UNIVERSITE DE LAUSANNE
Section de Physique

FACULTE DES SCIENCES
Professeur W.O. Amrein (Unige)
Professeur J.J. Loeffel (Unil)
M. Mantoiu (Unige)

Analyse spectrale d'hamiltoniens à champ magnétique pour des systèmes bidimensionnels

Travail de diplôme

présenté à la Faculté des Sciences

de l'Université de Lausanne

par

Serge Richard

Genève, février 1999

Table des matières

1 Introduction

Ce travail est consacré à l'étude spectrale de certains opérateurs hamiltoniens. Dans le formalisme de la mécanique quantique, ceux-ci décrivent un système bidimensionnel avec un champ magnétique B et un potentiel V. Il est bien connu que pour tout champ magnétique dans $\mathbb{R}^3$ on peut définir de façon non univoque un potentiel vecteur a tel que $B = \operatorname{rot} a$. Similairement pour le cas bidimensionnel, le champ magnétique est engendré par un potentiel vecteur $a = (a_1, a_2)$ (non univoque) avec $B = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)$.

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans lequel nous travaillerons sera $L^2(\mathbb{R}^2)$. Les opérateurs considérés seront de la forme $H = H_0 + V(Q)$, avec $H_0 = (P - a(Q))^2$ l'hamiltonien magnétique libre. Ce dernier est clairement un opérateur positif. Nous nous restreindrons à lui ajouter un potentiel V borné et ainsi H sera toujours borné inférieurement.

Deux résultats importants, relatifs aux objets que nous allons manipuler, méritent d'être cités. Le premier pour un hamiltonien sans potentiel, le second sans champ magnétique.

Soit B un champ magnétique satisfaisant $|B(x)| \leq \frac{c}{1+|x|^{1+\eta}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ c, \eta > 0$ et quelques conditions de régularité. Le spectre de l'hamiltonien magnétique libre correspondant est $[0, \infty)$, formé uniquement de spectre absolument continu et de valeurs propres de multiplicité finie ne pouvant s'accumuler qu'en 0 ou ∞ [BP].

Soit l'opérateur $H = -\triangle + \gamma V$ agissant dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ avec $V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, $\int_{\mathbb{R}^2} V(x)dx \neq 0$ et $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$. Alors pour tout $\gamma > 0$, H possédera au moins une valeur propre [S].

L'idée de base du présent travail est de voir dans quelle mesure l'introduction du champ magnétique peut "éliminer" la ou les valeurs propres liées à un potentiel négatif et rendre le spectre purement absolument continu. Nous pourrons également obtenir des résultats pour des potentiels V anisotropes ne s'annulant pas à l'infini.

Pour déterminer la nature spectrale de certains opérateurs, la méthode dite *des opérateurs conjugués* est d'un grand intérêt. Il s'agit de déterminer un second opérateur autoadjoint A et d'imposer certaines conditions sur le premier commutateur $[H, iA]$ et sur le second commutateur entre H et A, à savoir $[[H, A], A]$. Ces différents objets remplissant des hypothèses bien précises, il est alors possible de montrer l'absence de spectre singulier et de valeurs propres dans certaines régions de l'axe réel.

Nous allons utiliser plus spécifiquement une variante parmi les nombreux développements existants (cf [BKM] et [BM]). Celle-ci, *la méthode des opérateurs faiblement conjugués*, peut être considérée comme une extension du théorème de Kato et Putman pour des opérateurs H et A non bornés. Elle permet de vérifier que le spectre de H se compose uniquement de spectre absolument continu. La section 2.4 est une présentation brève de cette démarche.

L'application stricte de la méthode abstraite engendre le résultat principal de ce travail, le théorème 3.1. Une seconde version, moins générale mais plus explicite, sera donnée dans le théorème 4.3.

2 Définitions, outils de travail et résultat abstrait

En guise de préambule à ce chapitre, nous voudrions souligner que la majeure partie des définitions et des résultats indiqués dans ces lignes ne sont pas formulés dans leur plus grande généralité. Par souci de simplicité, nous leurs avons donné la forme utile pour la meilleure compréhension possible de ce qui va suivre.

2.1 Opérateur autoadjoint et domaines associés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et d'une norme notée $\| \cdot \|$ et H un opérateur autoadjoint défini sur celui-ci. Le domaine de cet opérateur est nommé $D(H) \subset \mathcal{H}$, $D(H)$ étant dense dans $\mathcal{H}$. Munissons cet espace de la norme graphe suivante : $\|f\|_{\mathcal{G}^2} = \|f\| + \|Hf\| \quad \forall f \in D(H)$. Alors

$$\mathcal{G}^2 \equiv (D(H), \| \cdot \|_{\mathcal{G}^2})$$

est un espace de Hilbert. Soit $\mathcal{G}^{-2}$ le dual de $\mathcal{G}^2$, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires et continues de $\mathcal{G}^2$ dans $\mathbb{C}$, muni de la norme $\|\varphi\|_{\mathcal{G}^{-2}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{G}^2} \leq 1} |\varphi(f)|$.

Définissons encore deux nouveaux espaces en relation avec H : $\mathcal{G}^1$, le *form domain* ou domaine de la forme quadratique associée à H, l'espace de Hilbert

$$\mathcal{G}^1 = \left(D\left(|H|^{\frac{1}{2}}\right), \| \cdot \|_{\mathcal{G}^1}\right)$$

avec $\|f\|_{\mathcal{G}^1} = \|f\| + \left\| |H|^{\frac{1}{2}} f \right\|$ et $\mathcal{G}^{-1}$ son dual.

Définition 2.1 *Soit $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert. On note $\mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}_2$ s'il existe une application linéaire continue et injective de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ et que l'image de $\mathcal{H}_1$ par cette application est dense dans $\mathcal{H}_2$.*

En identifiant $\mathcal{H}_1$ et son image dans $\mathcal{H}_2$, il existe $d > 0$ tel que $\|f\|_{\mathcal{H}_2} \leq d\|f\|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall f \in \mathcal{H}_1$.

Suite à l'identification de $\mathcal{H}$ avec son dual $\mathcal{H}^*$ par l'isomorphisme de Riesz, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{G}^2 \hookrightarrow \mathcal{G}^1 \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-2}.$$

Soit $f \in \mathcal{G}^\alpha$, $\varphi \in \mathcal{G}^{-\alpha}$, $\quad \alpha = 1, 2$. La notation $\varphi(f) \equiv \langle \varphi, f \rangle$ est cohérente avec le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ puisque ces expressions se correspondent sur cet espace.

Notons $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ l'ensemble des opérateurs bornés définis sur $\mathcal{H}_1$ et à valeurs dans $\mathcal{H}_2$ ($B(\mathcal{H}_1) \equiv B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$). Sans autre précision, nous considérerons toujours la topologie forte sur $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

On montre sans difficulté que

$$H \in B(\mathcal{G}^2, \mathcal{H}) \quad \text{et} \quad H \in B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1}),$$

H correspondant dans la seconde affirmation à une extension continue de l'opérateur initial défini auparavant uniquement sur $D(H)$.

2.2 Mesures et spectres

Soit $(\mathbb{R}, A_B)$ l'ensemble des nombres réels ainsi que la σ-algèbre borélienne, μ_o la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure borélienne, à valeurs dans $[0, \infty]$, définie sur $(\mathbb{R}, A_B)$.

Soit $P_\mu = \{\lambda \in \mathbb{R} | \mu(\{\lambda\}) \neq 0\}$. Posons $\mu_{pp}(\mathcal{V}) = \mu(P_\mu \bigcap \mathcal{V}) \quad \forall\ \mathcal{V} \in A_B$.

Définition 2.2 *La mesure μ sera qualifiée selon ses propriétés :*

i) μ *est dite* continue *si* $P_\mu = \emptyset$

ii) μ *est une mesure* absolument continue *par rapport à* μ_o *si* $\forall\ \mathcal{V} \in A_B$ *tq* $\mu_o(\mathcal{V}) = 0$ *alors* $\mu(\mathcal{V}) = 0$

iii) μ *est une mesure* singulière *par rapport à* μ_o *si* $\exists\ \mathcal{V} \in A_B$ *tq* $\mu_o(\mathcal{V}) = 0$ *et* $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathcal{V}) = 0$

iv) μ *est une mesure* purement ponctuelle *si* $\mu = \mu_{pp}$.

Toute mesure est décomposable de façon unique, par rapport à μ_o, en la somme d'une mesure absolument continue, d'une mesure singulière et continue et d'une mesure purement ponctuelle.

Soit H un opérateur autoadjoint et $\{E(\mathcal{V})\}_{\mathcal{V} \in A_B}$ la mesure spectrale associée à H. Posons $\mu_f(\mathcal{V}) = \|E(\mathcal{V})f\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}$. Ainsi chaque vecteur de $\mathcal{H}$ définit une mesure finie sur $\mathbb{R}$.

Considérons $\mathcal{H}_\alpha(H) = \{f \in \mathcal{H}$ tq μ_f est une mesure du "type" α $\}$, α à remplacer par les mots "singulière et continue (sc)", "absolument continue (ac)" ou "purement ponctuelle (pp)". Chaque sous-espace $\mathcal{H}_\alpha(H)$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Posons encore $\sigma_p(H) =$ l'ensemble des valeurs propres de H (nombres réels λ associés aux solutions de $Hf = \lambda f$ pour $f \in D(H)$).

La proposition ci-dessous est alors vérifiée [A, Prop 4.18].

Proposition 2.3 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et H un opérateur autoadjoint. Alors $\mathcal{H}$ peut être décomposé de façon univoque :*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp}(H) \oplus \mathcal{H}_{sc}(H) \oplus \mathcal{H}_{ac}(H).$$

La restriction de H à un de ces sous-espaces définit un opérateur autoadjoint dans ce sous-espace, d'où

$$H = H_{pp} \oplus H_{sc} \oplus H_{ac}.$$

De plus $\sigma(H) = \sigma(H_{pp}) \cup \sigma(H_{sc}) \cup \sigma(H_{ac})$ et $\sigma(H_{pp}) = \overline{\sigma_p(H)}$, avec $\sigma(A)$ le spectre de l'opérateur A et $\overline{M}$ la fermeture de M.

L'ensemble des valeurs de $\sigma(H_{sc})$ sera nommé *le spectre singulier continu* de H alors que les valeurs de $\sigma(H_{ac})$ appartiendront *au spectre absolument continu* de H.

2.3 Principe d'absorption limite et opérateurs H-lisses

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, H un opérateur autoadjoint et $\mathbb{C}_\pm = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \pm Im(z) > 0\}$. Posons $R(\lambda \pm i\nu) = (H - \lambda \mp i\nu)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}, \nu > 0$. Il est bien connu que $\|R(\lambda \pm i\nu)\|_{B(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{\nu}$ et que l'application

$$\mathbb{C}_\pm \ni z \to R(z) \in B(\mathcal{H})$$

est holomorphe séparément en $\mathbb{C}_+$ et $\mathbb{C}_-$.

Une meilleure estimation de la résolvante de H est possible en considérant que $R(z) \in B(\mathcal{G}^{-1}, \mathcal{G}^1)$, pour $z \notin \sigma(H)$, avec norme plus petite que $1 + |z+i|\Big(\text{dist}(z, \sigma(H))\Big)^{-1}$.

Montrer un *principe d'absorption limite global* consiste à définir un nouvel espace de Hilbert $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}$ et son dual $\mathcal{A}^*$ tels que $\|R(\lambda \pm i\nu)\|_{B(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)} \leq c$, la constante c étant indépendante de $\lambda \in \mathbb{R}$ et de $\nu > 0$. Notons que les espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ ne sont pas forcément comparables.

La majoration sur la norme de $R(\lambda \pm i\nu)$ entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$, indépendamment de $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\nu > 0$, permet de montrer que le spectre de celui-ci est purement absolument continu [ABG, Prop 7.1.3].

Il nous faut encore introduire une définition permettant d'exprimer un résultat [RS, XIII.26] auquel nous aurons recours.

Définition 2.4 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, H un opérateur autoadjoint et C un opérateur fermé. C est dit* H-lisse *s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*

$$\sup_{f \in D(C^*), \|f\| \leq 1} |\langle C^* f, R(z) C^* f \rangle| \leq c.$$

Proposition 2.5 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, H un opérateur autoadjoint, U un opérateur autoadjoint tel que $|U|^{\frac{1}{2}}$ soit H-lisse. Supposons de plus que H soit borné inférieurement ou que U soit H-borné. Il existe alors $\Gamma > 0$ tel que l'opérateur*

$$H_\gamma = H + \gamma U$$

soit unitairement équivalent à H pour tout $\gamma \in (-\Gamma, \Gamma)$.

Il en découlera notamment que le spectre de H_γ sera de même nature que celui de H.

2.4 Résultat abstrait

Nous allons présenter le résultat abstrait sur lequel repose ce travail. Pour ce faire, nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires.

Définition 2.6 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et une application*

$$\mathbb{R} \ni t \to W_t \in B(\mathcal{H}).$$

$\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est dit un* C_0-groupe *si cette application est fortement continue et possède les propriétés suivantes :* $W_{t_1+t_2} = W_{t_1}W_{t_2}$ *et* $W_0 = 1$.

Une généralisation du théorème de Stone pour de tels groupes [ABG*I*, 1.1.12] :

Lemme 2.7 *Soit $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un C_0-groupe dans $\mathcal{H}$. Son générateur infinitésimal est défini par l'opérateur A :*

$$D(A) = \left\{ f \in \mathcal{H} \ tq \ s\text{-}\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(W_t f - f) \ existe \right\}$$

$$Af = \ s\text{-}\lim_{t\to 0} \frac{-i}{t}(W_t f - f) \quad \forall f \in D(A).$$

Alors A est un opérateur fermé à domaine dense dans $\mathcal{H}$ et A^* est le générateur d'un C_0-groupe dans $\mathcal{H}^*$ (l'espace dual de $\mathcal{H}$).

Considérons H un opérateur autoadjoint dans $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}^1$ le "form domain" de H et $\mathcal{G}^{-1}$ son dual. Soit $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un C_0-groupe d'opérateurs unitaires dans $\mathcal{H}$ (de générateur autoadjoint A).

Supposons que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$W_t\mathcal{G}^1 \subset \mathcal{G}^1$$

(i.e. le domaine $\mathcal{G}^1$ est laissé invariant par le C_0-groupe).

En utilisant un résultat cité dans [ABG, Prop 6.3.1] nous obtenons deux nouveaux C_0-groupes : $\{W_t|_{\mathcal{G}^1}\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un C_0-groupe dans $\mathcal{G}^1$ et $\{(W_{-t}|_{\mathcal{G}^1})^*\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un C_0-groupe dans $\mathcal{G}^{-1}$. Sans risque de confusion, nous omettrons les notations $\cdot \ |_{\mathcal{G}^1}$ et $(\cdot \ |_{\mathcal{G}^1})^*$. Posons

$$\mathcal{W}_t H = W_{-t} H W_t \left(\equiv e^{-iAt} H e^{iAt} \text{ au moins formellement } \right).$$

Soit $D(A, \mathcal{G}^1)$ le domaine du générateur du C_0-groupe dans $\mathcal{G}^1$.

Définition 2.8 *On notera $H \in C^1(A; \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ si une des deux affirmations équivalentes suivantes est vérifiée :*

i) l'application $\mathbb{R} \ni t \to \mathcal{W}_t H \in B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ est fortement C^1

ii) la forme sesquilinéaire

$$D(A, \mathcal{G}^1) \times D(A, \mathcal{G}^1) \ni (f, g) \to i\langle Hf, Ag\rangle - i\langle Af, Hg\rangle \in \mathbb{C}$$

est continue en considérant $D(A, \mathcal{G}^1)$ muni de la topologie issue de $\mathcal{G}^1$.

Posons $T \equiv \frac{d}{dt}(\mathcal{W}_t H)|_{t=0}$, dérivation au sens fort. Formellement $T = i[H, A]$. La condition $H \in C^1(A; \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ étant vérifiée, on peut alors considérer $T \in B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ (extension continue de l'opérateur initial de la définition 2.8).

Définition 2.9 *L'opérateur A sera dit* faiblement conjugué *à H si $H \in C^1(A; \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ et si $T > 0$ (i.e. $\langle f, Tf\rangle > 0 \quad \forall f \in \mathcal{G}^1 \setminus \{0\}$).*

Soit $\mathcal{T}$ le complété de $\mathcal{G}^1$ avec la norme $\|f\|_{\mathcal{T}} = \langle f, Tf\rangle^{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{T}^*$ son dual. Celui-ci est isomorphe au complété de $T\mathcal{G}^1$ avec la norme $\|f\|_{\mathcal{T}^*} = \langle f, T^{-1}f\rangle^{\frac{1}{2}}$. L'application

$$\mathcal{T}^* \times \mathcal{T} \ni (\varphi, f) \to \varphi(f) \in \mathbb{C}$$

coïncide avec le produit scalaire de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{G}^1 \times T\mathcal{G}^1|_{\mathcal{H}}$ et sera donc également notée $\langle \varphi, f\rangle$.

Supposons que $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est aussi un C_0-groupe dans $\mathcal{T}$ et son adjoint un C_0-groupe dans $\mathcal{T}^*$. Soit $\mathcal{A} = D(A^*, \mathcal{T}^*)$ le domaine de l'opérateur A^* engendrant le C_0-groupe dans $\mathcal{T}^*$. Muni de la norme graphe, $\mathcal{A}$ est un espace de Hilbert.

Finalement nous dirons que l'opérateur autoadjoint H possède un *gap spectral* s'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que z n'appartient pas au spectre de H. Les hamiltoniens que nous considérons étant tous bornés inférieurement, ils possèdent cette caractéristique.

Nous pouvons dorénavant cerner l'énoncé suivant [BM, Thm 2.2] :

Théorème 2.10 *Soit H un opérateur autoadjoint ayant un gap spectral. Supposons qu'il existe A, opérateur faiblement conjugué à H, tel que $T = i[H, A] \in C^1(A; \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$. Alors :*

a) $\|(H - \lambda \mp i\nu)^{-1}\|_{B(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)} \leq c \quad c$ indépendant de $\lambda \in \mathbb{R}, \nu > 0$

b) $\forall\ C \in B(\mathcal{A}^*, \mathcal{H})$, C est H-lisse

c) H a un spectre purement absolument continu.

Remarquons que b) et c) sont des conséquences directes de a).

3 Application du résultat abstrait

3.1 Formulation du problème et sa solution

Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour $j = 1, 2$ notons Q_j l'opérateur de multiplication par la variable x_j et P_j l'extension autoadjointe de l'opérateur différentiel $-i\frac{\partial}{\partial x_j}$ défini sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. $\varphi(Q)$, noté également φ, sera l'opérateur de multiplication par la fonction φ.

Soit les fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ et $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \bigcap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ nommées respectivement *potentiel vecteur* et *potentiel.*

Pour $j = 1, 2$, soit Π_j la fermeture de l'opérateur symétrique $P_j - a_j(Q)$ agissant sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\equiv \mathcal{D}$. Les opérateurs Π_j sont dits *d'impulsion magnétique.*

L'hamiltonien de notre système est

$$H = H_0 + V(Q)$$

avec $H_0 = \Pi_1^*\Pi_1 + \Pi_2^*\Pi_2$, l'*hamiltonien magnétique libre.*

Sous les hypothèses ci-dessus, H est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}$ [LS, Thm 4] et donc $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{G}^2$, le domaine de H. De plus, le "form domain" de H est connu [LS] :

$$\mathcal{G}^1 = \{f \in \mathcal{H} \text{ tq } \Pi_j f \in \mathcal{H}, \quad j = 1, 2\}.$$

La très forte régularité imposée à a et à V n'est nullement obligatoire. Elle facilite cependant de façon importante la justification des calculs. Vu l'inclusion $g(Q) \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D} \quad \forall g \in C^\infty$, les opérateurs Π_j, H_0, H puis d'autres laisseront $\mathcal{D}$ invariant.

Soit $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; nous utiliserons la notation

$$\tilde{h}(x) = \sum_{j=1}^{2} x_j(\nabla_j h)(x) = r(\partial_r h)(r, \theta)$$

avec $\tilde{h} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; r, θ étant les variables en coordonnées polaires. Par analogie $\tilde{\tilde{h}}(r, \theta) = r(\partial_r \tilde{h})(r, \theta)$.

Posons $B_{ij} = \nabla_i a_j - \nabla_j a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad i, j = 1, 2$. Le système étant bidimensionnel, ce tenseur se réduit à un seul élément relevant. Soit $B \equiv B_{12} = -B_{21}$. B sera appelé *le champ magnétique.*

Considérons a et a' deux potentiels vecteurs tels que $a' = a + \nabla\varphi, \ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Les champs magnétiques qu'ils engendrent sont identiques ; on parle alors *d'invariance de jauge.* Or l'expérience montre que seul le champ magnétique est significatif. Nous devrons donc nous efforcer à imposer des conditions uniquement sur ce dernier et pas sur un potentiel vecteur non univoquement défini. Notons encoore que les hamiltoniens libres H_0 et H_0', engendrés respectivement par a et a', sont unitairement équivalents ($e^{i\varphi(Q)}H_0e^{-i\varphi(Q)} = H_0'$).

Ayant justifié l'existence de l'opérateur autoadjoint H ainsi qu'introduit les notations nécessaires, nous pouvons énoncer notre résultat principal. Les hypothèses ainsi que les conclusions deviendront plus explicites par la suite.

Théorème 3.1 *Soit $\mathcal{H}$, a et V, conséquemment H et B, les objets introduits ci-dessus, satisfaisant les conditions :*

i) $|B(x)| \leq \frac{c}{1+|x|^{1+\eta}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \eta, c > 0$

ii) $\widetilde{V} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$

iii) $\exists\ \gamma, \varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ *satisfaisant* $\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) > \varepsilon > 0$ *et* $\delta > 0$ *tels que l'une des inégalités ci-dessous soit vérifiée :*

$$F_{\pm}^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \equiv \left(2 - \frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right)[\pm B(x)] - \widetilde{V}(x) - (\gamma + \delta)|x|^2 B^2(x) \geq 0$$

(notons $F^{\gamma,\varepsilon,\delta}$ l'application $F_{+}^{\gamma,\varepsilon,\delta}$ ou $F_{-}^{\gamma,\varepsilon,\delta}$ ainsi choisie)

iv) $\exists\ \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ *avec* $\kappa_2 \geq 0$ *tq* $|x|^2 \widetilde{B}^2(x) \leq \kappa_1 B(x) + \kappa_2 F^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

v) $\exists\ \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{R}$ *avec* $\kappa_4 \geq 0$ *tq* $\left|\widetilde{\widetilde{V}}(x)\right| \leq \kappa_3 B(x) + \kappa_4 F^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$

Alors

a) $\|(H - \lambda \mp i\nu)^{-1}\|_{B(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)} \leq c$ *c indépendant de $\lambda \in \mathbb{R}, \nu > 0$ (avec $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}$ et $\mathcal{G}^1 \hookrightarrow \mathcal{A}^*$, espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ que nous construirons explicitement)*

b) $\forall\ C \in B(\mathcal{A}^*, \mathcal{H})$, *$C$ est H-lisse*

c) *H a un spectre purement absolument continu.*

Dans les pages à venir, nous allons effectuer la démarche ayant conduit à ce résultat. Auparavant, nous présentons un bref calcul que nous utiliserons à maintes reprises ainsi qu'un résultat important pour les hamiltoniens magnétiques libres.

Lemme 3.2 (des produits croisés) *Soit $b \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $f \in \mathcal{D}$. La majoration suivante est justifiée :*

$$|\langle f, b(Q)\cdot\Pi f\rangle + \langle f, \Pi\cdot b(Q) f\rangle| \leq \gamma\langle f, |b(Q)|^2 f\rangle + \frac{1}{\gamma}\langle f, H_0 f\rangle \quad \forall \gamma > 0.$$

Preuve :
On a

$$|\{\langle f, b(Q)\cdot\Pi f\rangle + \langle f, \Pi\cdot b(Q) f\rangle\}| \leq 2\left|\sum_{j=1}^{2}\langle b_j(Q) f, \Pi_j f\rangle\right|.$$

En posant $F = (f_1, f_2)$ et $G = (g_1, g_2)$, $F, G \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}$, on introduit un produit scalaire naturel dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ donné par $(F, G) = \langle f_1, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle$. Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ puis l'inégalité : $2xy \leq \gamma x^2 + \frac{1}{\gamma} y^2$ avec $\gamma > 0$, x, y des scalaires, on obtient le résultat escompté.

■

Propriété de l'hamiltonien magnétique
Soit H_0 l'hamiltonien libre introduit ci-dessus. Les relation suivantes sont satisfaites sur $\mathcal{D}$:

$$H_0 \geq \pm B(Q).$$

En effet :
posons $Z = (\Pi_1 + i\Pi_2)$ et calculons Z^*Z puis ZZ^*. On trouve : $Z^*Z = H_0 - B(Q) \geq 0$ et $ZZ^* = H_0 + B(Q) \geq 0$.

Notons bien la particularité de ce résultat, à savoir la présence du "±" devant le terme correspondant au champ magnétique. Par la suite, la présence du "±" devant le terme B sera, sans autres précisions, la marque de deux affirmations distinctes écrites sous forme condensée.

3.2 L'opérateur faiblement conjugué

3.2.1 Positivité du premier commutateur

Soit l'opérateur $A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} (\Pi_j Q_j + Q_j \Pi_j)$ défini sur $\mathcal{D}$. A est symétrique sur ce domaine et le laisse invariant. Nous montrerons ultérieurement que A se prolonge à un opérateur autoadjoint (nous noterons souvent par le même symbole un opérateur ainsi que ses extensions continues). Nous allons calculer formellement un certain nombre de commutateurs. Toutes les opérations que nous effectuerons se justifient sur $\mathcal{D}$ car ce domaine est invariant sous l'action des opérateurs considérés.

Les égalités ci-dessous sont vérifiées sur $\mathcal{D}$:

$$i[\Pi_j, h(Q)] = (\nabla_j h)(Q) \quad \forall h \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad i[\Pi_j, \Pi_k] = B_{kj}(Q). \tag{1}$$

Nous obtenons alors facilement

$$i[H, A] = 2H_0 - \widetilde{V} + \Pi_2 Q_1 B - \Pi_1 Q_2 B + Q_1 B \Pi_2 - Q_2 B \Pi_1.$$

Posons $T \equiv i[H, A]$ et $H_c \equiv \Pi_2 Q_1 B - \Pi_1 Q_2 B + Q_1 B \Pi_2 - Q_2 B \Pi_1$. En remarquant que H_c est symétrique sur $\mathcal{D}$ et en utilisant le lemme des produits croisés, avec $b(x) = (-x_2 B(x), x_1 B(x))$, nous pouvons obtenir une majoration pour ce terme, à savoir

$$-\gamma R^2 B^2 - \frac{1}{\gamma} H_0 \;\leq\; H_c \;\leq\; \gamma R^2 B^2 + \frac{1}{\gamma} H_0 \quad \forall \gamma > 0 \tag{2}$$

avec $R = R(Q)$, opérateur de multiplication par $|x|$.

Nous voulons imposer la positivité de l'opérateur T. Considérons les inégalités

$$T \geq (2 - \frac{1}{\gamma}) H_0 - \widetilde{V} - \gamma R^2 B^2 \geq \varepsilon H_0 + \left(2 - \frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right) [\pm B] - \widetilde{V} - (\gamma + \delta) R^2 B^2 + \delta R^2 B^2 \tag{3}$$

avec $\gamma > \frac{1}{2}$, $\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) > \varepsilon > 0$ et $\delta > 0$.

Soit $F_{\pm}^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) = \left(2 - \frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right)[\pm B(x)] - \widetilde{V}(x) - (\gamma+\delta)R^2(x)B^2(x)$. Faisons l'hypothèse que l'une de ces deux applications $\mathbb{R}^2 \ni x \to F_{\pm}^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \in \mathbb{R}$ soit positive, à l'exception possible d'un domaine de mesure nulle. Donc pour $s =$"$+$" ou $s =$"$-$"

$$\exists\ \gamma, \varepsilon, \delta \in \mathbb{R} \text{ avec } \gamma > \frac{1}{2},\ \left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) > \varepsilon > 0 \text{ et } \delta > 0 \text{ tq } F_s^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \geq 0 \quad x \text{ p.p.} \tag{4}$$

L'application $F_s^{\gamma,\varepsilon,\delta}$ vérifiant cette condition sera nommée par la suite $F^{\gamma,\varepsilon,\delta}$.

De (3) nous obtenons sur $\mathcal{D}$ les inégalités suivantes :

$$T \geq F^{\gamma,\varepsilon,\delta}(Q) \geq 0 \tag{5}$$

$$T \geq \varepsilon H_0 \geq [\pm \varepsilon B] \text{ et } T \geq \varepsilon H_0 > 0 \tag{6}$$

$$T \geq \delta R^2 B^2. \tag{7}$$

3.2.2 Concernant la condition $F^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \geq 0$

Nous avons dû imposer la positivité d'une certaine fonction afin d'assurer celle de T. Comme nous allons le voir maintenant, il en résulte une borne supérieure pour le comportement asymptotique des champs magnétiques que nous pourrons examiner, indépendamment du choix de $F_+^{\gamma,\varepsilon,\delta}$ ou de $F_-^{\gamma,\varepsilon,\delta}$ pour la condition (4). Observons qu'on a l'implication suivante (en coordonnées polaires) :

$$F_{\pm}^{\gamma,\varepsilon,\delta}(s,\theta) \geq 0 \Leftrightarrow s(\partial_s V)(s,\theta) \leq \left(2 - \frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right)[\pm B(s,\theta)] - (\gamma+\delta)s^2 B^2(s,\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(r,\theta) \leq V(r_o,\theta) + \int_{r_o}^{r} \left\{ \left(2 - \frac{1}{\gamma} - \varepsilon\right)\frac{1}{s}[\pm B(s,\theta)] - (\gamma+\delta)sB^2(s,\theta) \right\} ds \quad r_o > 0. \tag{8}$$

Supposons qu'il existe θ_o tel que $|B(r,\theta_o)| \geq \frac{c}{1+r} \quad \forall r \geq r_o,\ c > 0$. Alors le dernier terme du membre de droite de l'inégalité (8) implique que $V(r,\theta_o) \to -\infty$ quand $r \to \infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse initiale $V \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. En conséquence, pour la concordance de nos hypothèses, nous ne pourrons travailler qu'avec des champs magnétiques tels que

$$|B(x)| \leq \frac{c}{1+|x|^{1+\eta}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } c, \eta > 0. \tag{9}$$

3.2.3 Groupe des dilatations magnétiques

En se référant aux résultats de [BP] nous pouvons définir un nouvel objet ainsi qu'énoncer la proposition qui s'y rapporte [BP, Prop 3.1]. Soit $f \in \mathcal{D}$ et $t \in \mathbb{R}$. Posons

$$W_t f(x) = exp\Big(-i\Phi_t(x)\Big)(\Omega_t f)(x) \tag{10}$$

avec $\Phi_t(x) = \int_1^{e^t} \Big(\sum_{k=1}^2 x_k a_k(sx)\Big)\, ds$ et $\Omega_t f(x) = e^t f(e^t x)$. Ω_t étant nommés communément *opérateurs des dilatations*. Clairement $W_t\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$.

Proposition 3.3 *L'application*

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow W_t \in B(\mathcal{H})$$

définit un groupe d'opérateurs unitaires fortement continu avec générateur autoadjoint A satisfaisant

1) $\mathcal{D} \subset D(A)$

2) $Af = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^2 (\Pi_j Q_j + Q_j \Pi_j) f \quad \forall f \in \mathcal{D}$.

3.2.4 Invariance de $\mathcal{G}^1$ sous l'action de ce groupe

Rappelons que $\mathcal{G}^1 = \{f \in \mathcal{H} \text{ tq } \Pi_j f \in \mathcal{H}, \quad j = 1,2\}$. Pour affirmer l'invariance de ce domaine sous l'action du *groupe des dilatations magnétiques* nous devons montrer que $f \in \mathcal{H}$ et $\Pi_j f \in \mathcal{H}$ entraînent $W_{-t}\Pi_j W_t f \in \mathcal{H}$.

Lemme 3.4 *Soit W_t défini en (10). L'égalité*

$$W_{-t}\Pi_j W_t = e^t \Pi_j - \Gamma_j^t(e^{-t}Q) \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{11}$$

est vérifiée sur $\mathcal{D}$ avec $\Gamma_j^t(x) = (-1)^k \int_1^{e^t} s x_k B(sx) ds \quad k = j+1$ mod 2.
De plus $\mathcal{G}^1$ est invariant sous l'action du groupe des dilatations magnétiques.

Preuve :
Soit $f \in \mathcal{D}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$W_t f(x) = exp\Big(-i\Phi_t(x)\Big) e^t f(e^t x)$$

$$\Pi_j W_t f(x) = -exp\Big(-i\Phi_t(x)\Big) e^t \Big\{\Big(\left(\nabla_j \Phi_t\right)(x) + a_j(x)\Big) f(e^t x) + i e^t (\nabla_j f)(e^t x)\Big\}$$

$$W_{-t}\Pi_j W_t f(x) = -\Big\{\Big(\left(\nabla_j \Phi_t\right)(e^{-t}x) + a_j(e^{-t}x)\Big) f(x) + i e^t (\nabla_j f)(x)\Big\}$$

Calculons le terme

$$(\nabla_j \Phi_t)(x) = \int_1^{e^t} \nabla_j \left(\sum_{k=1}^2 x_k a_k(sx)\right) ds = \int_1^{e^t} ds \left\{a_j(x) + \sum_{k=1}^2 s x_k \left(\nabla_j a_k\right)(sx)\right\}$$

$$= \int_1^{e^t} ds \left\{a_j(x) + \sum_{k=1}^2 \Big(s x_k \left(\nabla_j a_k\right)(sx) + s x_k \left(\nabla_k a_j\right)(sx) - s x_k \left(\nabla_k a_j\right)(sx)\Big)\right\}$$

$$= \int_1^{e^t} ds \left\{\sum_{k=1}^2 s x_k B_{jk}(sx) + \frac{d}{ds}(s a_j(sx))\right\} = e^t a_j(e^t x) - a_j(x) + (-1)^k \int_1^{e^t} s x_k B(sx) ds.$$

Ainsi $(\nabla_j \Phi_t)(x) = e^t a_j(e^t x) - a_j(x) + \Gamma_j^t(x)$ et

$$W_{-t}\Pi_j W_t f(x) = -\left(e^t a_j(x) + \Gamma_j^t(e^{-t}x)\right) f(x) - ie^t(\nabla_j f)(x) = \left(e^t\Pi_j - \Gamma_j^t(e^{-t}Q)\right) f(x)$$

d'où la première affirmation, toujours sur $\mathcal{D}$.

Quant à la seconde, il suffit de se souvenir de (9). En effet, $\exists\, c > 0$ tq $|x||B(x)| < c \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, d'où la majoration $\left|\Gamma_j^t(x)\right| \le c \left|\int_1^{e^t} ds\right| \le ce^{|t|}$. Ainsi $\Gamma_j^t(e^{-t}Q) \in B(\mathcal{H})$ pour chaque t.

Par hypothèse $\Pi_j f \in \mathcal{H} \quad \forall f \in \mathcal{G}^1$. Donc $\left(e^t\Pi_j f - \Gamma_j^t(e^{-t}Q)f\right) \in \mathcal{H} \quad \forall f \in \mathcal{G}^1$. De la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{G}^1$ ($\mathcal{D}$ dense dans $\mathcal{G}^2$ et $\mathcal{G}^2 \hookrightarrow \mathcal{G}^1$) on en conclut que $W_{-t}\Pi_j W_t f = \left(e^t\Pi_j f - \Gamma_j^t(e^{-t}Q)f\right) \in \mathcal{H} \quad \forall f \in \mathcal{G}^1$, d'où l'invariance de $\mathcal{G}^1$ sous l'action de ce groupe.

■

$\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un C$_0$-groupe d'opérateurs unitaires dans $\mathcal{H}$. De plus, nous venons de voir que $\mathcal{G}^1$ est invariant sous l'action de ce groupe. En se souvenant des résultats cités précédemment, nous obtenons que $\{W_t|_{\mathcal{G}^1}\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un C$_0$-groupe dans $\mathcal{G}^1$, $\{(W_{-t}|_{\mathcal{G}^1})^*\}_{t\in\mathbb{R}}$ un C$_0$-groupe dans $\mathcal{G}^{-1}$.

3.2.5 Pour que $H \in C^1(A; \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$

Nous utilisons la seconde affirmation de la définition 2.8 pour montrer que $H \in C^1(A; \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$. Plutôt que de définir la forme sesquilinéaire continue, nous allons directement travailler avec l'opérateur borné qui lui correspond, utilisant l'isomorphisme entre $S(\mathcal{G}^1)$ et $B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ (corollaire du lemme de Riesz), $S(\mathcal{G}^1)$ étant l'ensemble des formes sesquilinéaires continues sur $\mathcal{G}^1 \times \mathcal{G}^1$.

Nous savons que l'opérateur $T = i[H, A] = 2H_0 - \widetilde{V} + H_c$ défini sur $\mathcal{D}$ est justement celui que nous devons maîtriser. Pour que T se prolonge à un opérateur appartenant à $B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ considérons individuellement chaque terme le composant.

Du fait que V est borné, on obtient sans difficulté que $H_0 \in B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$. (2) implique que $|\langle f, H_c f\rangle| \le \langle f, H_0 f\rangle + \langle f, R^2B^2 f\rangle \le c\|f\|_{\mathcal{G}^1}^2 \quad \forall f \in \mathcal{D}$ et pour une certaine constante $c > 0$ (nous avons également utilisé (9)). H_c engendrant une forme sesquilinéaire continue sur un ensemble dense dans $\mathcal{G}^1$, on en conclut qu'elle se prolonge à un élément de $S(\mathcal{G}^1)$ et donc $H_c \in B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$. Quant au terme $\widetilde{V}$, il suffit d'imposer que

$$\widetilde{V} \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \tag{12}$$

pour que $\widetilde{V}(Q) \in B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$. Finalement vu l'inclusion dense de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{G}^1$, nous obtenons que $T \in B(\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$ (extension continue de l'opérateur $i[H, A]$ défini auparavant sur $\mathcal{D}$) et ainsi achevons la vérification $H \in C^1(A; \mathcal{G}^1, \mathcal{G}^{-1})$.

Ceci fait il est temps de nous intéresser à la deuxième condition du théorème 2.10 et aux nouveaux espaces de Hilbert dont nous aurons besoin.

3.3 Sur le deuxième commutateur

3.3.1 Construction des espaces $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$

Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{T}$ = complété de $\mathcal{G}^1$ avec la norme $\|f\|_{\mathcal{T}} = \langle f, Tf\rangle^{\frac{1}{2}}$.

A partir de $\mathcal{T}$ nous pouvons construire son dual que nous nommerons $\mathcal{T}^*$. $\mathcal{T}^*$ est isomorphe au complété de $T\mathcal{G}^1$ avec la norme $\|f\|_{\mathcal{T}^*} = \langle f, T^{-1}f\rangle^{\frac{1}{2}}$. Les inclusions suivantes sont vérifiées (la première par construction, la deuxième par dualité) :

$$\mathcal{G}^1 \hookrightarrow \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^* \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}.$$

Remarquons encore que T est un opérateur unitaire entre les espaces $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^*$.

Avant de parler de C_0-groupe dans ces espaces, nous introduisons sur $\mathcal{D}$ le deuxième commutateur dont nous aurons besoin.

3.3.2 Définition de l'opérateur $i[T, A]$

A partir des relations de commutation introduites pour le calcul du premier commutateur (1), nous pouvons calculer sur $\mathcal{D}$ le terme $i[T, A] \equiv S$:

$$S = 4H_0 + \tilde{\tilde{V}} + 2R^2B^2 + \{b_p(Q)\cdot\Pi + \Pi\cdot b_p(Q)\} + 2\{b_q(Q)\cdot\Pi + \Pi\cdot b_q(Q)\}$$

où nous avons posé

$$b_p(Q) = \left(Q_2\widetilde{B}, -Q_1\widetilde{B}\right) \text{ et } b_q(Q) = \left(-Q_2B, Q_1B\right).$$

En remarquant que le terme S est symétrique sur $\mathcal{D}$ et en utilisant le lemme des produits croisés, nous obtenons les majorations

$$\left(4 - \frac{1}{\beta} - \frac{2}{\alpha}\right) H_0 + 2\left(1-\alpha\right) R^2B^2 - \beta R^2\widetilde{B}^2 + \tilde{\tilde{V}} \leq S$$

$$S \leq \left(4 + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\alpha}\right) H_0 + 2\left(1+\alpha\right) R^2B^2 + \beta R^2\widetilde{B}^2 + \tilde{\tilde{V}}$$

avec $\beta, \alpha > 0$.

Supposons qu'il existe $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3$ et $\kappa_4 \in \mathbb{R}$ avec $\kappa_2, \kappa_4 \geq 0$ tels que

$$R^2(x)\widetilde{B}^2(x) \leq \kappa_1 B(x) + \kappa_2 F^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \tag{13}$$

et

$$\left|\tilde{\tilde{V}}(x)\right| \leq \kappa_3 B(x) + \kappa_4 F^{\gamma,\varepsilon,\delta}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \tag{14}$$

En utilisant ces conditions et les inégalités (5), (6) et (7) on peut assurer l'existence de $c > 0$ tel que sur $\mathcal{D}$

$$-cT \ \leq \ S \ \leq \ cT \tag{15}$$

c dépendant notamment de $\gamma,\ \varepsilon,\ \delta,\ \kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3,\ \kappa_4$.

3.3.3 C_0-groupes dans $\mathcal{T}$ et dans $\mathcal{T}^*$; $T \in C^1(A;\mathcal{T},\mathcal{T}^*)$

Nous devons montrer maintenant que les opérateurs W_t peuvent être prolongés continûment de $\mathcal{G}^1$ à $\mathcal{T}$, qu'ils laissent $\mathcal{T}$ invariant et que $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ forme un C_0-groupe dans $\mathcal{T}$.

Lemme 3.5 *Pour tout $t \in \mathbb{R}, W_t \in B(\mathcal{T})$. Plus précisément*

$$\exists\, c > 0 \ \ tq \ \|W_t f\|_{\mathcal{T}} \leq e^{c|t|}\|f\|_{\mathcal{T}} \quad \forall f \in \mathcal{T}.$$

Preuve :
Soit $f \in \mathcal{D},\ \xi$ et $t \in \mathbb{R}$. Considérons $\langle W_\xi f, TW_\xi f\rangle$, expression bien posée vu l'invariance de $\mathcal{D}$ pour les opérateurs W_ξ et T. Calculons sa dérivée :

$$\frac{d}{d\xi}\langle W_\xi f, TW_\xi f\rangle = \langle W_\xi f, i[T,A]W_\xi f\rangle. \tag{16}$$

En utilisant cette égalité, ainsi que (15), on obtient

$$\|W_\xi f\|^2_{\mathcal{T}} = \langle f, Tf\rangle + \int_0^\xi \langle W_s f, i[T,A]W_s f\rangle ds \leq \langle f, Tf\rangle + c\left|\int_0^\xi \langle W_s f, TW_s f\rangle ds\right|$$

et donc $\|W_\xi f\|^2_{\mathcal{T}} \leq \|f\|^2_{\mathcal{T}} + c\left|\int_0^\xi \|W_s f\|^2_{\mathcal{T}} ds\right|$.

Référons-nous au lemme de Gronwall [ABG] sous sa forme la plus élémentaire : soit $(0,t) \subset \mathbb{R},\ u_o, c \in \mathbb{R}_+$ et u une fonction positive et bornée sur $(0,t)$ vérifiant $u(\xi) \leq u_o + c\left|\int_0^\xi u(s)ds\right|$ $\forall\xi \in (0,t)$. Alors $u(\xi) \leq u_0 e^{c|\xi|} \quad \forall\xi \in (0,t)$.

Pour l'utilisation de ce résultat, nous devons assurer que l'application $(0,t) \ni s \to \|W_s f\|_{\mathcal{T}}$ est bornée. Les inclusions $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}^1 \hookrightarrow \mathcal{T}$ impliquent l'existence d'une constante positive d, telle que pour tout s, $\|W_s f\|_{\mathcal{T}} \leq d\|W_s f\|_{\mathcal{G}^1}$. $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ formant un C_0-groupe dans $\mathcal{G}^1$, l'affirmation suivante est vérifiée [ABG, Prop. 3.2.2] :

$$\exists\, M,\ \omega > 0 \text{ tq } \|W_t f\|_{\mathcal{G}^1} \leq Me^{\omega|t|}\|f\|_{\mathcal{G}^1} \quad \forall f \in \mathcal{G}^1, t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\|W_s f\|_{\mathcal{T}} \leq dMe^{\omega|s|}\|f\|_{\mathcal{G}^1}$. Les hypothèses du lemme de Gronwall étant vérifiées, nous pouvons obtenir $\|W_\xi f\|^2_{\mathcal{T}} \leq e^{c|\xi|}\|f\|^2_{\mathcal{T}} \quad \forall f \in \mathcal{D},\ \forall\xi \in (0,t)$. Par densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{T}$ ($\mathcal{D}$ dense dans $\mathcal{G}^2$ et $\mathcal{G}^2 \hookrightarrow \mathcal{G}^1 \hookrightarrow \mathcal{T}$) nous justifions l'affirmation initiale et conséquemment l'invariance de $\mathcal{T}$ sous l'action de l'ensemble des opérateurs W_t.

■

Montrons maintenant que nous obtenons un C_0-groupe dans $\mathcal{T}$.

Lemme 3.6 *Soit $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ l'ensemble des opérateurs définis dans le lemme précédent. Ceux-ci forment un C_0-groupe dans $\mathcal{T}$.*

Preuve :
Nous devons vérifier que l'application

$$\mathbb{R} \ni t \to W_t \in B(\mathcal{T})$$

est fortement continue et satisfait $W_{t_1+t_2} = W_{t_1}W_{t_2}$ et $W_0 = 1$. Nous nous appuierons sur le fait que $\{W_t|_{\mathcal{G}^1}\}_{t\in\mathbf{R}}$ forme un C_0-groupe dans $\mathcal{G}^1$.

Soit $f \in \mathcal{T}$ et $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{D}$, une suite de Cauchy telle que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{T}} = 0$. On pose $W_t f = \lim_{n\to\infty} W_t f_n$.

Les deux propriétés $W_{t_1+t_2} = W_{t_1}W_{t_2}$ et $W_0 = 1$ sont alors vérifiées sans difficulté sur $\mathcal{T}$.

Il nous faut encore montrer la continuité forte en 0. Vu l'inclusion $\mathcal{G}^1 \hookrightarrow \mathcal{T}$, il existe $d > 0$ tel que

$$\|f\|_{\mathcal{T}} \leq d\|f\|_{\mathcal{G}^1} \quad \forall f \in \mathcal{G}^1.$$

Posons $M = \sup_{t\in[-1,1]} \|W_t\|_{B(\mathcal{T})}$. M est borné (conséquence du lemme précédent).

Soit $\varepsilon > 0$, f_n tq $\|f_n - f\|_{\mathcal{T}} \leq \frac{\varepsilon}{2}(M+1)^{-1}$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2d}$. Vu que $\{W_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ forme un C_0-groupe dans $\mathcal{G}^1$, il existe $\delta(f_n, \varepsilon')$ tel que pour $|t| \leq \min\{1, \delta\}$

$$\|\,(W_t - 1)\,f_n\|_{\mathcal{G}^1} \leq \varepsilon'.$$

Finalement pour $|t| \leq \min\{1, \delta\}$:

$$\begin{aligned}\|\,(W_t - 1)\,f\|_{\mathcal{T}} &\leq \|\,(W_t - 1)\,f_n\|_{\mathcal{T}} + \|\,(W_t - 1)\,(f - f_n)\|_{\mathcal{T}} \\ &\leq d\|\,(W_t - 1)\,f_n\|_{\mathcal{G}^1} + (M+1)\|f - f_n\|_{\mathcal{T}} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Nous avons ainsi montré que $\{W_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ forme un C_0-groupe dans $\mathcal{T}$, $\{W_t^*\}_{t\in\mathbf{R}}$ étant alors un C_0-groupe dans $\mathcal{T}^*$.

Considérons l'inégalité, issue de (15), vérifiée sur $\mathcal{D}$:

$$|\langle f, Sf\rangle| \leq c\langle f, Tf\rangle = c\|f\|_{\mathcal{T}}^2.$$

L'opérateur S engendre une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{D}$ qui est continue avec la norme issue de $\mathcal{T}$. De la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{T}$, nous en concluons que S se prolonge à une forme sesquilinéaire continue sur $\mathcal{T}$. Par le corollaire du lemme de Riesz, $S \in B(\mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$.

Toutes les conditions sont maintenant réunies pour affirmer que $T \in C^1(A; \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$.

Soit $D(A^*)$ le domaine du générateur A^* du C_0-groupe dans $\mathcal{T}^*$; $D(A^*)$ est dense dans $\mathcal{T}^*$. Posons $\mathcal{A} = (D(A^*), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$, avec $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ la norme graphe associée à A^*. $\mathcal{A}$ est un espace de Hilbert tel que $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{T}^*$. Soit $\mathcal{A}^*$ son dual ($\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{A}^*$).

A l'aide des conditions (4), (9), (12), (13) et (14) nous avons obtenu que l'opérateur A est faiblement conjugué à H et que $i[H, A] \in C^1(A; \mathcal{T}, \mathcal{T}^*)$, hypothèses nécessaires pour l'application du résultat abstrait. Le contenu du théorème 3.1 est le résumé de cette démarche. Nous allons encore "simplifier" l'utilisation de nos résultats.

4 Simplification et conclusion

4.1 Simplification pour le potentiel

Nous avons obtenu un ensemble d'opérateurs H-lisses, à savoir $\{C \text{ tq } C \in B(\mathcal{A}^*, \mathcal{H})\}$. Cette famille est cependant peu explicite. Nous allons donc extraire un ensemble plus petit d'opérateurs plus facilement accessibles nous permettant l'utilisation de la proposition 2.5.

Dans ce qui va suivre nous allons imposer au champ magnétique une condition plus restrictive. Les raisons de ce choix deviendront bientôt évidentes. Supposons que

$$0 < B(x) \leq \frac{c}{1+|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \ c > 0.$$

Considérons la fonction $B^{-\frac{1}{2}} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (du fait que nous avons imposé $B(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$). $\mathcal{D}$ est un coeur pour l'opérateur de multiplication $B^{-\frac{1}{2}}(Q)$ [W, Cor. Thm 5.4]. Soit $\mathcal{B}$, le complété de $\mathcal{D}$ avec la norme $\|f\|_{\mathcal{B}} = \|B^{-\frac{1}{2}} f\|$.

Lemme 4.1 *Il existe une constante $k > 0$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}} \leq k \ \|f\|_{\mathcal{B}}$ pour tout $f \in \mathcal{D}$.*

Preuve :
Commençons par vérifier que l'affirmation (6), à savoir $\langle f, Tf\rangle \geq \varepsilon \langle f, Bf\rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}$, implique que $\langle f, T^{-1} f\rangle \leq \frac{1}{\varepsilon}\langle f, B^{-1} f\rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}$.

L'opérateur $B^{\frac{1}{2}}(Q) \in B(\mathcal{H})$ est autoadjoint. Il en est de même pour $T = 2H_0 - \widetilde{V} + H_c$: H_0 est autoadjoint et positif; $-\widetilde{V} + H_c$ défini une forme sesquilinéaire continue sur $\mathcal{D}$ (se prolongeant à $\mathcal{G}^1$) telle que

$$\left|\langle f, \left(-\widetilde{V} + H_c\right) f\rangle\right| \leq \frac{1}{\gamma}\langle f, H_0 f\rangle + \left(\gamma c^2 + \|\widetilde{V}\|_\infty\right)\langle f, f\rangle \quad \forall \gamma > 0.$$

Pour $\gamma > \frac{1}{2}$ on peut appliquer le théorème KLMN [RS, X.17] pour obtenir que T est autoadjoint et que son "form domain" est $\mathcal{G}^1$.

Considérons l'opérateur autoadjoint $T^{\frac{1}{2}}$ défini par le théorème spectral, à domaine $D(T^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{G}^1 \subset D(B^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{H}$. On a $\left\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} f\right\| \leq \left\|T^{\frac{1}{2}} f\right\| \quad \forall f \in \mathcal{G}^1$ (extension de l'inégalité (6) au domaine maximal de sa validité).

Les conditions du corollaire du théorème 1 de [K] étant vérifiées, nous obtenons $D(B^{-\frac{1}{2}}) \subset D(T^{-\frac{1}{2}})$ et

$$\|f\|^2_{\mathcal{T}^*} = \left\|T^{-\frac{1}{2}} f\right\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\langle f, B^{-1} f\rangle = \frac{1}{\varepsilon}\|f\|^2_{\mathcal{B}} \quad \forall f \in \mathcal{B}$$

et a fortiori pour tout $f \in \mathcal{D}$.

Soit $A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^2 (\Pi_j Q_j + Q_j \Pi_j) = \sum_{j=1}^2 (\Pi_j Q_j) + i$. A laissant $\mathcal{D}$ invariant, $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ et

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \|Af\|_{\mathcal{T}^*} + \|f\|_{\mathcal{T}^*} \leq 2\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \sum_{j=1}^2 \|\Pi_j Q_j f\|_{\mathcal{T}^*} \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Nous montrons (cf Appendice) que $\Pi_j \in B(\mathcal{H}, \mathcal{T}^*)$ pour $j = 1, 2$. Ainsi il existe $d > 0$ tel que $\sum_{j=1}^{2} \|\Pi_j Q_j f\|_{\mathcal{T}^*} \leq d \sum_{j=1}^{2} \|Q_j f\|$.

Finalement $\|f\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \|f\|_{\mathcal{B}} + 2d\|Rf\| \leq k\|f\|_{\mathcal{B}}$, en se souvenant que l'on a choisi le champ magnétique tel que $B^{-\frac{1}{2}}(x) \geq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$.

■

A partir de ce résultat, nous allons pouvoir obtenir une famille d'opérateurs H-lisses particulièrement explicite.

Lemme 4.2 *Soit $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $|U(x)| \leq cB^{\frac{1}{2}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ c > 0$. Alors $U(Q)$ est H-lisse.*

Preuve :
Considérons la conclusion $a)$ du théorème 3.1 :

$$\left\|(H - \lambda \mp i\nu)^{-1})\right\|_{B(\mathcal{A},\mathcal{A}^*)} \leq c \Leftrightarrow |\langle f, (H - \lambda \mp i\nu)^{-1} f\rangle| \leq c\|f\|_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall f \in \mathcal{A}.$$

Des inclusions $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ (de façon dense) et du lemme précédent, nous obtenons

$$|\langle f, (H - \lambda \mp i\nu)^{-1} f\rangle| \leq d\|f\|_{\mathcal{B}}^2 \quad \forall f \in \mathcal{B}$$

avec d indépendant de $\lambda \in \mathbb{R},\ \nu > 0$.

On vérifie alors facilement que pour tout $C \in B(\mathcal{B}^*, \mathcal{H})$, C est H-lisse.

En particulier soit U tel que $|U(x)| \leq cB^{\frac{1}{2}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ c > 0$. Alors $U(Q) \in B(\mathcal{B}^*, \mathcal{H})$ et ainsi est H-lisse. En effet, $\mathcal{B}^*$ est isomorphe au complété de $B^{-1}\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}$ avec la norme $\|f\|_{\mathcal{B}^*} = \|B^{\frac{1}{2}} f\|$ et $\|U(Q)f\| \leq c\|B^{\frac{1}{2}} f\| = c\|f\|_{\mathcal{B}^*} \quad \forall f \in \mathcal{B}^*$.

■

Théorème 4.3 *Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ un potentiel vecteur, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un potentiel et B le champ magnétique engendré par a, satisfaisant :*

i) $0 < B(x) \leq \frac{c}{1+|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, c < 1$

ii) $\exists\ \kappa > 0$ tq $|x|^2 \widetilde{B}^2(x) \leq \kappa B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

iii) V possède des limites radiales $V(\theta) \equiv \lim_{r\to\infty} V(r, \theta)$ et

$$|V(r, \theta) - V(\theta)| < B(r, \theta)$$

Alors pour γ suffisamment petit $H = H_0 + \gamma V$ a un spectre purement absolument continu.

Preuve :

Considérons $V_o(0) = 1$ et $V_o(r, \theta) = V(\theta)$ pour $r > 0$. V_o est homogène de degré 0. Remarquons que l'expression $\mathcal{W}_t V_o$ est indépendante de t et donc que $\widetilde{V_o}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$. Sous les hypothèses *i*) et *ii*) ci-dessus, B et V_o vérifient les conditions d'application du théorème 3.1. $H_0 + \gamma V_o$ a donc un spectre purement absolument continu, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$.

L'opérateur de multiplication correspondant à la fonction $|V - V_o|^{\frac{1}{2}}$ est H-lisse (cf lemme précédent). En utilisant la proposition 2.5 on obtient le résultat escompté.

$\blacksquare$

4.2 Conclusion

Relevons deux faiblesses de nos résultats (issues du théorème 3.1) :

1. Pour un champ magnétique nul, les conditions suivantes demeurent
   i) $\widetilde{V} \in L^\infty$ et $\widetilde{V}(x) \leq 0 \quad x$ p.p.
   ii) $\left|\widetilde{\widetilde{V}}(x)\right| \leq -\kappa \widetilde{V}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \kappa > 0.$
   Celles-ci ne semblent guère les plus faibles pour assurer un spectre purement absolument continu.
2. Alors que pour un potentiel nul, nous devons imposer
   i) $0 < B(x) \leq \frac{c}{1+|x|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ c < 1$
   ii) $|x|^2 \widetilde{B}^2(x) \leq \kappa B(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \kappa > 0$
   qui ne sont pas non plus les conditions les plus faibles pour l'obtention du spectre purement absolument continu.

Ces deux cas particuliers semblent présager des améliorations possibles de la méthodes.

Un autre aspect intéressant de ce problème a été évité. Supposons que le champ magnétique soit la source de valeurs propres, par exemple un champ magnétique constant. Peut-on espérer que l'introduction d'un potentiel suffisamment répulsif donne un spectre purement absolument continu ? Même question pour le champ magnétique de Miller et Simon [MS] à spectre ponctuel dense dans un certain intervalle ?

Ces questions demeurent ouvertes et mériteraient une attention soutenue.

4.3 Remerciements

Je tiens à remercier Messieurs les Professeurs W.O. Amrein et J.J. Loeffel pour m'avoir permis de réaliser ce travail à l'Université de Genève ainsi que pour leur participation comme membres du jury de ce diplôme. Je voudrais également exprimer ma gratitude à Monsieur Marius Mantoiu pour son aide et son soutien précieux, sans qui ces lignes n'auraient vu le jour.

5 Appendice

Lemme 5.1 *Pour* $j = 1, 2$, $\Pi_j \in B(\mathcal{H}, \mathcal{T}^*)$.

Preuve :
Nous avons montré (Lemme 4.1, première partie) que T est autoadjoint avec "form domain" $D(T^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{G}^1 = \{f \in \mathcal{H} \text{ tq } \Pi_j f \in \mathcal{H}, \quad j = 1, 2\}$.

Soit l'opérateur autoadjoint et positif $\Pi_j^* \Pi_j$ à "form domain" $D(\left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{G}_j = \{f \in \mathcal{H}$ tq $\Pi_j f \in \mathcal{H}\}$ [RS, X.25, Ex.4].

On a $\mathcal{G}^1 \subset \mathcal{G}_j$ et de l'inégalité (6) :

$$\left\| \left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{\frac{1}{2}} f \right\|^2 = \langle f, \Pi_j^* \Pi_j f \rangle \leq \frac{1}{\varepsilon} \langle f, Tf \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \left\| T^{\frac{1}{2}} f \right\|^2 \quad \forall f \in \mathcal{G}^1.$$

En utilisant le corollaire du théorème 1 de [K], on obtient $D(\left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{-\frac{1}{2}}) \subset D(T^{-\frac{1}{2}})$ et

$$\left\| T^{-\frac{1}{2}} f \right\|^2 = \|f\|_{\mathcal{T}^*}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{-\frac{1}{2}} f \right\|^2 = \frac{1}{\varepsilon} \langle f, \left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{-1} f \rangle \quad \forall f \in D(\left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{-\frac{1}{2}}).$$

Soit $f \in \mathcal{D}$. On a $\Pi_j f \in D(\left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{-\frac{1}{2}})$ et ainsi

$$\|\Pi_j f\|_{\mathcal{T}^*}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \langle \Pi_j f, \left(\Pi_j^* \Pi_j\right)^{-1} \Pi_j f \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \langle f, f \rangle.$$

De la densité de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$, on conclut que $\Pi_j \in B(\mathcal{H}, \mathcal{T}^*)$.

∎

6 Bibliographie

A W.O. Amrein, *Méthodes Hilbertiennes en Mécanique Quantique*, Université de Genève (1995).

ABG W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, *C_0-groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*, Birkhäuser (1996).

ABG*I* W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, *Notes on the N-Body Problem, Part I*, Université de Genève (1988).

BM A. Boutet de Monvel, M. Mantoiu, *The Method of the Weakly Conjugate Operator*, Lecture Notes in Physics Vol. 488.

BKM A. Boutet de Monvel, G. Kazantseva, M. Mantoiu, *Some Anisotropic Schrödinger Operators without Singular Spectrum*, Helv Phys Acta Vol. 69 (1996).

BP A. Boutet de Monvel, R. Purice, *Limiting Absorption Principle for Schrödinger Hamiltonians with Magnetic Fields*, Commun. in Partial Diff. Equation, 19 (1&2), 89-117 (1994).

K T. Kato, *Notes on Some Inequalities for Linear Operators*, Math. Annalen 125, 208-212 (1952)

LS H. Leinfelder, C.G. Simader, *Schrödinger Operators with Singular Magnetic Vector Potentials*, Math Z. 176, 1-19 (1981).

RS M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Volume I to IV.*

MS K. Miller, B. Simon, *Quantum Magnetic Hamiltonians with Remarkable Spectral Properties* Phys. Rev. Lett. 44, 1706-1707 (1980).

S B. Simon, *The Bound State of Weakly Coupled Schrödinger Operators in One and Two Dimensions*, Annals of Physics 97, 279-288 (1976).

W J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag (1980).