Chapitre 3

Fonctions classiques et logarithme complexe

3.1 Fonctions circulaires et hyperboliques

Exercice 3.1.1 a) *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\cos(iz) = \mathrm{ch}(z)\ ; \quad \mathrm{ch}(iz) = \cos(z)\ ; \quad \sin(iz) = i\,\mathrm{sh}(z)\ ; \quad \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)\ .$$

Déduire les parties réelles et imaginaires des fonctions $\cos$, $\sin$, ch *et* sh. *Les fonctions* $\cos$ *et* $\sin$ *sont-elles bornées sur* $\mathbb{C}$ *?*

b) *Trouver les zéros des quatre fonctions* $\cos$, $\sin$, ch *et* sh.

c) *Donner le développement en série entière de* $\cos$, $\sin$, ch *et* sh.

d) *Résoudre les équations :*

$$(i) \quad \sin(z) = \frac{5}{3}\ ; \quad (ii) \quad \mathrm{ch}(z) = \frac{1}{2}\ ; \quad (iii) \quad \cos(z) = 2\ ; \quad (iv) \quad \sin z = \mathrm{ch}\, 4\ .$$

Exercice 3.1.2 *Soit $f : z \mapsto \sin(z)$ et $g : z \mapsto \cos(z)$.*

1. *Trouver l'image par f de la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.*
2. *Trouver l'image par f de la droite d'équation $x = a$ où $0 < a < \frac{\pi}{2}$.*
3. *Trouver l'image par f du segment $\{-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; y = 0\}$.*
4. *Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi; y = a\}$ avec $a > 0$.*

Exercice 3.1.3 a) *Quels sont les domaines de définition de* $\tan$ *et de* th *? Montrer que* $\tan$ *est π-périodique et que* th *est $i\pi$-périodique.*

b) *Montrer que $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ et que $1 + \tan^2(z) = \dfrac{1}{\cos^2(z)}$ pour $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.*

c) *Montrer que $\mathrm{ch}^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$ et que $1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{z}) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(\mathrm{z})}$ pour $z \neq i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.*

3.2 Le logarithme complexe

Exercice 3.2.1 *Soit* $U = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ *et* Log *la détermination principale du logarithme.*

1. *A t-on* $\mathrm{Log}(e^z) = z$ *pour tout* $z \in (\exp)^{-1}(U)$ *? Sinon, déterminer un ouvert* V *de* $\mathbb{C}$ *où cette égalité est vraie.*
2. *Soit* $P^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Re\mathrm{e(z)} > 0\}$*. A t-on* $\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z')$ *pour tous* $z, z' \in P^+$ *?*
3. *Même question en remplaçant* P^+ *par* $\pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im\mathrm{m(z)} > 0\}$*.*
4. *Pour* $z \in U$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$*, on pose* $z^{(\alpha)} = e^{\alpha \mathrm{Log}(z)}$*. Montrer que pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $z \in U$ *on a* $z^{(n)} = z^n$*.*
5. *On pose* $z = e^{3i\pi/4}$*. Comparer* $(z^{(2)})^{(i)}$*,* $z^{(2i)}$ *et* $(z^{(i)})^{(2)}$*.*

Exercice 3.2.2 *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $f : U \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur* U*.*

1. *Soit* F *une fonction continue de* U *dans* C*. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (a) F *est une détermination sur* U *du logarithme de* f*, i.e*
   $$\forall z \in U \quad e^{F(z)} = f(z)$$
   (b) F *est holomorphe sur* U*,* $F'(u) = \dfrac{f'(u)}{f(u)}$ *pour tout* $u \in U$ *et il existe* $u_0 \in U$ *tel que* $e^{F(u_0)} = f(u_0)$*.*
2. *Soit* F *et* G *deux déterminations du logarithme de* f *dans* U*. Comparer* F *et* G*.*
3. *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}^*$ *contenant un cercle centré à l'origine. Montrer qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme sur* U*.*
4. *Exprimer la somme de la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ *à l'aide de la détermination principale du logarithme.*
5. *Soit* F *une détermination du logarithme sur un ouvert connexe* U *de* $\mathbb{C}^*$*. Montrer que* F *est analytique sur* U *(on montrera que pour tout* a *dans* U *on a* $\displaystyle F(z) = F(a) - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}(1 - \frac{z}{a})^n$ *sur un voisinage de* a*).*

Exercice 3.2.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente toute fonction holomorphe f sur U, à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$ telle que $\tan(f(z)) = z$, $(z \in U)$.*

1. *Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de la fonction arctangente, alors $-i \notin U$ et $i \notin U$.*
2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - (i) *f est une détermination holomorphe de la fonction arctangente sur U,*
   - (ii) *$2if(z)$ est une détermination holomorphe sur U du logarithme de $\dfrac{1+iz}{1-iz}$.*
3. *Soit U un ouvert* **connexe** *de $\mathbb{C}$ ne contenant ni i, ni $-i$. Supposons qu'il existe sur U une détermination holomorphe de la fonction arctangente. Expliciter toutes les déterminations holomorphes sur U de la fonction arctangente.*
4. *Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| \geqslant 1\}$.*
   - a) *Construire sur U une détermination holomorphe f de la fonction arctangente.*
   - b) *Déterminer $f(U)$.*
   - c) *Donner pour $|z| < 1$, le développement en série entière de f.*

Exercice 3.2.4 *Soit f une fonction continue sur un ouvert U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant pas -1 et 1. On appelle détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus toute fonction holomorphe f sur U, à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\sin(f(z)) = z$, $(z \in U)$.*

1. *Montrer que s'il existe une détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus, alors $-1 \notin U$ et $1 \notin U$.*
2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ ne contenant ni 1, ni -1, et f une fonction holomorphe sur U. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*
   - (i) *f est une détermination holomorphe sur U de la fonction arcsinus,*
   - (ii) *il existe g continue sur U tel que $g(z)^2 = 1 - z^2$ et $e^{if(z)} = iz + g(z)$ pour tout $z \in U$.*
3. *Montrer que dans ce cas $f'(z) = \frac{1}{g(z)}$ pour tout $z \in U$.*
4. *Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$. Montrer qu'il existe sur U une unique détermination holomorphe f de la fonction arcsinus telle que $f(0) = 0$.*

3.3 Les fonctions puissances non entières

Exercice 3.3.1 (Racines carrées d'une fonction holomorphe) *Notons U le plan complexe privé des deux demi-droites $[1,+\infty[$ et $]-\infty,-1]$ de l'axe réel.*

a) *Montrer que l'image de U par la fonction $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2 - 1$ est contenue dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.*

b) *On note* Log *une détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $f \colon U \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z^2-1)}$ est bien définie et holomorphe sur U. Calculer son carré et sa dérivée.*

c) *Notons V le plan complexe privé du segment $[-1,1]$. Vérifier que pour $z \in V$, on a $z^{-1} \in U$. On définit $g \colon V \to \mathbb{C}$ en posant $g(z) = izf(z^{-1})$. Montrer que g est bien définie et holomorphe sur V. Calculer son carré et sa dérivée.*

Exercice 3.3.2 (Racines p-ièmes) *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et p un entier, $p \geq 2$. On appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f \colon U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on ait $(f(z))^p = z$.*

a) *Montrer que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto \log(z)$ sur U, alors il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.*

b) *Soit f une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer que pour tout $z \in U$ on a $f(z) \neq 0$. En déduire que $0 \notin U$.*

c) *On suppose U connexe et on note f_1, f_2 deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.*

d) *En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U, alors il en existe exactement p distinctes. Quelles sont-elles ?*

e) *Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que$f(1) = e^{4i\pi/3}$. Calculer $f(i)$ et déterminer $f(U)$.*

Exercice 3.3.3 *Soit $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_j = \arg(a_j) \in [-\pi, \pi[$, $L_j = \{re^{i\alpha_j} : r \geq |a_j|\}$ et $U = \mathbb{C} \setminus \cup_{j=1}^m L_j$.*

1. *Montrer qu'il existe f holomorphe sur U telle que $f(z)^2 = \prod_{j=1}^{m}(z - a_j)$ pour tout $z \in U$.*
2. *Soit $U = \mathbb{C} \setminus (]-\infty - 1] \cup [1, +\infty[)$. En utilisant la question 1., retrouver le résultat de l'exercice* **??**, *à savoir qu'il existe sur U une détermination holomorphe de $(z^2-1)^{1/2}$.*
3. *Même question en remplaçant U par $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.*