

# Chapitre 5

## Primitives et indices

### 5.1 Primitives

**Exercice 5.1.1** Soient  $U$  un domaine de  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe telle que  $f(z) \neq 0$  pour tout  $z \in U$ . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\frac{f'}{f}$  a une primitive dans  $U$ .
2. Il existe dans  $U$  une détermination holomorphe du logarithme de  $f$ .

Dans ce cas, quelles sont toutes les déterminations holomorphes sur  $U$  du logarithme de  $f$  ?

**Exercice 5.1.2** Soit  $\gamma$  le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer  $\int_{\gamma} \frac{z+1}{z} dz$  (sans expliciter l'intégrale curviligne et sans la théorie de l'indice).

**Exercice 5.1.3** On fixe  $a \in ]0, 1[$  et  $r \in ]0, 1 - a[$ . Soit  $\gamma$  le cercle de centre  $a$  et de rayon  $r$ . Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ , on définit  $g$  par  $g(z) = 2 \frac{z-a}{z^2-1}$ . Soit  $\Gamma = g \circ \gamma$ .

1. Montrer que  $\Gamma$  est un circuit tracé dans  $\mathbb{C}^*$ .
2. Calculer  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z}$ .

**Exercice 5.1.4** Soit  $\gamma$  le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^n} dz \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad ; \quad \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \quad ; \quad \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz \quad ; \quad \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2} dz$$

**Exercice 5.1.5** 1. Soit  $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{i^n z^{n-1}}{n!}$ . Montrer que  $f$  est entière et calculer  $f(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

2. Soit  $r > 0$ . En utilisant le circuit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} re^{2i\pi t}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (4t-3)r, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} ,$$

montrer que :

$$\int_{-r}^r f(x)dx - i\pi = -i \int_0^\pi \exp(ire^{ix})dx.$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

## 5.2 Indices

**Exercice 5.2.1** Soit  $\gamma$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  avec  $a, b > 0$ . En calculant de deux manières différentes  $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ , donner la valeur de

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

**Exercice 5.2.2** 1. Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $|\alpha| \neq 1$ . Montrer que l'application  $t \mapsto \frac{1}{1-2\alpha \cos t + \alpha^2}$  est intégrable sur  $[0, 2\pi]$ .

2. Pour  $|\alpha| \neq 1$ , soit  $f(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\alpha \cos t + \alpha^2}$ . En considérant l'intégrale curviligne d'une fonction bien choisie le long du cercle unité, calculer  $f(\alpha)$ . La fonction  $f$  est-elle holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1\}$  ?

**Exercice 5.2.3** Soit  $V = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ . On a vu que (cf. TD du chapitre 3) qu'il existe sur  $V$  une détermination holomorphe de  $(z^2 - 1)^{1/2}$ . Montrer que néanmoins, il n'existe pas de détermination holomorphe de  $\log(z^2 - 1)$ .

**Exercice 5.2.4** Soit  $U$  un domaine et  $f$  une fonction holomorphe sur  $U$  telle que  $f(z) \neq 0$  pour tout  $z \in U$ .

1. Montrer que pour tout circuit  $\gamma$  tracé dans  $U$  on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}.$$

2. En déduire que si pour tout  $n \geq 2$ , il existe sur  $U$  une détermination holomorphe de  $(f(z))^{1/n}$ , alors il existe sur  $U$  une détermination holomorphe de  $\log f$ .

**Exercice 5.2.5** Soit  $U = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ .

1. Soit  $\gamma$  un circuit tracé dans  $U$ . Montrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 1} = 0.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction  $f$  holomorphe sur  $U$  telle que  $f'(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ,  $z \in U$  et  $f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$ .

3. Existe-t-il une primitive de  $z \mapsto \frac{1}{z^2 + 1}$  dans  $D(0, 1[$  ? dans  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$  ?