Chapitre 7

Zéros des fonctions holomorphes

Exercice 7.1 *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{C}$.

1. *Soient* f *et* g *deux fonctions holomorphes sur* Ω *telles que* $f(z)g(z) = 0$ *pour tout* $z \in \Omega$. *Montrer que* f *ou* g *est identiquement nulle.*
2. *Soit* f *une fonction holomorphe sur* Ω. *On suppose qu'il existe deux déterminations holomorphes de la racine carrée de* f, *notées* g_1 *et* g_2. *Retrouver le fait que* $g_1 = g_2$ *ou* $g_1 = -g_2$.

Exercice 7.2 *Etudier l'existence et l'unicité de fonctions holomorphes* f *sur un voisinage connexe* U *de* 0 *telles que :*

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geqslant 1$. b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \exp(-n)$, $\forall n \geqslant 1$.

Exercice 7.3 *Déterminer les zéros de la fonction* $z \longmapsto 1 - \exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$ *dans le disque ouvert* $D(0, 1[$. *Cela contredit-il le principe des zéros isolés ?*

Exercice 7.4 *Soient* U *un domaine de* $\mathbb{C}$ *et* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* U *qui converge vers* $a \in U$ *sans jamais prendre cette valeur. Soient* f *et* g *deux fonctions holomorphes sur* U *telles que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait :*

$$f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)\,.$$

Montrer que si $g(a) \neq 0$, *alors il existe une constante* $c \in \mathbb{C}$ *telle que* $f = cg$.

Exercice 7.5 *Soient* f *et* g *deux fonctions entières telles que :*

$$|f(z)| \leqslant |g(z)|\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

a) *Montrer que tout zéro* z_0 *de* g *est un zéro de* f *et que la multiplicité de* f *au point* z_0 *est au moins aussi grande que celle de* g.

b) *En déduire que f et g sont proportionnelles.*

Exercice 7.6 *On fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $a = e^{2i\pi t}$ et on note*

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \right\}.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur U telle que :

$$f(az) = f(z), \quad \forall z \in U\,.$$

Enfin on définit $g : U \to \mathbb{C}$ par $g(z) = zf'(z) - f'(1)$, $z \in U$.

a) *Calculer $g(a^n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

b) *Montrer que g est identiquement nulle sur U.*

c) *Montrer que f est constante.*

d) *La conclusion subsiste-t-elle si on prend $t \in \mathbb{Q}$?*

Exercice 7.7 *Soit f une fonction entière.*

1. *On pose $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Montrer que g est une fonction entière.*
2. *On suppose qu'il existe une suite (a_n) de réels distincts tendant vers 0 et telle que la suite $f(a_n)$ soit une suite de réels. Montrer qu'alors $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.*
3. *On suppose en plus que la suite (a_n) de la question précédente est strictement décroissante et que pour tout entier n on a $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$. Montrer que f est constante.*
4. *Le résultat de la question précédente est-il encore valable si la suite (a_n) n'est pas strictement décroissante ?*

Exercice 7.8 *Soit f une fonction entière vérifiant*

$$\forall z \in \mathbb{C}\, \exists n \in \mathbb{N}\, f^{(n)}(z) = 0\ .$$

Montrer que f est un polynôme.

(On rappelle que la notation $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f)