# Chapitre 8

# Points singuliers isolés

## 8.1 Nature des singularités

**Exercice 8.1.1** *1. Trouver l'ordre des pôles dans les cas suivants :*

$$f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

*2. Calculer, sans utiliser la partie singulière, les résidus de $f$ en chacune de ses singularités isolées :*

$$\begin{array}{lll} f(z) = \frac{z}{\sin z} & f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{z}{e^z+1} \\ f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} & f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos(z)} \end{array}$$

*Pour chacune des singularités isolés de $f$, donner l'expression de la partie singulière associée et (re)trouver le résidu correspondant :*

$$\begin{array}{lll} f(z) = e^{1/z} & f(z) = z\cos(1/z) & f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}} \\ f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)} & f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} & f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)} \\ f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos z} & & \end{array}$$

**Exercice 8.1.2** *Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :*

$$\textbf{a)}\ \frac{\sin z}{z^3 - \pi^2 z}, \qquad \textbf{b)}\ cotan z - \frac{1}{z}, \qquad \textbf{c)}\ \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}, \quad \textbf{d)}\ \pi\, cotan(\pi\, z).$$

**Exercice 8.1.3** *Soit $U$ un ouvert connexe. Même question que ci-dessus avec :*

a) $\frac{f'}{f}$, *lorsque $f$ est une fonction holomorphe sur $U$.*

b) $\frac{g}{h}$, *lorsque $g$ et $h$ sont deux fonctions holomorphes sur $U$ et que $h$ a un pôle simple.*

c) $\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$, *lorsque $f$ est une fonction holomorphe sur $U$, $z_o \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.*

**Exercice 8.1.4** 1. *Soit $a \in \mathbb{C}$ et soient $g$ et $h$ deux fonctions holomorphes au voisinage de $a$. On suppose que $g(a) \neq 0$ et que $a$ est un zéro isolé de $h$ d'ordre $m$. Montrer que $a$ est un pôle d'ordre $m$ de la fonction $f = \frac{g}{h}$.*

2. *"Réciproquement", soit $f$ une fonction holomorphe dans $U \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$ où les $a_j$ sont des pôles de $f$ d'ordre $m_j$. Montrer qu'il existe $g$ holomorphe dans $U$ telle que $g(a_j) \neq 0$ $\forall j$ et telle que, $\forall z \in U \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$, on ait*

$$f(z) = \frac{g(z)}{\prod_{j=1}^{k}(z - a_j)^{m_j}}.$$

## 8.2 Fonctions méromorphes

**Exercice 8.2.1** *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$. On rappelle qu'une fonction est méromorphe sur $U$ si $f$ est holomorphe sur $U \setminus S$ où les points de $S$ sont les pôles de $f$.*

1. *Soient $f$ et $g$ deux fonctions méromorphes sur $U$. Montrer que $f + g$ et $fg$ sont méromorphes sur $U$.*
2. *Soit $U$ un domaine et soit $f$ une fonction méromorphe sur $U$ avec $f \neq \tilde{0}$. Montrer que $\frac{1}{f}$ est méromorphe sur $U$.*
3. *Soit $U$ un domaine et $f$ une fonction méromorphe sur $U$ avec $f \neq \tilde{0}$. Montrer que $\frac{f'}{f}$ est une fonction méromorphe dans $U$ dont tous les pôles sont simples. Quels sont les résidus correspondants ?*