Nom :..................................**Prénom :**.................**N. de la copie :**..................

Fonctions de variables complexes (UCBL, L3)

Questionnaire du 12 avril 2011 – Durée 1 heure

Question 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\colon U \to \mathbb{C}$.

On dit que f est *holomorphe* dans U si (compléter la définition) ....

....

....

....

....

....

On dit que f est *analytique* dans U si (compléter la définition) ....

....

....

....

....

....

Vrai ou faux ? f holomorphe $\Rightarrow$ f analytique dans U ....

Vrai ou faux ? f analytique $\Rightarrow$ f holomorphe dans U ....

Question 2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < \infty$.

Exprimer les dérivées de f en zéro en fonction des coefficients de la série..............................

Établir si (répondre par *Vrai* ou *Faux en général*) :

$1/R = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ ....

$1/R = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ ....

$R = \sup\{r \geq 0\colon |a_n| r^n \text{ est une suite bornée}\}$ ....

$1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ ....

Donner un contrexemple pour chacune des réponses fausses (ne pas justifier)

....

....

....

....

T.S.V.P.

Question 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U. Écrire le système différentiel vérifié par les parties réelle et imaginaire de f (préciser soigneusement les notations)

Démontrer que si U est non vide, la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe dans U.

Question 4. Soit γ le cercle centré en 0 et de rayon 1, parcouru dans le sens direct. Soit $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Quelle est la valeur de $\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz$? Détailler votre réponse.

Question 5. Démontrer qu'il n'y a pas de détermination holomorphe du logarithme dans $\mathbb{C}^*$.

Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3ème année

Fonctions de variables complexe

Partiel du 12 avril 2011 – Durée 2 heures

EXERCICE 1

Soient f et g les deux fonctions de variable complexe $f(z) = |z|^2$ et $g(z) = z^2$. On note par σ le segment orienté de $-1+i$ à $1+i$.

1. Calculer $\int_\sigma f(z)\,dz$ et $\int_\sigma g(z)\,dz$.

2. Chercher un chemin γ de $-1+i$ à $1+i$ tel que $\int_\gamma f(z)\,dz \neq \int_\sigma f(z)\,dz$. La fonction f admet-elle de primitive dans $\mathbb{C}$?

3. Calculer $\int_\gamma g(z)\,dz$.

EXERCICE 2

Soit $\sum a_n(z-a)^n$ une série entière de rayon de convergence $0 < R < +\infty$. On note f sa somme. Soit b un point dans son disque de convergence.

1. Montrer que f admet un developpement en série entière autour de b avec rayon de convergence $R' > 0$.

2. Montrer qu'on a
$$R - |a-b| \leq R' \leq R + |a-b|.$$

3. Donner un exemple avec $a \neq b$ pour lequel on a $R' = R - |a-b|$ avec dessin des deux disques de convergence.

4. Donner un exemple avec $a \neq b$ pour lequel on a $R' = R + |a-b|$. avec dessin des deux disques de convergence.

EXERCICE 3 (Racines p-ièmes)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et p un entier, $p \geq 2$. On appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f\colon U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on ait $(f(z))^p = z$.

a) Montrer que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto \log(z)$ sur U, alors il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.

b) Soit f une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer que pour tout $z \in U$ on a $f(z) \neq 0$. En déduire que $0 \notin U$.

c) On suppose U connexe et on note f_1, f_2 deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.

d) En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U, alors il en existe exactement p distinctes. Quelles sont-elles ?

e) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ telle que$f(1) = e^{4i\pi/3}$. Calculer $f(i)$ et déterminer $f(U)$.