- e.ii) En déduire que la formule de Parseval reste valable en remplaçant f par \tilde{f} et r par R .