Chapitre 4

Intégration le long de chemins

4.1 Calculs explicites et majoration

Exercice 4.1.1 *Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer*

$$\int_\gamma \overline{z} dz.$$

Exercice 4.1.2 *Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1+i$, $1-i$, $-1-i$ et $-1+i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer*

$$\int_\gamma \frac{z-1}{z} dz.$$

Exercice 4.1.3 *Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens direct, et soit f une fonction continue définie sur le support de γ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que*

$$\overline{\int_\gamma f(z) dz} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2} dz.$$

Exercice 4.1.4 *Soient $P = \{z : \Im\mathrm{m}(z) \geq 0\}$ et f continue sur P et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^+$ tels que :*

$$|f(z)| \leq M|z|^n \text{ pour tout } z \in P.$$

Soit γ_R le demi-cercle de centre 0 et de rayon R contenu dans P. Montrer que

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z) e^{iz} dz\right| \leq M\pi R^n.$$

4.2 Les lemmes de Jordan

Exercice 4.2.1 *On fixe* $r_0 \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi[$ *avec* $\alpha_1 < \alpha_2$.

1. *Soit* $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. *Soit* $f : \Delta_1 \to \mathbb{C}$ *continue telle que* $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ *et soit* $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{C}$ *défini par* $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. *Montrer que*
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0.$$
2. *Soit* $\Delta_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leqslant r_0, \arg(z) \in [\alpha_1, \alpha_2]\}$. *Soit* $g : \Delta_2 \to \mathbb{C}$ *continue telle que* $\lim_{z\to 0} zg(z) = 0$ *et soit* $\gamma_r : [\alpha_1, \alpha_2] \to \mathbb{C}$ *défini par* $\gamma_r(\alpha) = re^{i\alpha}$. *Montrer que*
$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} g(z)dz = 0.$$

4.3 Application

Exercice 4.3.1 *En intégrant* $z \mapsto e^z$ *le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ *et pour* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re\mathrm{e}(z) \geq 0$ *on a :*

$$\left|e^{bz} - e^{az}\right| \leq (b-a)|z|e^{b\Re\mathrm{e}(z)}.$$