La Conjecture de Brumer-Stark

Pour tout idéal fractionnaire non-nul $\mathfrak{A}$ de K,

Il existe $\varepsilon(\mathfrak{A}) \in K$ tel que :

BS1. $\varepsilon(\mathfrak{A}) \in K^\circ$;

BS2. $(\varepsilon(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}^{W(K)\theta}$;

BS3. Soit $\lambda(\mathfrak{A}) \in \overline{K}$ tel que $\lambda(\mathfrak{A})^{W(K)} = \varepsilon(\mathfrak{A})$, alors $K(\lambda(\mathfrak{A}))/k$ est abélienne.

$$\Updownarrow$$

Il existe une application $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha(\mathfrak{A})$ de $\mathcal{A}_{K/k}$ dans K telle que :

BS1'. $\varepsilon_\alpha(\mathfrak{A}) \in K^\circ, \forall \alpha \in \mathcal{A}_{K/k}$;

BS2'. $(\varepsilon_\alpha(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}^{\alpha\theta}, \forall \alpha \in \mathcal{A}_{K/k}$;

BS3'. $\varepsilon_\alpha(\mathfrak{A})^\gamma = \varepsilon_\gamma(\mathfrak{A})^\alpha, \forall \alpha, \gamma \in \mathcal{A}_{K/k}$.

Proposition.

$$\alpha \in \mathcal{A}_{K/k'} \Rightarrow \alpha\beta \in \mathcal{A}_{K/k}.$$

Preuve.

$$\theta' = \det \begin{pmatrix} \theta(\rho_1 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_1 \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_1 \cdot \rho_r^{-1}) \\ \theta(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_2 \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_2 \cdot \rho_r^{-1}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_r^{-1}) \\ \theta(\rho_r \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_r \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_r \cdot \rho_r^{-1}) \end{pmatrix}$$

On ajoute toutes les lignes à la dernière :

$$\theta' = \det \begin{pmatrix} \theta(\rho_1 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_1 \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_1 \cdot \rho_r^{-1}) \\ \theta(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_2 \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_2 \cdot \rho_r^{-1}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_r^{-1}) \\ \theta & \theta & \dots & \theta \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\beta = \det \begin{pmatrix} \theta(\rho_1 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_1 \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_1 \cdot \rho_r^{-1}) \\ \theta(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_2 \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_2 \cdot \rho_r^{-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_r^{-1}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Supposons $\rho_1 = 1$ et posons, pour tout $\nu \in G$, $N(\nu) \in \mathbb{Z}$ tel que $\nu - N(\nu) \in \mathcal{A}_{K/k}$, *i.e.* $\zeta^\nu = \zeta^{N(\nu)}$ pour tout $\zeta \in \mu(K)$.

On note que :

$$(1 - N(\nu)\,\nu^{-1})\,\theta = \sum_{\sigma \in G} \big(\zeta_S(0,\sigma) - N(\nu)\,\zeta_S(0, \sigma \cdot \nu^{-1})\big)\,\sigma^{-1} \in \mathbb{Z}[G].$$

donc :

$$\big(\zeta_S(0,\sigma) - N(\nu)\zeta_S(0, \sigma \cdot \nu^{-1})\big)\,\sigma^{-1} \in \mathbb{Z}\sigma^{-1} \quad \text{pour tout } \nu, \sigma \in G.$$

En particulier, si on prend $\sigma = \tau\rho_i\rho_j^{-1}$, $\nu = \rho_i$ et on somme sur $\tau \in G'$:

$$\theta(\rho_i \cdot \rho_j^{-1}) - N(\rho_i)\theta(\rho_j^{-1})\rho_i^{-1} \in \mathbb{Z}[G] \quad \text{pour tout } i, j.$$

(Sands) On soustrait

$$N(\rho_i) \cdot \rho_i^{-1} \times \text{ (la première ligne)}$$

à la i-ième ligne pour $2 \le i \le r-1$.

$$\beta = \det \begin{pmatrix} \theta(\rho_1 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_1 \cdot \rho_2^{-1}) & \dots & \theta(\rho_1 \cdot \rho_r^{-1}) \\ \theta(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) - N(\rho_2)\theta(\rho_1^{-1})\rho_2^{-1} & \theta(\rho_2 \cdot \rho_2^{-1}) - N(\rho_2)\theta(\rho_2^{-1})\rho_2^{-1} & \dots & \theta(\rho_2 \cdot \rho_r^{-1}) - N(\rho_2)\theta(\rho_r^{-1})\rho_2^{-1} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_1^{-1}) - N(\rho_{r-1})\theta(\rho_1^{-1})\rho_{r-1}^{-1} & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_2^{-1}) - N(\rho_{r-1})\theta(\rho_2^{-1})\rho_{r-1}^{-1} & \dots & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_r^{-1}) - N(\rho_{r-1})\theta(\rho_r^{-1})\rho_{r-1}^{-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Les entrées sont toutes dans $\mathbb{Z}[G]$ sauf celles de la première ligne. Quand on multiplie par $\alpha \in \mathcal{A}_{K/k'}$ les entrées de la première ligne, elles deviennent des éléments de $\mathbb{Z}[G]$. On a donc :

$$\alpha \in \mathcal{A}_{K/k'} \Rightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Z}[G].$$

Plus difficilement, on montre que :

$$W(K)\beta \in \mathcal{A}_{K/k}$$

mais on ne peut en déduire le même résultat pour $\alpha\beta$ avec $\alpha \in \mathcal{A}_{K/k'}$.

(Popescu) On fait des opérations similaires sur les *colonnes* (!) On soustrait

$$N(\rho_j^{-1})\,\rho_j \times \text{ (la première colonne)}$$

à la j-ième colonne pour $2 \leq j \leq r$.

$$\beta = \det \begin{pmatrix} \theta(\rho_1 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_1 \cdot \rho_2^{-1}) - N(\rho_2^{-1})\theta(\rho_1)\rho_2 & \dots & \theta(\rho_1 \cdot \rho_r^{-1}) - N(\rho_r^{-1})\theta(\rho_1)\rho_r \\ \theta(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_2 \cdot \rho_2^{-1}) - N(\rho_2^{-1})\theta(\rho_2)\rho_2 & \dots & \theta(\rho_2 \cdot \rho_r^{-1}) - N(\rho_r^{-1})\theta(\rho_2)\rho_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_1^{-1}) & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_2^{-1}) - N(\rho_2^{-1})\theta(\rho_{r-1})\rho_2 & \dots & \theta(\rho_{r-1} \cdot \rho_r^{-1}) - N(\rho_r^{-1})\theta(\rho_{r-1})\rho_r \\ 1 & 1 - N(\rho_2^{-1})\rho_2 & \dots & 1 - N(\rho_r^{-1})\rho_r \end{pmatrix}$$

Les entrées sont toutes dans $\mathbb{Z}[G]$ sauf celles de la première colonne. Quand on multiplie par $\alpha \in \mathcal{A}_{K/k'}$ les entrées de la première colonne, elles deviennent des éléments de $\mathbb{Z}[G]$. Ainsi, on retrouve que :

$$\alpha \in \mathcal{A}_{K/k'} \Rightarrow \alpha\beta \in \mathbb{Z}[G].$$

Mais, quand on multiplie par α les entrées de la dernière ligne, elles deviennent des éléments de $\mathcal{A}_{K/k}$ et donc :

$$\alpha\beta \in \mathcal{A}_{K/k}.$$