Préambule

La mécanique des fluides, description des écoulements liquides ou gazeux, recouvre naturellement bien des champs d'application : circuits microfluidiques, météorologie, océanographie, écoulements industriels, fluides corporels *et cætera*. En outre, l'étude mathématique des équations modélisant l'évolution temporelle de ces écoulements concentre certains des défis majeurs des mathématiques, dont la détermination d'un cadre pour l'existence et l'unicité des solutions à l'équation de Navier-Stokes. Même dans des situations relativement *simples* où le problème de Cauchy est résolu, assez peu d'aspects du comportement qualitatif des écoulements sont réellement connus du mathématicien. Petite pierre dans ce vaste édifice, ce mémoire contribue à l'analyse de leur comportement en temps long.

Dans cette perspective, les *vortex* constituent des écoulements fondamentaux à tous points de vue. Le *vortex*, que nous appelons également *tourbillon d'Oseen*, fluide tournant autour d'un axe, représente une brique de base pour la compréhension d'écoulements plus complexes. Notre objectif présent est ainsi de décrire l'évolution asymptotique en grand temps d'un écoulement bidimensionnel général dont l'archétype est la superposition de *vortex* dont les axes de rotation sont parallèles. Nous profitons en effet du fait que le cadre des écoulements homogènes bidimensionnels se prête de manière satisfaisante à la résolution du problème de Cauchy pour nous poser des questions plus élaborées comme celle de savoir comment ces fluides reviennent à l'équilibre.

Notons que les travaux de Thierry Gallay et C. Eugene Wayne attestent que le comportement en grand temps de tels écoulements est peu turbulent. Ainsi, pour des fluides homogènes bidimensionnels dont le champ de vecteurs de rotation instantanée, appelons-le dorénavant tourbillon ou vorticité, est suffisamment localisé, ils montrent qu'asymptotiquement en temps long se forme un unique tourbillon d'Oseen dès lors que la circulation de la vitesse à l'infini est non nulle [27]. Lorsqu'en outre les vitesses initiales sont petites, ils dérivent une description complète de ce retour à l'équilibre [26]. Ainsi, lorsque la circulation totale est nulle, ils établissent cette fois que l'écoulement retourne plus vite au repos et qu'il le fait essentiellement comme la superposition d'une ou deux paires de *vortex* tournant à la même vitesse mais dans des sens opposés.

Ce sont ces travaux qui ont suscité l'essentiel des questions qui ont donné naissance à ce mémoire. En supposant toujours que le tourbillon est bien localisé, ou plus exactement en veillant à ce que la dynamique asymptotique en temps long de l'écoulement ne soit pas la conséquence d'un manque de localisation du tourbillon initial, nous examinons en effet les limites et la stabilité des résultats de [26, 27].

Même s'agissant d'une asymptotique en temps long, il est préférable de s'assurer qu'elle s'observe en un temps raisonnable. Or l'article [27] repose sur un argument de compacité. Aussi la **première partie** de ce mémoire consiste-t-elle en l'obtention d'un **temps explicite** pour la formation d'un unique tourbillon d'Oseen dans tout écoulement homogène, ce qui de surcroît nous fournit une majoration du temps de vie de la turbulence bidimensionnelle.

En outre, puisque tout fluide supposé homogène n'est *a priori* que faiblement inhomogène, pour valider [27], il nous faut retrouver l'asymptotique donnée par les tourbillons d'Oseen et, pour s'assurer que ces tourbillons sont bien observables, montrer leur stabilité dans des écoulements incompressibles faiblement inhomogènes. La **deuxième partie** de ce mémoire est ainsi consacrée à un résultat de stabilité asymptotique des tourbillons d'Oseen — sans restriction sur le nombre de Reynolds — dans les écoulements incompressibles à densité variable, qui implique également que tout fluide **incompressible faiblement inhomogène**, lent et de circulation non nulle, retourne à l'équilibre comme un tourbillon d'Oseen.

Reste néanmoins qu'aucun écoulement n'est réellement parfaitement incompressible. Cette observation est d'autant moins anodine que le système décrivant l'évolution des écoulements compressibles et celui décrivant ceux incompressibles n'admettent pas de solution commune. Cependant, bien souvent ces modèles décrivent une même réalité. C'est ainsi que la **troisième partie** assure que tout fluide **compressible faiblement inhomogène**, lent et de *circulation nulle*, se comporte asymptotiquement en temps long essentiellement comme un fluide homogène de circulation nulle.

Remerciements

Naturellement, mes premiers mots appartiennent à Thierry Gallay. Je ne saurais trop estimer la clarté de point de vue et la confiance en les mathématiques dont il a témoigné au cours de nos entretiens. Mon travail leur doit beaucoup et son exemple m'habitera longtemps.

Je remercie Olivier Besson et Raphaël Danchin d'avoir accepté d'endosser le rôle d'expert pour analyser ce mémoire. Certains des échanges qui ont découlé de leur analyse m'ont ouvert si ce n'est de nouveaux horizons du moins de nouveaux chemins. Que Didier Bresch, Dragoş Iftimie et Guy Métivier sachent également que j'apprécie l'honneur de les voir figurer dans mon jury !

Nombreux sont les membres de l'Institut Fourier, ou du laboratoire Jean Kuntzmann, — personnels administratifs ou responsables de l'approvisionnement en café, membres titulaires ou compagnons de thèse — à qui je souhaiterais exprimer ma gratitude, trop nombreux malheureusement pour être tous nommés. Je ne peux cependant me dispenser d'évoquer l'éternelle porte ouverte d'Éric Dumas.

Je souhaiterais également avoir quelques mots pour les indispensables organisateurs de colloques, de rencontres régionales et de sessions des groupements de recherche, et particulièrement pour ceux de rencontres à Albi, Lille, Lyon, Marseille, Saint-Étienne, ou encore à Forges-les-Eaux et Évian.

Enfin, il me faut payer mon dû à ceux qui m'ont encouragé et soutenu par leur présence ou le sentiment de leur présence, à ma famille, aux grenoblois et aux lyonnais, à ceux qui ont accueilli le temps de la rédaction, et, finalement, à mon ardéchoise, Solenne.

Table des matières

1 Mise en perspective **7**
- 1.1 Modèles physiques . . . 7
- 1.2 Formulation tourbillon & tourbillons d'Oseen . . . 11
- 1.3 Des problèmes traités . . . 18

I Fluides à densité constante **20**

2 Introduction à la première partie **21**

3 Estimation du temps de vie de la turbulence **25**

4 Relaxation des tourbillons positifs **30**

5 Étude locale au voisinage d'un tourbillon d'Oseen **33**

II Fluides incompressibles à densité variable **38**

6 Introduction à la deuxième partie **39**

7 Équation de transport **47**

8 Équation de vorticité **51**
- 8.1 Estimation à poids . . . 51
- 8.2 Estimation de régularité . . . 55
- 8.3 Estimation pour la convergence . . . 59

9 Démonstration du théorème 6.1 **63**
- 9.1 Existence et unicité . . . 63
- 9.2 Stabilité asymptotique . . . 66

III Fluides compressibles **68**

10 Introduction à la troisième partie **69**

11 Composante linéaire **79**
11.1 Partie purement compressible 80
11.1.1 Hautes fréquences 81
11.1.2 Basses fréquences 83
11.2 Partie incompressible à densité constante 86

12 Composante non linéaire **90**
12.1 Cas $p \geq 2$ 90
12.2 Cas $p \leq 2$ 95

13 Régime du tourbillon d'Oseen **100**

14 Perspectives **104**

A Commutateurs **106**

B Reconstitution de la pression **108**

C Loi de Biot-Savart **111**

D Notations **115**

Table des figures

1.1 Fluide bidimensionnel 8
1.2 Tourbillon d'Oseen 16

5.1 Spectre de $\mathcal{L}$ sur $L^2(d)$ 37

10.1 Allure à l'infini des lignes de courant de u^{F_1} 71

Chapitre 1

Mise en perspective

1.1 Modèles physiques

On ne trouvera ci-dessous qu'une présentation succincte de la physique mise en jeu par les problèmes étudiés. Un lecteur intéressé par une présentation d'un plus grand nombre de modèles, notamment thermodynamiques, pourra lire le premier chapitre de [42]. Celui intéressé par la physique de la mécanique des fluides pourra à profit consulter [39].

Pour notre part, nous allons nous intéresser au comportement en temps long d'un fluide visqueux occupant tout l'espace. Nous ne prenons pas en compte d'effet thermodynamique[1], et donc modélisons l'évolution en temps du fluide par celles de sa densité de masse $\rho(t, y) \in \mathbf{R}^+$ et de son champ de vitesse $u(t, y) \in \mathbf{R}^3$.

À vrai dire, nous nous restreignons à l'étude des fluides dits *bidimensionnels*. Cela correspond à supposer que le fluide est d'une part invariant par translation dans une certaine direction, dite verticale, et d'autre part que les déplacements à l'intérieur du fluide sont orthogonaux à cette direction, c'est-à-dire horizontaux. Ainsi, par la suite, d'une part toutes les quantités ne dépendront que de variables (t, x), où $t \in \mathbf{R}^+$ représente le temps et $x \in \mathbf{R}^2$ la variable horizontale d'espace ; d'autre part les vitesses seront supposées horizontales : $u(t, x) \in \mathbf{R}^2$. Ces hypothèses sont vérifiées par exemple pour certains fluides en couche mince ou en rotation rapide.

Pour l'évolution temporelle de (ρ, u), la *conservation de la masse* fournit une première équation. En effet, elle impose que la variation au temps t de densité de masse ρ en un point x ne puisse être causée que par le départ ou l'arrivée de *particules* se déplaçant avec la vitesse $u(t, x)$ et portant la masse $\rho(t, x)$, ce qui donne

$$\partial_t \rho \ + \ \mathrm{div}\,(\rho\, u) \ = \ 0 \qquad (1.1)$$

où $\mathrm{div}(f_1, f_2) = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ est l'opérateur divergence habituel.

[1] Plus précisément, nous négligeons les effets liés à la température ou à l'entropie.

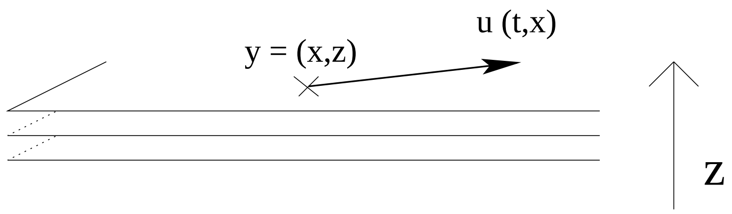

FIG. 1.1 – Fluide bidimensionnel

On obtient une deuxième équation en écrivant la conservation de la quantité de mouvement ou plus exactement un *bilan de forces* suivant la seconde loi de Newton. La variation de densité de quantité de mouvement ρu est due pour partie au déplacement à la vitesse u des *particules* portant la quantité de mouvement ρu, mais également aux forces qui s'exercent sur le fluide. Nous ne prendrons en compte que les forces de viscosité et de pression, et ce de la manière suivante,

$$\partial_t (\rho u) \ + \ \mathrm{div}\,(\rho u \otimes u) \ = \ \mu \triangle u \ + \ (\mu + \lambda) \nabla \mathrm{div}(u) \ - \ \nabla p \quad (1.2)$$

où l'opérateur divergence du membre de gauche agit sur les champs de tenseurs d'ordre 2 pour rendre un champ de vecteurs par

$$\mathrm{div}\,(f \otimes g)_i \ = \ \mathrm{div}\,(f_i\, g) \ = \ \partial_1 (f_i\, g_1) + \partial_2 (f_i\, g_2)$$

pour $i = 1, 2$. Les deux premiers termes du membre de droite représentent des réactions à la déformation — les forces de viscosité —, μ étant lié à l'élasticité de cisaillement du fluide, λ à son élasticité volumique ou de compression. Pour obtenir une telle expression pour les forces de viscosité, nous avons dû supposer que le fluide que nous étudions est newtonien, et que les coefficients de viscosité de Lamé — λ et μ — sont constants, ce qui est relativement raisonnable lorsque, par exemple, ρ est une perturbation d'une constante. Par ailleurs, il est nécessaire pour obtenir l'ellipticité du terme de viscosité — et physiquement pertinent — de supposer $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$, ce que nous ferons. Le dernier terme exprime la force due au gradient de pression, $p\,(t, x) \in \mathbf{R}$ étant le champ de pression du fluide.

Pour boucler le système formé par les équations (1.1), (1.2), reste à décrire comment obtenir la pression p. Une première manière de faire consiste à se donner une *loi d'état*[2] :

$$p \ = \ P(\rho) \quad (1.3)$$

où $P : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ est une fonction régulière strictement croissante[3] fixée. On

[2]À dire vrai, ici au moins interviennent des considérations thermodynamiques.
[3]Nous faisons l'hypothèse que la pression croît avec la densité ρ.

obtient ainsi le système de Navier-Stokes *compressible*,

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \rho \,+\, \operatorname{div}(\rho u) &=& 0 \\ \partial_t (\rho u) \,+\, \operatorname{div}(\rho u \otimes u) &=& \mu \triangle u + (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div}(u) - \nabla(P(\rho)) \end{array}\right\} \quad (1.4)$$

que l'on peut récrire[4], en combinant (1.1) et (1.2),

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \rho \,+\, \operatorname{div}(\rho u) &=& 0 \\ \partial_t u \,+\, (u\cdot\nabla) u &=& \frac{1}{\rho}\left[\, \mu \triangle u \,+\, (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div}(u) - \nabla(P(\rho)) \,\right] \end{array}\right\} \quad (1.5)$$

avec $((f\cdot\nabla)g)_i = f\cdot(\nabla g_i) = f_1\,\partial_1\, g_i + f_2\,\partial_2\, g_i$ pour $i = 1, 2$.

Une autre manière de faire consiste à supposer que le fluide est *incompressible*. Cela signifie que l'on ne peut pas réduire le volume occupé par le fluide en le comprimant ; plus précisément, si des *particules* du fluide occupent une partie de l'espace Ω_t au temps t, alors elles occuperont à n'importe quel temps $t' > t$ une partie de l'espace $\Omega_{t'}$ de même volume : $|\,\Omega_{t'}\,| = |\,\Omega_t\,|$. Autrement dit, le flot associé au champ de vitesse $u(t,x)$ préserve les volumes. D'où la condition d'incompressibilité

$$\operatorname{div} u \;=\; 0\,. \quad (1.6)$$

La pression devient alors un simple multiplicateur de Lagrange associé à l'incompressibilité. En effet, en tenant compte de (1.6), on obtient le système

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \rho \,+\, u\cdot\nabla\rho &=& 0 \\ \partial_t u \,+\, (u\cdot\nabla) u &=& \frac{1}{\rho}\left[\, \mu \triangle u \,-\, \nabla p \,\right] \end{array}\right\} \quad (1.7)$$

la condition (1.6) imposant alors

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) \;=\; \operatorname{div}\left(\frac{\mu}{\rho}\triangle u \,-\, (u\cdot\nabla)\, u\right). \quad (1.8)$$

À une constante[5] près, cette équation elliptique détermine p de manière unique. Le système (1.7), dans lequel la pression p est déterminée par (1.8), est appelé système de Navier-Stokes *incompressible à densité variable* ou inhomogène.

Notons qu'un fluide incompressible initialement *homogène*, c'est-à-dire de densité initiale constante, $\rho(0) \equiv \rho_0$, reste homogène pour tout temps ultérieur[6], $\rho(t) \equiv \rho_0$. Dans ce cas, le système se réduit à l'équation suivante

$$\partial_t u \,+\, (u\cdot\nabla)\, u \;=\; \frac{\mu}{\rho_0}\triangle u \,-\, \frac{1}{\rho_0}\nabla p \quad (1.9)$$

---

[4] Nous ne traitons pas le cas de fluides pouvant contenir des poches de vide ou de quasi-vide. En conséquence, diviser par ρ n'est pas un problème pour nous.

[5] Ou plutôt : à une fonction dépendant du temps près.

[6] Réciproquement, au vu de (1.1), un fluide à densité constante est nécessairement incompressible. Certains auteurs définissent même l'incompressibilité comme le fait d'être à densité constante !

complétée par la reconstitution de la pression

$$\frac{1}{\rho_0} \triangle p = -\operatorname{div}\left((u \cdot \nabla) u\right) .$$

Cette équation est appelée équation de Navier-Stokes homogène ou à densité constante, ou plus souvent simplement équation de Navier-Stokes. Le cas des fluides incompressibles à densité constante[7] est de loin le plus étudié, et notre étude de fluides plus généraux se fera toujours relativement aux fluides homogènes.

En effet, s'il est clair que les systèmes (1.5) et (1.7) n'admettent pas de solutions communes, p ne pouvant que difficilement satisfaire simultanément à (1.3) et (1.8), il n'en demeure pas moins que l'on s'attend à ce que dans bien des cas le régime compressible soit bien approché par des solutions de l'équation à densité constante. Il est alors naturel de chercher à mesurer le degré de compression d'un fluide ; on introduit pour cela le *nombre de Mach*

$$Ma = \frac{|u|}{\sqrt{P'(\rho)}} . \tag{1.10}$$

Pour un fluide non visqueux, c'est-à-dire tel que $\mu = \lambda = 0$, le linéarisé autour de $\rho \equiv \rho_0$ et $u \equiv 0$ conduit à une équation des ondes pour l'évolution de ρ, les ondes de densité se déplaçant à la vitesse $\sqrt{P'(\rho_0)}$. Par analogie, $\sqrt{P'(\rho)}$ est appelé *vitesse du son* locale. Le nombre de Mach compare donc la vitesse locale du fluide à celle du son. Une asymptotique *subsonique* c'est-à-dire à faible nombre de Mach peut permettre de passer des équations compressibles aux équations incompressibles. Pour un passage en revue de tels résultats, des résultats récents et des références sur le sujet, on pourra se reporter vers [1].

Notre but n'est pas de développer une asymptotique faible inhomogénéité ou faible nombre de Mach, dans la mesure où autant que possible aucun paramètre ne tendra vers zéro dans ce qui suit. En revanche, il s'agit plutôt de montrer que des fluides faiblement inhomogènes, qu'ils soient incompressibles ou compressibles, ont une dynamique asymptotique en temps long proche de celle d'un fluide à densité constante. Bien que la dynamique incompressible homogène fournisse un bon modèle dans bien des situations, *a priori* aucun fluide n'est parfaitement homogène ou incompressible. Ainsi, pour qu'une dynamique asymptotique en temps long prédite par le modèle à densité constante puisse être observée dans des situations réalistes, il semble nécessaire que celle-ci soit encore pertinente pour des fluides faiblement inhomogènes ou faiblement compressibles. Une partie importante de ce mémoire consiste en l'obtention de tels résultats de robustesse pour la dynamique homogène.

[7] Comme mentionné ci-dessus, l'expression est redondante.

Avant d'aller plus avant, nous allons donc nous attarder sur la dynamique des fluides bidimensionnels, homogènes et visqueux. Notons tout d'abord que si l'on connaît une dimension L caractéristique du phénomène, on peut définir un nombre censé donner une information qualitative sur la dynamique des fluides incompressibles, le *nombre de Reynolds*

$$Re \;=\; \frac{|u|\,/\,L}{\mu\,/\,(\rho\,L^2)} \;=\; \frac{\rho\,|u|\,L}{\mu}\;. \tag{1.11}$$

Le nombre de Reynolds permet de comparer les effets, de l'ordre de $|u|/L$, du terme de convection $(u\cdot\nabla)u$ à ceux, d'ordre $\mu/(\rho L^2)$, du terme de viscosité $\frac{\mu}{\rho}\triangle u$. Pour de petits nombres de Reynolds, on s'attend à ce que l'écoulement soit *laminaire* : la convection est négligeable devant la diffusion et des *particules* voisines à l'instant initial le demeurent. Pour de grands nombres de Reynolds, en revanche, on s'attend à ce que l'écoulement soit *turbulent.* Nous essaierons donc autant que possible de ne pas nous restreindre aux petits nombres de Reynolds. Néanmoins, de manière assez surprenante, les grands nombres de Reynolds que nous allons rencontrer seront souvent associés à des écoulements laminaires !

1.2 Formulation tourbillon & tourbillons d'Oseen

L'équation de Navier-Stokes (1.9) est l'une des plus célèbres équations aux dérivées partielles. Par conséquent, en matière de références bibliographiques, nous ne prétendrons évidemment pas à l'exhaustivité. Contentons-nous plutôt de diriger le lecteur intéressé vers [10], [38], [40], [42], [46] et [50]. Le contenu de ces ouvrages déborde de beaucoup le cadre de ce qui suit. Soulignons que le cas de la dimension 2 est par ailleurs un cas particulièrement favorable pour le problème de Cauchy global en temps. Pour un traitement plus proche de ce que nous allons exposer ci-dessous, nous renverrons plus volontiers à un exposé de Matania Ben-Artzi sur la formulation tourbillon [4].

Afin d'être en mesure d'aborder le comportement asymptotique en temps long des fluides à densité constante, il nous faut bien évidemment choisir des espaces admissibles, pour les données initiales et les solutions, qui soient adaptés à l'étude de la dynamique et dans lesquels l'on puisse effectivement démontrer des résultats d'existence et d'unicité globaux en temps ! Pour nous guider dans ce choix, nous nous appuyons sur l'une des propriétés fondamentales des équations incompressibles : l'*invariance d'échelle.* Pour un paramètre d'échelle $a>0$, introduisons le changement d'échelle suivant

$$D_a^v\,(u)\;(t,x) \;=\; a\;u\,(a^2t,ax) \tag{1.12}$$

qui correspond, pour les données initiales, à

$$D_a^{v_0}\,(u_0)\;(x) \;=\; a\;u_0\,(ax)\;. \tag{1.13}$$

Si u est une solution de (1.9) de condition initiale u_0 en $t = 0$, alors, pour tout $a > 0$, $D_a^v(u)$ est une solution de (1.9) de condition initiale $D_a^{v_0}(u_0)$. C'est ce que l'on appelle une invariance d'échelle. Cette propriété est bien vérifiée expérimentalement, et fait partie des critères validant ou disqualifiant un modèle incompressible. Il est par conséquent préférable de travailler avec des espaces invariants d'échelle, c'est-à-dire associés à des normes invariantes sous l'action de (1.12), (1.13). Par ailleurs, pour les équations paraboliques possédant une invariance d'échelle, on s'attend à ce que le comportement asymptotique en temps long[8] corresponde à celui à l'infini — en espace — de la donnée initiale[9]. D'où, d'une part, le fait qu'il soit naturel de travailler dans des espaces à poids — pour contrôler ce comportement à l'infini — lorsque l'on s'intéresse à la dynamique ; et d'autre part, l'importance des données initiales dites *auto-similaires*[10], et des solutions auto-similaires qui leur correspondent, dans l'analyse asymptotique en temps. Explicitons qu'une solution u, respectivement une donnée initiale u_0, est dite auto-similaire lorsque $D_a^v u = u$, respectivement $D_a^{v_0} u_0 = u_0$, pour tout $a > 0$. Un espace de données initiales admissibles parfait devrait contenir les données auto-similaires qui interviennent dans la description de l'analyse asymptotique des solutions qui lui correspondent.

Discutons $L^2(\mathbf{R}^2)$, l'espace historique pour u_0. Il correspond aux solutions d'énergie finie à la Leray [41]. Il présente le double avantage d'être invariant d'échelle et d'être associé à une quantité physique, l'énergie cinétique, intervenant dans l'égalité de dissipation

$$\frac{1}{2}\rho_0 \,\| u(t) \|_2^2 \;+\; \mu \int_0^t \| \nabla u(s) \|_2^2 \, ds \quad = \quad \frac{1}{2}\rho_0 \,\| u_0 \|_2^2$$

formellement impliquée par l'équation (1.9). Ceci explique, au moins en partie, pourquoi le problème est bien posé en dimension deux pour les solutions d'énergie finie. Ainsi, à première vue, il semble raisonnable de ne travailler que dans ce contexte. Toutefois, $L^2(\mathbf{R}^2)$ ne contient pas de donnée auto-similaire[11] non triviale. En effet, si $u_0(x) = |x|^{-1}\,\phi\,(x/\,|x|)$, avec $\phi : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}^2$ non nulle, alors u_0 n'est pas de carré intégrable. On peut certes pallier cela en travaillant dans un espace plus grand[12]. Néanmoins, à ma connaissance, on ne connaît pas de tel espace dans lequel le problème est bien posé pour de grandes données initiales. Par ailleurs, l'équation (1.9) ne permet pas réellement de travailler dans des espaces à poids, alors que cela semble si ce n'est nécessaire du moins naturel pour étudier l'asymptotique en temps long des équations paraboliques possédant une invariance d'échelle. En de-

[8] Ou au voisinage d'une explosion en temps fini.

[9] Voir [14] pour une illustration de ce principe.

[10] En l'occurrence, les vitesses initiales sont auto-similaires si elles sont homogènes d'ordre un.

[11] Ni même asymptotiquement auto-similaire.

[12] Par exemple, en dimension 3, dans l'espace de Besov $\dot{B}_{p,\infty}^{-1+3/p}$, avec $p < \infty$ [11, 10].

mandant trop de localisation pour la vitesse initiale, on risque d'obtenir des résultats caractérisant le comportement asymptotique des solutions en fonction de critères de décroissance spatiale qui ne sont pas préservés par l'évolution ! Pour résoudre ces problèmes, nous allons changer de cadre.

Jusqu'ici nous avons suivi l'évolution du fluide *via* celle de son champ de vitesse u et le cas échéant de sa densité de masse ρ. Cependant, pour les fluides incompressibles, dans bien des situations, il est plus naturel de suivre le rotationnel du champ de vitesse. Formellement, puisque nous nous intéressons à des champs de vitesse u nuls à l'infini, et de divergence nulle, il nous est loisible de les reconstituer à partir de leurs rotationnels. Par ailleurs, étant donné que nous nous restreignons à des champs de vitesse horizontaux, leurs rotationnels sont toujours verticaux et il nous suffit donc de ne suivre que la composante verticale de ceux-ci. Dans la suite, cette manière de poser les équations en terme du rotationnel de la vitesse sera appelée formulation tourbillon ou vorticité.

Précisons, on appelle *tourbillon* ou *vorticité* la quantité suivante

$$\omega \;=\; \partial_1 u_2 \;-\; \partial_2 u_1 \;. \tag{1.14}$$

Par abus de langage[13], on dira que ω est le rotationnel de u et l'on notera souvent $\omega = \mathrm{rot}(u)$. En appliquant l'opérateur rotationnel à (1.9) et en profitant du contexte bidimensionnel[14], on obtient l'équation

$$\partial_t \omega \;+\; u\cdot\nabla\omega \;=\; \frac{\mu}{\rho_0}\,\triangle\,\omega \tag{1.15}$$

qu'il faut compléter par la reconstitution de u à partir de ω. À cet effet, remarquons que $\mathrm{div}\, u = 0$ et $\mathrm{rot}\, u = \omega$ est formellement équivalent[15] à $u = \nabla^\perp\phi$ avec $\triangle\,\phi = \omega$. D'où $u = -\nabla^\perp(-\triangle)^{-1}\omega$, ce qui, en variable de Fourier, conduit à[16]

$$\widehat{u}\,(\eta) \;=\; \frac{\mathrm{i}\,\eta^\perp}{|\eta|^2}\,\widehat{\omega}\,(\eta) \tag{1.16}$$

et, connaissant[17] la solution fondamentale associée au Laplacien sur $\mathbf{R}^2$, à[18]

$$u(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\;\omega\,(y)\;dy\;. \tag{1.17}$$

[13] En fait, $(0,0,\omega)$ est le rotationnel de $(u_1,u_2,0)$.

[14] L'équation en dimension deux est plus simple. Il lui correspond notamment un principe du maximum.

[15] $\mathbf{R}^2$ est simplement connexe. Donc une forme fermée y est exacte.

[16] À condition d'avoir la bonne convention pour la transformée de Fourier. *Confer* l'annexe D pour connaître celle employée dans ce mémoire.

[17] On comprend que la formulation tourbillon soit d'usage moins agréable dans un domaine borné, pour lequel la connaissance de cette solution fondamentale est moins aisée, d'autant plus qu'elle dépend des conditions au bord.

[18] Le symbole $\perp$ désigne la rotation du plan, centrée en l'origine, d'un quart de tour direct, c'est-à-dire que $(x_1,x_2)^\perp = (-x_2,x_1)$.

On dit que u est obtenu à partir de ω *via* la *loi de Biot-Savart*, l'on note

$$u \;=\; K_{BS} \star \omega \;, \qquad K_{BS}\,(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\,\frac{x^{\perp}}{|x|^2}$$

et l'on appelle K_{BS} noyau de Biot-Savart. L'équation (1.15), où u est obtenu par (1.17), est appelée formulation tourbillon ou vorticité de l'équation de Navier-Stokes.

Naturellement, à l'invariance d'échelle de (1.9) correspond une invariance de l'équation (1.15) sous le changement d'échelle

$$D_a^w\,(\omega)\;(t,x) \;=\; a^2\;\omega\,(a^2t, ax) \tag{1.18}$$

qui correspond, pour les données initiales, à

$$D_a^{w_0}\,(\omega_0)\;(x) \;=\; a^2\;\omega_0\,(ax) \tag{1.19}$$

pour tout $a > 0$. On se pose donc les mêmes questions que précédemment : l'équation conserve-t-elle des décroissances à l'infini et peut-on trouver un espace invariant d'échelle suffisamment grand pour contenir des données initiales auto-similaires[19] mais dans lequel le problème de Cauchy est globalement bien posé ? Tout d'abord, signalons que l'on peut effectivement montrer que l'équation de vorticité est bien posée dans des espaces à poids, polynomiaux [26] ou gaussiens [28] par exemple[20]. Par ailleurs, un premier espace naturel pour l'équation de vorticité est $L^1(\mathbf{R}^2)$. Il est invariant d'échelle et est lié à la circulation de la vitesse à l'infini $\int_{\mathbf{R}^2}\omega(t,x)dx$, qui est une quantité formellement préservée par l'évolution[21], et au *nombre de Reynolds* de circulation[22]

$$R \;=\; \frac{\rho_0}{\mu}\int_{\mathbf{R}^2}\;|\omega_0(x)|\;dx \tag{1.20}$$

censé caractériser la turbulence. Le problème est bien posé dans $L^1(\mathbf{R}^2)$ [3, 9]. Néanmoins, $L^1(\mathbf{R}^2)$ ne contient pas de donnée auto-similaire. Cependant, cette fois, on dispose d'une généralisation naturelle, invariante d'échelle, suffisamment grande et dans laquelle le problème est bien posé : l'espace des mesures réelles finies $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$. L'existence de solutions de données initiales mesure est due à [15] et [30], mais l'on pourra également consulter [34]. Dans [30] et [34], se trouve un argument assurant l'unicité de ces solutions quand la partie atomique du tourbillon initial est petite. Pour des grandes masses de Dirac, l'unicité est obtenue par [27] et redémontrée dans [25]. Enfin,

[19] C'est-à-dire, ici, homogènes d'ordre deux.

[20] Concernant les localisations respectives de la vitesse et de la vorticité, il peut être instructif de comparer [8] et [7].

[21] Puisque l'équation pour ω s'obtient en dérivant l'équation sur u.

[22] À comparer à (1.11).

pour des données générales, l'unicité est, elle, établie dans [24]. Notons que $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$ n'est pas seulement mathématiquement commode, mais également physiquement et numériquement pertinent. Cet espace permet de prendre en compte des *vortex* ou des filaments de tourbillon[23]. Pour les simulations numériques en mécanique des fluides, il est même courant de remplacer une donnée initiale régulière par une approximation mesure !

Disposant d'un bon cadre, nous pouvons maintenant décrire le comportement asymptotique de telles solutions. Il faut tout d'abord remarquer qu'à des données initiales mesure correspondent des solutions intégrables $\omega(t) \in L^1(\mathbf{R}^2)$ pour tout temps $t > 0$. En conséquence, pour bon nombre de questions, il suffit de traiter le cas des tourbillons initialement intégrables. Précisons maintenant ce que nous entendons ici par décrire le comportement asymptotique des solutions. Comme nous ne considérons que des solutions nulles à l'infini, que nous ne prenons pas en compte de force extérieure, et que nous nous intéressons à des fluides visqueux occupant tout l'espace, il n'est pas étonnant que $u(t)$ et $\omega(t)$ tendent vers zéro, lorsque le temps t tend vers $+\infty$. Nous cherchons à préciser ce comportement. Une première réponse consiste à donner un *taux* de convergence. En l'occurrence, les taux de décroissance dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ correspondent à ceux du noyau de la chaleur [3]. Nous sommes intéressés par une information encore plus précise : une asymptotique, un *profil*. Pour cela, il faut se tourner vers des solutions auto-similaires.

Une masse de Dirac constitue une donnée auto-similaire, elle donne par conséquent lieu à une solution auto-similaire : le *vortex* ou *tourbillon d'Oseen* ou de Lamb-Oseen. À une masse de Dirac centrée en l'origine et de poids μ/ρ_0, correspond un tourbillon de vorticité et vitesse

$$\omega^G(t,x) \;=\; \frac{1}{t}\,G\!\left(\frac{x}{\sqrt{(\mu/\rho_0)\,t}}\right)\,, \quad u^G(t,x) \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0\,t}}\;v^G\!\left(\frac{x}{\sqrt{(\mu/\rho_0)\,t}}\right) \tag{1.21}$$

avec les profils

$$G(\xi) \;=\; \frac{1}{4\pi}\,e^{-|\xi|^2/4}\,, \qquad v^G(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\,\frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\left(1 - e^{-|\xi|^2/4}\right)\,. \tag{1.22}$$

Notons que $\omega^G(t)$ est bien intégrable pour tout temps $t > 0$ tandis que $u^G(t)$ n'est jamais de carré intégrable. En fait, au vu de (1.16), dès lors que ω est une mesure finie et que $u = K_{BS} \star \omega$ est de carré intégrable, alors la circulation de la vitesse u à l'infini est nulle : $\omega(\mathbf{R}^2) = 0$. Or cette circulation est préservée par l'évolution donc, dans notre contexte, si la vitesse n'est pas initialement de carré intégrable, elle ne l'est pour aucun temps. Observons

[23] Nous ne pouvons que déplorer le double sens du mot *tourbillon* en mécanique des fluides. Il désigne parfois la vorticité, c'est-à-dire le rotationnel du champ de vitesse. D'autres fois, il désigne un type particulier de solutions, correspondant souvent à un *vortex*. Le contexte est censé trancher.

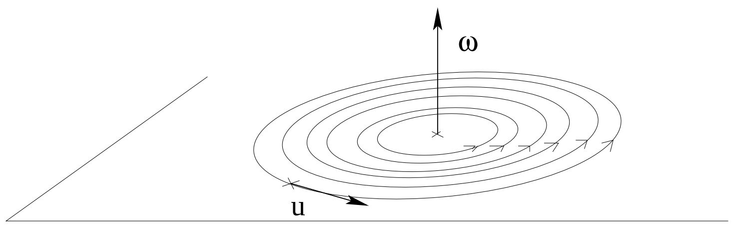

FIG. 1.2 – Tourbillon d'Oseen

également que ω^G est une fonction radiale, que $\omega^G(t)$ est partout strictement positive pour tout temps $t > 0$ et qu'à $t > 0$ fixé les trajectoires associées au champ de vitesse $u^G(t)$ sont des cercles, ce qui correspond bien à l'image que l'on peut se faire d'un *vortex*. La première et la dernière observation conduisent de surcroît à l'annulation du terme de convection $u^G \cdot \nabla\omega^G = 0$. Cela nous permet de vérifier que notre tourbillon d'Oseen fournit bien une solution[24] auto-similaire de l'équation (1.15) et que celle-ci est laminaire. La linéarité de l'équation pour ce tourbillon d'Oseen nous permet en outre de nous assurer également qu'à une masse de Dirac, $\alpha\,(\mu/\rho_0)\,\delta_0$, centrée en l'origine et de poids $\alpha\,(\mu/\rho_0)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, correspond la solution donnée par le tourbillon d'Oseen $\alpha\,\omega^G$. Remarquons que nous avons paramétré le tourbillon $\alpha\,\omega^G$ par α sa circulation, $|\alpha|$ étant alors son nombre de Reynolds. Il sera donc primordial par la suite de ne pas faire d'hypothèse restrictive sur α.

Nous allons à présent voir que les tourbillons d'Oseen donnent l'asymptotique de — presque — toute solution de tourbillon initial mesure. En particulier, ce qui suit implique que ce sont les seules solutions auto-similaires dont le tourbillon initial est une mesure finie[25]. Le résultat qui suit est extrait du travail de Thierry Gallay et C. Eugene Wayne [27].

Théorème 1.1 (Gallay & Wayne, 2005 [27]) *Toute solution $\omega(t,x)$ du système (1.15), (1.17), associée à une donnée initiale ω_0 appartenant à l'espace des mesures finies $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$, vérifie*

$$\lim_{t\to\infty} \|\,\omega(t) - \alpha\,\omega^G(t)\,\|_1 \quad = \quad 0, \tag{1.23}$$

où

$$\alpha \quad = \quad \frac{\rho_0}{\mu}\,\omega_0(\mathbf{R}^2)\ . \tag{1.24}$$

La circulation étant préservée par l'équation, la sélection de α par (1.24) est forcée par la convergence dans $L^1(\mathbf{R}^2)$. Par ailleurs, en combinant (1.23)

[24]Le lecteur perspicace aura débusqué sous le déguisement de $\frac{\rho_0}{\mu}\,\omega^G$ le noyau de la chaleur !

[25]On peut évidemment construire d'autres solutions auto-similaires en adaptant les techniques de [10, 11] à la dimension 2.

et les taux de décroissance déjà connus [3], et en étudiant le noyau de Biot-Savart, on obtient cette asymptotique dans bien d'autres espaces $L^p(\mathbf{R}^2)$ tant pour le tourbillon ω que pour le champ de vitesse u. Explicitement, Thierry Gallay et C. Eugene Wayne [27] montrent que

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \,\|\,\omega(t) - \alpha\,\omega^G(t)\,\|_p \;=\; 0\;, \quad \lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \,\|\,u(t) - \alpha\,u^G(t)\,\|_q \;=\; 0\;,$$

pour $1 \leq p \leq \infty$ et $2 < q \leq \infty$. Notons que les tourbillons d'Oseen ne mènent vraiment l'asymptotique que lorsque α est non nul. En particulier, si u_0 est de carré intégrable, ce théorème nous dit au contraire que notre solution décroît plus vite qu'un tourbillon d'Oseen. On obtient tout de même que tous les fluides bidimensionnels homogènes de circulation non nulle sont asymptotiquement laminaires, sans restriction sur le nombre de Reynolds donc la taille des solutions. Il est également remarquable que ce résultat soit fortement lié à l'unicité des solutions ayant une masse de Dirac pour donnée initiale [13],[27].

Pour de petites données initiales, cette asymptotique était déjà connue, *confer* [29] et [13]. En outre, pour des données petites et localisées, ce résultat peut être nettement précisé. En fait, les mêmes auteurs ont construits pour de telles données initiales des variétés centrales leur permettant de réduire l'analyse asymptotique *à tout ordre* des solutions de (1.15) à celle d'équations différentielles en dimension finie [26]. Ainsi, ils obtiennent lorsque ω_0 est petit[26] et tel que $(1+|x|)^{3/2}\omega_0(x)$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^2)$, l'asymptotique, quand $t \to \infty$,

$$\omega\big(t,x\big) \approx \alpha\,\omega^G(t,x) - \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\beta_1\,\frac{x_1}{\sqrt{(\mu/\rho_0)\,t}} + \beta_2\,\frac{x_2}{\sqrt{(\mu/\rho_0)\,t}}\right)\omega^G(t,x) \quad (1.25)$$

à l'ordre $o\,(t^{-(1-1/p+1-\varepsilon)})$, pour tout $\varepsilon > 0$ et dans n'importe quel espace de Lebesgue $L^p(\mathbf{R}^2)$, avec, comme précédemment,

$$\alpha \;=\; \frac{\rho_0}{\mu}\int_{\mathbf{R}^2}\omega_0\,(x)\,dx\;, \qquad \text{et} \qquad \beta_i \;=\; -\left(\frac{\rho_0}{\mu}\right)^{3/2}\int_{\mathbf{R}^2} x_i\,\omega_0\,(x)\,dx$$

pour $i = 1,2$. À l'instar de la circulation, mais de manière plus surprenante, les premiers moments de la vorticité, qui apparaissent ici, sont des quantités préservées par l'évolution ! Si la circulation α est non nulle, on fait alors disparaître les premières corrections dans (1.25) en choisissant mieux le centre[27] du tourbillon d'Oseen par lequel on approche la solution. En revanche, lorsque la circulation est nulle, mais que les premiers moments de la vorticité ω_0 ne sont pas tous deux nuls, ce sont ces *corrections* qui dominent

[26] Cette petitesse dépend du choix de ε.

[27] Jusqu'ici nous les avions toujours centrés en l'origine pour qu'ils soient auto-similaires au sens défini plus haut.

et l'on ne peut les faire disparaître. C'est *a priori* le comportement générique quand le tourbillon initial ω_0 est bien localisé et que la vitesse initiale u_0 est de carré intégrable. Notons toutefois que, pour des vorticités bien localisées[28], de même que u_0 de carré intégrable impose $\alpha = 0$, u_0 intégrable implique $\beta_i = 0$, pour $i = 1, 2$.

1.3 Des problèmes traités

Maintenant que nous avons présenté sommairement les modèles mis en jeu et décrit assez précisément le comportement des solutions à densité constante, nous pouvons plus commodément poser les questions que nous allons traiter par la suite.

Le théorème 1.1, simple et élégant, a l'inconvénient de ne fournir aucune estimation du temps nécessaire à la solution pour atteindre un voisinage du tourbillon d'Oseen à partir d'une donnée initiale (intégrable) quelconque. La démonstration proposée dans [27] est d'ailleurs non constructive, car elle repose en partie sur un argument de compacité. Il est cependant souhaitable de préciser le temps nécessaire pour atteindre le régime asymptotique auto-similaire, en particulier si l'on envisage d'établir un résultat semblable pour des écoulements en domaine borné. Dans ce cas, il est clair en effet que, compte tenu de la diffusion, le comportement de la solution ne pourra être décrit par le tourbillon d'Oseen que pour des temps inférieurs à $(L^2\rho_0)/\mu$, où L désigne la taille caractéristique du domaine. Le régime auto-similaire ne pourra donc être observé que de façon transitoire, et à condition qu'il s'établisse suffisamment rapidement. On se convainc aisément qu'il n'est pas possible de préciser la vitesse de convergence dans (1.23) sans hypothèse de confinement sur la donnée initiale. Notre premier objet de préoccupation va donc être d'obtenir une estimation du temps nécessaire à la solution pour atteindre un voisinage du tourbillon d'Oseen à partir d'une donnée initiale arbitraire, mais bien localisée en espace. Nous obtiendrons ainsi une borne supérieure sur le temps de vie de la turbulence bidimensionnelle libre, en fonction du nombre de Reynolds de la donnée initiale, puisque dans un voisinage des tourbillons d'Oseen les écoulements sont laminaires.

Après cela, nous allons surtout essayer de retrouver cette dynamique asymptotique homogène dans le comportement en temps long des fluides faiblement inhomogènes. Le système incompressible inhomogène (1.7) possède également une invariance d'échelle. Toutefois, alors que ω vérifie encore une équation parabolique, la densité ρ satisfait à une équation de transport par un champ de vitesse à divergence nulle, et est donc formellement constante

[28] Pour la première implication, ω_0 mesure finie suffit ; pour la seconde, $(1 + |x|)\,\omega_0$ mesure finie suffit. Ce sont également les conditions qui permettent de donner un sens à α et aux β_i.

en loi[29]. Le mieux que l'on puisse espérer est donc que la densité étant initialement proche d'une constante, elle le reste, et que la vorticité ω soit asymptotique à celle du tourbillon d'Oseen. C'est ce que nous allons établir pour des données initiales (ρ_0, ω_0) telles que ρ_0 soit une perturbation localisée d'une constante et que la vorticité ω_0 soit ou bien petite et localisée ou bien une perturbation localisée de la vorticité d'un tourbillon d'Oseen. Évidemment, avec de telles hypothèses, nous obtenons également une vitesse de convergence. Ainsi, dans le cas incompressible, nous retrouverons la dynamique homogène pour des données initiales petites et nous montrerons la stabilité asymptotique des tourbillons d'Oseen, et ce même pour de grands nombres de Reynolds.

Le cas compressible est plus délicat. Contrairement au cas incompressible, il n'y est pas même aisé de montrer qu'une densité initialement proche d'une constante le reste. En contre-partie, rien n'empêche non plus que la densité soit asymptotiquement constante. Par ailleurs, on peut espérer que l'évolution lisse ou amortisse les oscillations de la densité. Plus nuisible est le fait que l'on ne dispose pas d'une invariance d'échelle. Il existe en effet une compétition d'échelle entre le système compressible irrotationnel, associé à des ondes de compression qui partent à l'infini à l'échelle t et l'équation incompressible associé à une diffusion à l'échelle $\sqrt{t}$. Ces ondes partant à l'infini détruisent également tout espoir de travailler avec des solutions localisées. Nous n'allons pas être capables de retrouver l'asymptotique *générale* donnée par des tourbillons d'Oseen. Cependant, en adaptant l'étude de David Hoff et Kevin Zumbrun [32], nous serons capables de retrouver le comportement asymptotique, donné par (1.23) (avec $\alpha = 0$), des petites solutions ayant une vitesse de carré intégrable. Pour de telles solutions, nous allons montrer que la densité est asymptotiquement constante, que la partie irrotationnelle de la vitesse décroît plus vite que la partie incompressible[30], et que la partie incompressible de la vitesse a une asymptotique du type (1.23), et cela dans $L^q(\mathbf{R}^2)$, pour $2 < q \leq \infty$. À l'instar de David Hoff et Kevin Zumbrun, nous allons en revanche montrer que ce sont les ondes de compression qui dominent dans $L^q(\mathbf{R}^2)$, lorsque $1 < q < 2$.

[29] Au sens des probabilités.

[30] Lorsque dans (1.25), β_1 ou β_2 est non nul.

Première partie

Fluides à densité constante

Chapitre 2

Introduction à la première partie

Nous savons que toutes les solutions de l'équation de Navier-Stokes dans le plan $\mathbf{R}^2$ dont le tourbillon initial est une mesure finie convergent, lorsque $t \to \infty$, vers un écoulement auto-similaire appelé tourbillon d'Oseen. Dans cette partie, nous obtenons une estimation du temps nécessaire à la solution pour atteindre un voisinage du tourbillon d'Oseen à partir d'une donnée initiale intégrable arbitraire, mais bien localisée en espace. Nous établissons ainsi une borne supérieure sur le temps de vie de la turbulence bidimensionnelle libre, en fonction du nombre de Reynolds de la donnée initiale. Deux cas particuliers sont discutés plus en détail : celui des solutions à tourbillon positif, et celui des petites perturbations d'un tourbillon d'Oseen.

Par commodité d'écriture, nous noterons $\nu = \mu/\rho_0$, où $\mu > 0$ est le coefficient de Lamé de cisaillement et $\rho_0 > 0$ la densité du fluide. Rappelons qu'alors l'évolution temporelle du tourbillon ω est déterminée par l'équation

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega \quad = \quad \nu \triangle \omega \ , \tag{2.1}$$

où le champ de vitesse u est reconstruit à partir du tourbillon par la loi de Biot-Savart :

$$u(t,x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\, \omega(t,y)\, dy \ . \tag{2.2}$$

À toute donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$ correspond une unique solution globale $\omega \in C^0([0,+\infty[, L^1(\mathbf{R}^2)) \cap C^0(]0,+\infty[, L^\infty(\mathbf{R}^2))$ du système homogène (2.1), (2.2) [3, 9]. Nous avons également vu avec le théorème 1.1 [27] que cette solution converge lorsque $t \to \infty$ vers un écoulement auto-similaire appelé *tourbillon d'Oseen* et donné par les formules suivantes :

$$\omega(t,x) \ = \ \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\Big) \ , \quad u(t,x) \ = \ \alpha \sqrt{\frac{\nu}{t}}\, v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\Big) \ , \tag{2.3}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$ est un paramètre sans dimension et

$$G(\xi) \;=\; \frac{1}{4\pi}\, e^{-|\xi|^2/4}, \quad v^G(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\, \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\Big(1 - e^{-|\xi|^2/4}\Big), \quad \xi \in \mathbf{R}^2 \;. \tag{2.4}$$

S'il est, de toute façon, toujours préférable d'avoir une estimation quantitative sur le temps requis pour observer un phénomène[1], nous avons déjà mentionné au moins deux motivations supplémentaires. La première est qu'en domaine borné, la convergence vers le tourbillon d'Oseen ne peut avoir lieu que de manière transitoire, *avant* que notre solution ait diffusé dans tout le domaine et que les effets de bord jouent un rôle trop important. La seconde est que le régime décrit par le tourbillon d'Oseen est laminaire. En mesurant la convergence vers ce régime, nous obtiendrons donc une borne supérieure sur le temps de vie de la turbulence bidimensionnelle.

On s'en convainc aisément et cela apparaîtra clairement dans l'étude de cas particuliers : il n'est pas possible de préciser la vitesse de convergence dans l'asymptotique (1.23) sans hypothèse de confinement sur la donnée initiale. Par conséquent, nous supposerons dans toute cette partie qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et $t_0 > 0$ tels que la quantité suivante soit finie :

$$D \;=\; \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)| \,\exp\left(\frac{|x-x_0|^2}{8\nu t_0}\right) dx \;<\; \infty\;. \tag{2.5}$$

Cette hypothèse assez restrictive peut *a priori* être assouplie, mais nous l'adoptons ici car elle nous permettra d'utiliser directement les estimations très précises obtenues par Eric A. Carlen et Michael Loss pour ce type de solutions [12]. Rappelons qu'à la donnée initiale ω_0 on associe classiquement un nombre de Reynolds défini comme suit :

$$R \;=\; \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)|\, dx. \tag{2.6}$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cette partie :

Théorème 2.1 *Il existe des constantes strictement positives C_1, C_2 et r telles que, pour toute donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$ remplissant la condition (2.5), la solution du système (2.1),(2.2) vérifie l'estimation*

$$\frac{1}{\nu}\left\|\omega(t,\cdot) - \frac{\alpha}{t+t_0}\, G\Big(\frac{\cdot - x_0}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\Big)\right\|_1 \;\le\; \frac{C_1\, e^{C_2 R^2} D}{\big(\ln(1+t/t_0)\big)^r}\;, \tag{2.7}$$

pour tout $t > 0$, où, comme précédemment,

$$\alpha \;=\; \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\, dx\;, \tag{2.8}$$

et R est donné par (2.6).

[1] Pour éviter les situations du type : théorème de récurrence de Poincaré et paradoxe de Zermelo.

Remarques :

1. Les constantes C_1, C_2, et r sont universelles. En particulier, elles ne dépendent pas de la viscosité cinématique $\nu > 0$. On peut par exemple choisir

$$r = \frac{\tanh(1/2)}{10} \quad .$$

Les deux membres de (2.7) sont par ailleurs invariants d'échelle.

2. Comme nous allons le voir, la norme $L^1(\mathbf{R}^2)$ du tourbillon est une fonction décroissante du temps. Comme, de plus, $|\alpha| \leq R$, l'inégalité triangulaire montre que le membre de gauche de (2.7) est toujours inférieur à $2R$. Par conséquent, l'estimation (2.7) ne devient réellement intéressante que pour des temps suffisamment grands. Néanmoins, elle n'est nullement optimale dans la limite $t \to \infty$: nous avons déjà mentionné à travers (1.25) [26] et nous reverrons dans le dernier chapitre de cette partie qu'une étude locale au voisinage du tourbillon d'Oseen montre en effet que le membre de gauche de (2.7) converge vers zéro comme $t^{-1/2}$, et même comme t^{-1} lorsque x_0 est le centre de gravité de la distribution de vorticité ω_0.

3. Bien entendu, l'estimation (2.7) implique en particulier (1.23). À noter que, sans restreindre la généralité, dans (1.23), on a choisi $x_0 = 0$, $t_0 = 0$. Ici, nous avons avantage à choisir $x_0 \in \mathbf{R}^2$ de façon à minimiser la quantité D. Une bonne solution consiste souvent à choisir pour centre du tourbillon d'Oseen x_0, le centre de gravité de la distribution $|\omega_0|$. Le choix de $t_0 > 0$ est plus délicat, car ce paramètre intervient non seulement dans D mais aussi au dénominateur du membre de droite de (2.7). Cette question est discutée plus en détail, dans un cas particulier, dans l'avant-dernier chapitre de cette partie.

4. Nous verrons, en démontrant la proposition 5.1 dans le dernier chapitre, que dans un voisinage du tourbillon d'Oseen le régime est laminaire, dans la mesure où les effets de transport sont négligeables devant la dissipation visqueuse. Le théorème 2.1 fournit donc une borne supérieure sur le temps de vie de la turbulence bidimensionnelle libre en fonction du nombre de Reynolds de la donnée initiale. Cette estimation explose hélas comme $\exp(\exp(CR^2))$ lorsque $R \to \infty$, et n'est probablement pas optimale. On dispose en tout cas d'une bien meilleure borne pour les solutions à tourbillon positif, comme nous le démontrerons dans l'avant-dernier chapitre.

Avant d'entrer dans le cœur de cette partie, esquissons sommairement la démonstration du théorème 1.1 [27]. Par un argument de compacité, les auteurs réduisent le problème à l'étude de l'ensemble ω-limite associé à une solution. Ensuite, ils montrent que cet ensemble ω-limite ne contient que des tourbillons de signe constant, puisque la norme $L^1(\mathbf{R}^2)$ d'une solution décroît strictement quand la vorticité initiale n'est pas de signe constant. Enfin, ils traitent le cas des tourbillons de signe constant grâce à une entropie relative, c'est-à-dire en exhibant une fonction de Lyapunov qui contrôle la distance au tourbillon d'Oseen. Pour les solutions de signe constant, le théorème 2.1 peut être démontré par cette méthode d'entropie.

Revenons à l'argument réduisant le théorème 1.1 au cas de signe constant à savoir la décroissance de la norme $L^1(\mathbf{R}^2)$. Soient ω_0 une donnée initiale et ω la solution correspondante. On peut décomposer ω_0 en sa partie positive $\omega_0^+ \geq 0$ et sa partie négative $\omega_0^- \geq 0$. Considérons alors le champ de vitesse total u comme donné, et associons aux données initiales ω_0^+, ω_0^-, les solutions respectives ω_+ et ω_- de l'équation linéaire (2.1). À cette équation correspond un principe du maximum. Ainsi, on a $\omega_+ \geq 0$, $\omega_- \geq 0$, et par linéarité $\omega = \omega_+ - \omega_-$. Par ailleurs, comme u est à divergence nulle, l'équation (2.1) préserve l'intégrale. D'où, grâce à l'inégalité triangulaire, pour tout temps $t \geq 0$

$$\| \omega(t) \|_1 = \| (\omega_+ - \omega_-)(t) \|_1 \leq \int_{\mathbf{R}^2} (\omega_+ + \omega_-)(t) = \int_{\mathbf{R}^2} (\omega_0^+ + \omega_0^-) = \| \omega_0 \|_1 \,.$$

Ainsi la norme $L^1(\mathbf{R}^2)$ de ω décroît au cours du temps et la *perte de masse* ne peut être due qu'au recouvrement des supports de ω_+ et ω_-. Ces supports sont initialement disjoints mais le principe du maximum fort implique qu'il se recoupent pour tout temps ultérieur. Pour quantifier la décroissance de la norme $L^1(\mathbf{R}^2)$, il faut mesurer ce recouvrement, donc d'une part suivre ces supports, c'est-à-dire connaître le support initial de ω et son évolution *via* une borne supérieure sur le noyau intégral Γ_u de l'équation linéaire (2.1), où u est considéré comme donné ; d'autre part, estimer l'étalement par diffusion *via* une *borne inférieure* sur Γ_u. C'est précisément ce que font Eric A. Carlen et Michael Loss dans [12].

Dans le cas particulier des solutions à moyenne nulle, c'est-à-dire telles que $\alpha = 0$, le théorème 2.1 est ainsi démontré dans l'article d'Eric Carlen et Michael Loss [12, théorème 7]. Comme nous le montrerons dans le chapitre suivant, le cas général s'obtient en combinant de façon appropriée la méthode d'entropie relative utilisée dans [27] avec les estimations de recouvrement établies dans [12]. Dans l'avant dernier chapitre, nous rappelons que la méthode d'entropie fournit un résultat bien meilleur que (2.7) dans le cas des solutions à tourbillon positif, et nous discuterons sur cet exemple le choix optimal des paramètres $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et $t_0 > 0$. Afin de présenter une vision complète du problème et de préparer l'étude des fluides incompressibles inhomogènes, sont incluses également, dans le dernier chapitre, les estimations optimales de décroissance temporelle pour les perturbations du tourbillon d'Oseen.

Observations : Il nous faut porter au crédit de Cédric Villani d'avoir inspiré l'introduction de l'entropie relative dans [27] et signalé l'excellent [12]. Observons également que la première partie de ce mémoire, consacrée aux écoulements homogènes, a donné lieu à la soumission d'un article conjointement avec Thierry Gallay.

Chapitre 3

Estimation du temps de vie de la turbulence

Ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème 2.1. Nous supposons donc que ω est une solution de l'équation (2.1) dont la donnée initiale ω_0, intégrable, vérifie (2.5) pour un $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et un $t_0 > 0$. Sans restreindre la généralité, nous supposons également que la quantité $\alpha = \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0$ est strictement positive. En effet, si $\alpha = 0$, l'estimation (2.7) est établie dans [12, théorème 7] ; tandis que, si $\alpha < 0$, on peut remplacer $\omega(t, x_1, x_2)$ par $-\omega(t, x_2, x_1)$ qui est encore une solution de (2.1), et on est ainsi ramené au cas où $\alpha > 0$.

Pour changer le tourbillon d'Oseen en une solution stationnaire et confiner le processus diffusif, en nous inspirant de l'invariance d'échelle[1] et en suivant la démarche de [26], nous introduisons les *variables auto-similaires*

$$(\tau, \xi) \quad = \quad \left(\ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right), \frac{x - x_0}{\sqrt{\nu(t + t_0)}} \right) , \tag{3.1}$$

et nous exprimons le tourbillon ω et le champ de vitesse u dans ces nouvelles variables en définissant w, v par

$$\omega(t, x) \quad = \quad \frac{1}{t + t_0}\, w\left(\ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right), \frac{x - x_0}{\sqrt{\nu(t + t_0)}} \right) , \tag{3.2}$$

$$u(t, x) \quad = \quad \sqrt{\frac{\nu}{t + t_0}}\, v\left(\ln\left(1 + \frac{t}{t_0}\right), \frac{x - x_0}{\sqrt{\nu(t + t_0)}} \right) . \tag{3.3}$$

Notons que les variables ξ, τ ainsi que les fonctions transformées d'échelle w, v sont sans dimension. L'évolution temporelle du tourbillon w est donnée par l'équation

$$\partial_\tau w \; + \; v \cdot \nabla_\xi w \; = \; \mathcal{L}\, w , \tag{3.4}$$

[1] Cela nous permet de garder une équation autonome.

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de Fokker-Planck

$$\mathcal{L} \;=\; \triangle_\xi + \frac{\xi}{2}\cdot\nabla_\xi + 1 \;, \tag{3.5}$$

et donc le générateur de la chaleur en formulation auto-similaire. En outre, la vitesse $v(\tau,\xi)$ est encore reconstruite à partir du tourbillon $w(\tau,\xi)$ par la loi de Biot-Savart (2.2). Par construction, ce dernier a pour condition initiale $w(0,\xi) = w_0(\xi)$, où $w_0(\xi) = t_0\,\omega_0(x_0 + \xi\sqrt{\nu t_0})$. En particulier, on a

$$\alpha \;=\; \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} w_0(\xi)\,d\xi \;,$$

et de même $R = \nu^{-1}\|\,\omega_0\,\|_1 \;=\; \|\,w_0\,\|_1$. Par ailleurs, on obtient également

$$D \;=\; \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)|\,\exp\left(\frac{|x-x_0|^2}{8\nu t_0}\right)dx \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} |w_0(\xi)|\,e^{\frac{|\xi|^2}{8}}\,d\xi \;.$$

Énumérons à présent quelques estimations *a priori* sur les solutions de l'équation (3.4) qui résultent directement des bornes pour l'équation originale (2.1).

1. Pour tout $\tau \ge 0$, on a $\|\,w(\tau)\,\|_1 \le \|\,w_0\,\|_1$.

2. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\|\,w(\tau)\,\|_\infty \;\le\; \frac{1}{4\pi a(\tau)}\;\|\,w_0\,\|_1 \;, \tag{3.6}$$

où $a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$, *confer* [12, théorème 1]. Comme nous le verrons dans l'appendice consacré à la loi de Biot-Savart, ceci implique [12, théorème 2]

$$\|\,v(\tau)\,\|_\infty \;\le\; \left(\frac{2}{\pi}\;\|\,w(\tau)\,\|_\infty\;\|\,w(\tau)\,\|_1\right)^{1/2} \;\le\; \frac{1}{\sqrt{2}\pi a(\tau)^{1/2}}\;\|\,w_0\,\|_1 \;. \tag{3.7}$$

3. Pour tout $\beta \in \,]0,1[\,$, on a l'estimation ponctuelle

$$|w(\tau,\xi)| \;\le\; \frac{C_\beta(R)}{4\pi a(\tau)}\int_{\mathbf{R}^2}\exp\left(-\beta\,\frac{|\xi-\eta\,e^{-\tau/2}|^2}{4a(\tau)}\right)|w_0(\eta)|\,d\eta \;, \tag{3.8}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2$ et tout $\tau > 0$, où $C_\beta(R) = \exp(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{R^2}{2\pi^2})$, *confer* [12, théorème 3]. Si on choisit $\beta \in]\frac{1}{2},1[$, alors un calcul direct à partir de (3.8) montre que, pour tout $\tau > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} |w(\tau,\xi)|\,e^{|\xi|^2/8}\,d\xi \;&\le\; \frac{C_\beta(R)}{\beta - a(\tau)/2}\int_{\mathbf{R}^2}\exp\left(\frac{\beta|\eta|^2\,e^{-\tau}}{8\beta-4a(\tau)}\right)|w_0(\eta)|\,d\eta \\ &\le\; \frac{C_\beta(R)}{\beta-1/2}\int_{\mathbf{R}^2}|w_0(\xi)|\,e^{|\xi|^2/8}\,d\xi \;. \end{aligned}\tag{3.9}$$

Dans la seconde inégalité, on a utilisé $\beta > 1/2$ et $a(\tau) = 1 - e^{-\tau} < 1$. Les inégalités (3.8) et (3.9) sont les estimations de confinement mentionnées plus haut.

Nous arrivons à présent à l'étape principale de la démonstration, qui consiste à décomposer la solution w de (3.4) en une somme $w_1 + w_2$, où $w_1(\tau, \cdot)$ est *à moyenne nulle* et w_2 est *positive*. Plus précisément, nous décomposons la donnée initiale w_0 en une somme $w_{10} + w_{20}$ en choisissant, par exemple,

$$w_{20} \;=\; \alpha\, G \;, \quad w_{10} \;=\; w_0 - \alpha\, G \;,$$

puis on définit w_i pour $i = 1, 2$ comme la solution du problème

$$\partial_\tau w_i + v \cdot \nabla w_i \;=\; \mathcal{L}\, w_i \;, \quad w_i(0, \xi) \;=\; w_{i0}(\xi) \;, \tag{3.10}$$

le champ de vitesse total v étant considéré comme donné. Les estimations *a priori* (3.6)–(3.9) restent valables pour les solutions w_1, w_2 de (3.10). Notons qu'avec notre choix de données initiales, on trouve $R_2 = \|\, w_{20} \,\|_1 = \alpha \le R$, et donc $R_1 = \|\, w_{10} \,\|_1 \le 2R$. De même, après avoir observé que l'on a $D_2 = \int_{\mathbf{R}^2} |w_{20}(\xi)|\, e^{|\xi|^2/8}\, d\xi = 2\alpha$, on montre

$$D_1 \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} |w_{10}(\xi)|\, e^{|\xi|^2/8}\, d\xi \;\le\; D + 2\alpha \;\le\; 3D \;.$$

La solution w_1 étant à moyenne nulle, on peut lui appliquer le résultat de Carlen et Loss [12, théorème 7] qui avec nos notations conduit à la

Proposition 3.1 (Carlen & Loss, 1995 [12]) *Il existe des constantes — strictement positives et indépendantes de w_0 — C_3, C_4 et γ telles que*

$$\|\, w_1(\tau) \,\|_1 \;\le\; \frac{\|\, w_{10} \,\|_1}{\left[1 + \gamma\, K(R)\, \tau \left(\frac{\|\, w_{10} \,\|_1}{D_1}\right)^{\gamma}\right]^{1/\gamma}} \;, \tag{3.11}$$

pour tout $\tau \ge 1$, où $K(R) = C_3\, e^{-C_4 R^2}$.

La démonstration de cette proposition repose sur l'idée suivante déjà exposée. Étant donné que la solution w_1 est à moyenne nulle, on peut l'écrire comme la somme d'une partie positive et d'une partie négative, de même masse, qui évoluent toutes deux selon l'équation de transport-diffusion (3.10). Les supports de ces deux solutions sont initialement disjoints, mais le principe du maximum fort implique qu'ils se recouvrent pour tout $\tau > 0$, ce qui entraîne une diminution de la norme $L^1(\mathbf{R}^2)$ de $w_1(\tau)$. Cette perte peut être quantifiée si l'on dispose d'une borne *inférieure* sur le noyau intégral de l'opérateur d'évolution associé à l'équation (3.10), ainsi que d'une estimation de la forme (3.9) garantissant que la solution reste bien localisée pour tous les temps. On obtient ainsi la borne (3.11), et les constantes universelles C_3, C_4, γ peuvent être déterminées explicitement. Par exemple, on peut choisir

$$\gamma \;=\; 5\Bigl(\frac{e+1}{e-1}\Bigr) \;=\; \frac{5}{\tanh(1/2)}\;.$$

Sans dommage, nous pouvons supposer dans la suite que $C_3 \le 1/2$, de sorte que $K(R) \le 1/2$.

Il reste à montrer que $w_2(\tau)$, la partie positive dans notre décomposition du tourbillon $w(\tau)$, converge vers $\alpha\, G$ lorsque $\tau \to \infty$. Nous appliquons pour cela la méthode d'entropie relative, bien connue des cinéticiens mais introduite dans ce contexte dans l'article [27]. Si $w \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ est une fonction strictement positive telle que $\int_{\mathbf{R}^2} w = \alpha$, on note

$$H(w) \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} w\, \ln\Bigl(\frac{w}{\alpha\, G}\Bigr)\;, \quad I(w) \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} w\, \Bigl|\nabla \ln\Bigl(\frac{w}{\alpha\, G}\Bigr)\Bigr|^2\;. \tag{3.12}$$

On a alors les estimations suivantes [2]

$$\frac{1}{2\,\alpha}\,\|\, w - \alpha\, G\,\|_1^2 \;\le\; H(w) \;\le\; I(w)\;, \tag{3.13}$$

qui montrent en particulier que $H(w) \ge 0$ avec égalité si et seulement si $w = \alpha\, G$. La borne inférieure sur H dans (3.13) est l'inégalité de Csiszár-Kullback, alors que la borne supérieure est une variante de l'inégalité de Sobolev logarithmique.

L'idée est maintenant d'étudier l'évolution temporelle de $H(w_2(\tau))$. Un calcul direct [27] montre que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} H(w_2(\tau)) \;&=\; -I(w_2(\tau)) \;+ \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} (\xi \cdot v(\tau,\xi))\;\; w_2(\tau,\xi)\, d\xi \\ &\le\; -H(w_2(\tau)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} (\xi \cdot v_1(\xi,\tau))\; w_2(\xi,\tau)\, d\xi\;,\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $v_1(\tau)$ désigne le champ de vitesse obtenu à partir de $w_1(\tau)$ par la loi de Biot-Savart (2.2). Outre (3.13), on a utilisé ici le fait que, si $v_2 = K_{BS} \star w_2$,

$$\int_{\mathbf{R}^2} (\xi \cdot v_2(\tau,\xi))\, w_2(\tau,\xi)\, d\xi = 0\;,$$

ce qui constitue l'observation-clef permettant d'appliquer la méthode d'entropie relative à l'équation de Navier-Stokes. Comme $H(w_{20}) = H(\alpha\, G) = 0$, l'inégalité précédente (3.14) s'intègre facilement et conduit à l'estimation

$$H(w_2(\tau)) \;\le\; \frac{1}{2}\int_0^\tau e^{-(\tau-s)}\|\, v_1(s)\,\|_\infty\, \|\, |\cdot|\, w_2(s)\,\|_1\, ds\;. \tag{3.15}$$

Or, les bornes *a priori* rappelées ci-dessus montrent que

$$\|\, v_1(s)\,\|_\infty \;\le\; \begin{cases} C\, a(s)^{-1/2}\|\, w_{10}\,\|_1 & \text{si} \quad 0 < s \le 2 \\ C\,\|\, w_1(s-1)\,\|_1 & \text{si} \qquad s \ge 2 \end{cases}\;, \tag{3.16}$$

où $\| w_1(s-1) \|_1$ se majore à l'aide de la proposition 3.1. Par ailleurs, en utilisant les bornes ponctuelles établies dans [12, théorème 3], on vérifie sans peine que

$$\begin{aligned} \| \, | \cdot | \, w_2(s) \|_1 &\leq e^{-s/2} \| \, | \cdot | \, w_{20} \|_1 + C\,(1+R)\,a(s)^{1/2} \| w_{20} \|_1 \\ &\leq C\,\alpha\,(1+R). \end{aligned} \tag{3.17}$$

En intégrant (3.16) et (3.17) dans (3.15), et en utilisant la proposition 3.1 ainsi que le lemme élémentaire ci-dessous, on arrive à l'estimation

$$H(w_2(\tau)) \leq \frac{C\alpha\,(1+R) \| w_{10} \|_1}{\left[1 + \gamma\,K(R)\,\tau \left(\frac{\| w_{10} \|_1}{D_1}\right)^{\gamma}\right]^{1/\gamma}} , \qquad \tau \geq 0 . \tag{3.18}$$

Lemme 3.2 *Si* $0 \leq K \leq 1/2$ *et* $\gamma > 0$*, on a :*

$$\int_0^\tau e^{-(\tau-s)} \frac{1}{(1+\gamma K s)^{1/\gamma}}\,ds \leq \frac{1+2^{1/\gamma}}{(1+\gamma K \tau)^{1/\gamma}} , \quad \text{pour tout } \tau \geq 0 .$$

Démonstration. On a d'une part

$$\int_0^{\tau/2} e^{-(\tau-s)} \frac{1}{(1+\gamma K s)^{1/\gamma}}\,ds \leq \int_0^{\tau/2} e^{-(\tau-s)}\,ds \leq e^{-\tau/2} \leq \frac{1}{(1+\gamma K \tau)^{1/\gamma}} ,$$

car $(1+\gamma K \tau)^{-1/\gamma} \geq e^{-K\tau} \geq e^{-\tau/2}$. D'autre part,

$$\int_{\tau/2}^{\tau} e^{-(\tau-s)} \frac{1}{(1+\gamma K s)^{1/\gamma}}\,ds \leq \frac{1}{(1+\gamma K \tau/2)^{1/\gamma}} \leq \frac{2^{1/\gamma}}{(1+\gamma K \tau)^{1/\gamma}} ,$$

ce qui conclut la démonstration de ce lemme. ■

Il est maintenant facile de terminer la démonstration du théorème 2.1. Étant donné que $w(\tau) = w_1(\tau) + w_2(\tau)$, on a

$$\begin{aligned} \| w(\tau) - \alpha\,G \|_1 &\leq \| w_1(\tau) \|_1 + \| w_2(\tau) - \alpha\,G \|_1 \\ &\leq \| w_1(\tau) \|_1 + \sqrt{2\alpha}\,H(w_2(\tau))^{1/2} , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de (3.13). En utilisant les majorations (3.11) et (3.18) et en procédant à quelques simplifications, on obtient, pour tout $\tau \geq 1$,

$$\| w(\tau) - \alpha\,G \|_1 \leq \frac{D_1}{(\gamma K(R)\,\tau)^{1/\gamma}} + C\alpha \frac{(1+R)^{1/2} D_1^{1/2}}{(\gamma K(R)\,\tau)^{1/2\gamma}} \leq \frac{C_5 D (1+R)}{K(R)^{1/\gamma} \tau^{1/2\gamma}} .$$

On peut bien sûr supposer que $C_5 \geq 2$, de telle sorte que cette inégalité reste valide pour tout $\tau > 0$, puisque, par ailleurs, nous savons que l'on a toujours $\| w(\tau) - \alpha\,G \|_1 \leq R + \alpha \leq 2R$. Souvenons-nous de $K(R) = C_3\,e^{-C_4 R^2}$ et retournons maintenant aux variables originales. Nous obtenons alors (2.7) avec $r = 1/(2\gamma)$. Ceci conclut la démonstration du théorème 2.1. □

Chapitre 4

Relaxation des tourbillons positifs

L'estimation *générale* fournie par le théorème 2.1 peut être considérablement améliorée si l'on se restreint aux solutions dont le tourbillon ω est positif. Dans ce cas, en introduisant les variables auto-similaires (3.1) comme dans le chapitre précédent, on s'assure que l'entropie relative $H(w(\tau))$ qui contrôle la distance entre la solution $w(\tau)$ et le point d'équilibre $\alpha\, G$ obéit à l'inégalité différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\, H(w(\tau)) \;=\; -\, I(w(\tau)) \;\leq\; -\, H(w(\tau)) \;, \quad \tau \geq 0 \;.$$

Ainsi $H(w(\tau)) \leq e^{-\tau} H(w_0)$ pour tout $\tau \geq 0$. En revenant aux variables originales, on obtient l'inégalité suivante, valable pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et tout $t_0 > 0$,

$$\mathcal{H}\big(\omega(t)\,|\,\alpha\,\omega^G_{t_0,x_0}(t)\big) \;\leq\; \frac{t_0}{t_0+t}\,\mathcal{H}\big(\omega_0\,|\,\alpha\,\omega^G_{t_0,x_0}(0)\big) \;, \quad t \geq 0 \;, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{H}(f_1\,|\,f_2)$ désigne l'entropie de la distribution f_1 par rapport à f_2,

$$\mathcal{H}(f_1\,|\,f_2) \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} f_1(x)\,\ln\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) dx \;,$$

et $\omega^G_{t_0,x_0}$ est le tourbillon d'Oseen centré au point $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et issu du temps $-t_0$,

$$\omega^G_{t_0,x_0}(t,x) \;=\; \frac{1}{t+t_0}\,G\bigg(\frac{x-x_0}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\bigg) \;.$$

L'objet de ce chapitre est de discuter sur cet exemple le meilleur choix du tourbillon d'Oseen donnant l'asymptotique, c'est-à-dire le choix de t_0 et x_0, pour accélérer la convergence.

Rappelons que le membre de gauche de (4.1) permet d'estimer la distance de la solution $\omega(t)$ au tourbillon $\alpha\,\omega^G_{t_0,x_0}(t)$ en vertu de l'inégalité de Csiszár-Kullback [2]

$$\frac{1}{2\,\nu\,\alpha}\;\|\,\big(\omega-\alpha\,\omega^G_{t_0,x_0}\big)(t)\,\|_1^2\;\;\le\;\;\mathcal{H}(\omega(t)\,|\,\alpha\,\omega^G_{t_0,x_0}(t))\;.$$

D'autre part, le membre de droite de (4.1) s'écrit explicitement

$$\frac{t_0}{t_0+t}\int_{\mathbf{R}^2}\omega_0(x)\Big[\ln\Big(\frac{4\pi}{\alpha}\Big)+\ln(t_0\,\omega_0(x))+\frac{|x-x_0|^2}{4\nu t_0}\Big]\,dx\;. \tag{4.2}$$

Cette expression est suffisamment simple pour que l'on puisse chercher à l'optimiser par un choix approprié de x_0 et t_0. Quels que soient t_0 et t, il est évident que la quantité (4.2) est minimale lorsque $x_0\in\mathbf{R}^2$ est le *centre de gravité* de la distribution de vorticité ω_0. Nous ferons donc toujours ce choix dorénavant. Il est toutefois plus délicat de minimiser (4.2) par rapport à t_0, le résultat dépendant en général du temps d'observation t. Cependant, d'emblée, au moins deux choix semblent naturels :

1. On peut minimiser (4.2) pour $t=0$, ce qui revient à choisir $t_0>0$ de façon à minimiser l'entropie relative de la donnée initiale. Le minimum est atteint pour $t_0=t_1$, où

$$t_1\;\;=\;\;\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\omega_0(x)}{\alpha\,\nu}\,\frac{|x-x_0|^2}{4\nu}\,dx\;\;>\;\;0\;.$$

2. Si l'on s'intéresse, en revanche, au comportement à grand temps, on peut remplacer le préfacteur $t_0/(t_0+t)$ dans (4.2) par t_0/t. Le minimum de l'expression ainsi obtenue est atteint pour $t_0=t_2$, où $t_2>0$ est déterminé par la relation

$$\int_{\mathbf{R}^2}\omega_0(x)\Big[1+\ln\Big(\frac{4\pi}{\alpha}\Big)+\ln\Big(t_2\,\omega_0(x)\Big)\Big]\,dx\;\;=\;\;0\;,$$

c'est-à-dire

$$t_2\;\;=\;\;\exp\Big(-\Big[1+\ln\Big(\frac{4\pi}{\alpha}\Big)+\int_{\mathbf{R}^2}\frac{\omega_0(x)}{\alpha\,\nu}\,\ln\big(\omega_0(x)\big)\,dx\Big]\Big)\;.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $0<t_2\le t_1$, et que $t_2=t_1$ si et seulement si la fonction ω_0 est une gaussienne centrée en x_0.

Avec ces choix du paramètre t_0, l'estimation (4.1) fournit les inégalités suivantes :

$$\mathcal{H}\big(\omega(t)\,|\,\alpha\,\omega^G_{t_1,x_0}(t)\big)\;\;\le\;\;\alpha\,\nu\,\frac{t_1}{t_1+t}\,\ln\Big(\frac{t_1}{t_2}\Big)\;, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{H}\big(\omega(t)\,|\,\alpha\,\omega^G_{t_2,x_0}(t)\big)\;\;\le\;\;\alpha\,\nu\,\frac{t_1-t_2}{t_2+t}\;. \tag{4.4}$$

L'estimation (4.3) est optimale pour $t = 0$, alors que (4.4) est optimale dans la limite $t \to \infty$. Notons qu'il existe des données initiales pour lesquelles $t_2 \ll t_1$. Par exemple, avec $\nu = 1$, si ω_0 est la fonction indicatrice de l'union de deux disques de rayon 1 dont les centres sont séparés d'une distance $d > 2$, on trouve que $t_1 = (2 + d^2)/16$ alors que $t_2 = 1/(2e)$.

Pour obtenir une borne particulièrement simple, une autre possibilité consiste à prendre la limite $t_0 \to 0$ dans (4.1), (4.2) :

$$\mathcal{H}\big(\omega(t)\,|\,\alpha\,\omega^G_{0,x_0}(t)\big) \;\le\; \frac{1}{t}\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\,\frac{|x-x_0|^2}{4\nu}\,dx \;=\; \alpha\,\nu\,\frac{t_1}{t}\,. \tag{4.5}$$

En appliquant l'inégalité de Csiszár-Kullback, nous obtenons alors la

Proposition 4.1 *Soit ω_0 une fonction positive et intégrable, de moments d'ordre deux finis, c'est-à-dire telle que $\int_{\mathbf{R}^2} |x|^2\,\omega_0(x)\,dx < \infty$. La solution $\omega(t)$ de l'équation (2.1), de donnée initiale ω_0, vérifie alors, pour tout point $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et tout temps $t > 0$,*

$$\frac{1}{\nu}\,\Big\|\omega(t,\cdot) - \frac{\alpha}{t}\,G\Big(\frac{\cdot - x_0}{\sqrt{\nu t}}\Big)\Big\|_1 \;\le\; \Big(\frac{2\alpha}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\,\frac{|x-x_0|^2}{4\nu t}\,dx\Big)^{1/2}\,, \tag{4.6}$$

où α est donnée par (2.8).

Pour les données initiales positives à support dans un domaine borné fixé, cette estimation montre que le temps nécessaire pour atteindre un petit voisinage du tourbillon d'Oseen est, au pire, proportionnel au carré du nombre de Reynolds R défini par (1.20). Dans ce cas, le résultat est donc bien meilleur que celui du théorème 2.1, qui fournit une borne en $\exp(\exp(CR^2))$.

Chapitre 5

Étude locale au voisinage d'un tourbillon d'Oseen

Le but principal de cette partie est d'estimer le temps nécessaire à une solution intégrable de (2.1) pour s'approcher dans $L^1(\mathbf{R}^2)$ d'un tourbillon d'Oseen à partir d'une donnée initiale *générale.* On peut aussi se demander — mais c'est une autre question – à quelle vitesse la solution converge vers le tourbillon d'Oseen une fois qu'elle se trouve dans un voisinage de celui-ci. Dans cette optique, l'estimation (2.7) n'est de loin pas optimale : nous savons en effet que les petites perturbations du tourbillon d'Oseen décroissent comme $t^{-1/2}$ lorsque $t \to \infty$, et même comme t^{-1} lorsque le centre $x_0 \in \mathbf{R}^2$ du tourbillon d'Oseen est placé au centre de gravité de la distribution de vorticité ω_0, *confer* l'asymptotique (1.25) développée dans l'article [26].

Dans ce chapitre, par souci de complétude et pour préparer la partie suivante, nous rappelons brièvement comment sont obtenus ces résultats optimaux. Comme précédemment, nous travaillons sur la formulation (3.4) en variables auto-similaires, et supposons que le tourbillon $w_0(\xi)$ décroît très rapidement lorsque $|\xi| \to \infty$. Cette hypothèse simplifie la démonstration, mais peut être assouplie [27]. Nous manipulerons donc des espaces à poids gaussiens, c'est-à-dire, pour $1 \leq p \leq \infty$, les espaces

$$L^p_w(\mathbf{R}^2) \;\; = \;\; \{\ f \mid G^{-\frac{1}{2}} f \in L^p(\mathbf{R}^2)\ \}$$

de normes $|\, f\, |_{w,p} = \|\, G^{-\frac{1}{2}} f \,\|_p$, où G est donné par (2.4). Introduisons ainsi l'espace de Hilbert $X = L^2_w(\mathbf{R}^2)$, muni de la norme $\|\cdot\|_X = |\cdot|_{w,2}$ et du produit scalaire

$$(w_1\, ,\, w_2)_X \;\; = \;\; \int_{\mathbf{R}^2} G(\xi)^{-1}\; w_1(\xi)\; w_2(\xi)\; d\xi\ .$$

Définissons également les sous-espaces fermés

$$\begin{aligned}
X_0 &= \left\{ w \in X \,\Big|\, \int_{\mathbf{R}^2} w(\xi)\, d\xi = 0 \right\} , \\
X_1 &= \left\{ w \in X_0 \,\Big|\, \int_{\mathbf{R}^2} \xi_i\, w(\xi)\, d\xi = 0 \,, \text{ pour } i = 1, 2 \right\} .
\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que l'espace X s'injecte dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ pour tout $p \in [1, 2]$. En outre, on peut montrer que l'équation (3.4) est globalement bien posée dans X [28], et que les sous-espaces X_0, X_1 sont laissés invariants par l'évolution. Il en va de même, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, des sous-espaces affines $\alpha\, G + X_0$ et $\alpha\, G + X_1$.

Proposition 5.1 *Il existe une constante strictement positive δ telle que, pour tout paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$ et pour toute donnée initiale $w_0 \in \alpha\, G + X_0$ telle que $\| w_0 - \alpha\, G \|_X \le \delta$, la solution w de (3.4) associée à w_0 vérifie*

$$\| w(\tau) - \alpha\, G \|_X \;\le\; \| w_0 - \alpha\, G \|_X \;\; \min\left(1 \,,\, 2\, e^{-\kappa\tau}\right) \,, \quad \tau \ge 0 \,, \tag{5.1}$$

où $\kappa = 1$ si $w_0 - \alpha\, G \in X_1$ et $\kappa = 1/2$ sinon.

En termes des variables originales, la proposition 5.1 implique le résultat suivant. Si la donnée initiale ω_0 est telle que

$$\frac{t_0}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} \left| \omega_0(x) - \frac{\alpha}{t_0}\, G\!\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{\nu t_0}} \right) \right|^2 \exp\left(\frac{|x - x_0|^2}{4\nu t_0} \right) dx \;\le\; \delta^2 \;,$$

où $x_0 \in \mathbf{R}^2$, $t_0 > 0$, et $\alpha \in \mathbf{R}$ est donné par (2.8), la solution de l'équation (2.1) vérifie

$$\frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} \left| \omega_0(x) - \frac{\alpha}{t + t_0}\, G\!\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{\nu(t + t_0)}} \right) \right| dx \;\le\; \frac{C_6\, \delta}{(1 + t/t_0)^{\kappa}} \;, \quad t \ge 0 \;,$$

où $\kappa = 1$ si x_0 est le centre de masse de ω_0, et $\kappa = 1/2$ sinon.

Démonstration. Pour exploiter le fait que nous travaillons dans une voisinage du tourbillon d'Oseen, écrivons l'équation vérifiée par la perturbation de ce tourbillon $\widetilde{w}(\tau) = w(\tau) - \alpha\, G$:

$$\partial_\tau\, \widetilde{w} \;+\; \widetilde{v} \cdot \nabla \widetilde{w} \;=\; (\mathcal{L} - \alpha\, \Lambda)\, \widetilde{w} \;, \tag{5.2}$$

où $\widetilde{v}(\tau)$ est le champ de vitesse obtenu à partir de $\widetilde{w}(\tau)$ par la loi de Biot-Savart, $\mathcal{L}$ est l'opérateur différentiel défini par (3.5), et Λ est l'opérateur intégro-différentiel suivant

$$\Lambda f \;=\; v^G \cdot \nabla f \;+\; (K_{BS} \star f) \cdot \nabla G \;.$$

Λ est donc l'opérateur non-local d'ordre 1 résultant de la linéarisation du terme de convection de (3.4) autour de $w = G$. Autrement dit, si $\widetilde{v} = K_{BS}\star\widetilde{w}$ et $v = K_{BS} \star w$, on a $v \cdot \nabla w = \Lambda\widetilde{w} + \widetilde{v} \cdot \nabla\widetilde{w}$. L'intérêt de travailler dans l'espace de Hilbert X est que l'opérateur $\mathcal{L}$ y est auto-adjoint, avec $\mathcal{L} \leq -1/2$ sur le sous-espace X_0 et $\mathcal{L} \leq -1$ sur X_1 [26]. En outre, l'opérateur Λ est antisymétrique dans le même espace X [27].

Arrêtons le cours de notre démonstration pour démontrer ces faits qui nous resserviront dans la partie suivante. Un calcul direct montre que

$$\mathrm{L} \;=\; G^{-\frac{1}{2}}\,(-\mathcal{L})\,G^{\frac{1}{2}} \;=\; -\triangle + \frac{|\cdot|^2}{16} - \frac{1}{2}\,. \tag{5.3}$$

Nous transformons ainsi l'opérateur négatif $\mathcal{L}$ sur X en un oscillateur harmonique L sur $L^2(\mathbf{R}^2)$. Il n'est pas difficile d'en déduire que les spectre de l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}$ est constitué de valeurs propres de multiplicité finie, situées en les demi-entiers $\{0, -1/2, -1, -3/2, \cdots\}$. De plus, 0 est une valeur propre simple associée au vecteur propre $G^{\frac{1}{2}}$, et $-1/2$ une valeur propre double associée aux vecteurs propres $\xi_i\, G(\xi)^{\frac{1}{2}}$, pour $i = 1, 2$. Or X_0 est le sous-espace orthogonal à $G^{\frac{1}{2}}$ et X_1 celui orthogonal à l'espace engendré par $G^{\frac{1}{2}}$ et $\xi_i\, G(\xi)^{\frac{1}{2}}$, pour $i = 1, 2$. D'où les assertions précédentes concernant l'opérateur $\mathcal{L}$.

Quant à l'antisymétrie de Λ, commençons par remarquer que puisque $v^G(\xi)$ est orthogonal à $\nabla G(\xi)^{-1} = G^{-1}\,\frac{\xi}{2}$ en tout point $\xi \in \mathbf{R}^2$, et que v^G est à divergence nulle, d'une intégration par parties découle

$$(\widetilde{w}\,,\, v^G \cdot \nabla\widetilde{w})_X \;=\; -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} G(\xi)^{-1}\,\frac{\xi}{2}\,\cdot\, v^G(\xi)\,\widetilde{w}(\xi)^2\,d\xi \;=\; 0\,.$$

Par ailleurs, en exploitant la formule explicite (2.2) pour $\widetilde{v} = K_{BS} \star \widetilde{w}$ et l'identité triviale $\eta^\perp \cdot \xi = -\xi^\perp \cdot \eta$, valable pour tous $\xi, \eta \in \mathbf{R}^2$, on montre également

$$\begin{aligned}
(\widetilde{w}\,,\,\widetilde{v}\cdot\nabla G)_X \;&=\; -\int_{\mathbf{R}^2}\widetilde{w}(\xi)\;\widetilde{v}(\xi)\cdot\frac{\xi}{2}\,d\xi \\
&=\; -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}\widetilde{w}(\xi)\;\frac{(\xi-\eta)^\perp\cdot\xi}{|\xi-\eta|^2}\;\widetilde{w}(\eta)\,d\eta\,d\xi \\
&=\; \frac{1}{4\pi}\iint_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}\widetilde{w}(\xi)\;\frac{\eta^\perp\cdot\xi}{|\xi-\eta|^2}\;\widetilde{w}(\eta)\,d\eta\,d\xi \\
&=\; -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2}\widetilde{w}(\xi)\;\frac{\xi^\perp\cdot\eta}{|\xi-\eta|^2}\;\widetilde{w}(\eta)\,d\eta\,d\xi \\
&=\; -(\widetilde{w}\,,\,\widetilde{v}\cdot\nabla G)_X\,.
\end{aligned}$$

D'où $(\widetilde{w}\,,\,\widetilde{v}\cdot\nabla G)_X = 0$ puis $(\widetilde{w}\,,\,\Lambda\widetilde{w})_X = 0$.

Ceci posé, reprenons le fil de notre démonstration. Afin de contrôler l'évolution de la perturbation $\widetilde{w}(\tau)$, nous disposons maintenant de l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2 &= (\widetilde{w}(\tau)\,,\,\mathcal{L}\,\widetilde{w}(\tau))_X - \int_{\mathbf{R}^2} G(\xi)^{-1}\widetilde{w}(\tau,\xi)\,\widetilde{v}(\tau,\xi)\cdot\nabla\widetilde{w}(\tau,\xi)\,d\xi \\ &= (\widetilde{w}(\tau)\,,\,\mathcal{L}\,\widetilde{w}(\tau))_X + \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^2} G(\xi)^{-1}(\xi\cdot\widetilde{v}(\tau,\xi))\,\widetilde{w}(\tau,\xi)^2 d\xi, \quad (5.4)\end{aligned}$$

la seconde ligne étant obtenue en intégrant par parties. Pour $\tau > 0$, posons

$$\begin{aligned}E(\tau) &= -(\widetilde{w}(\tau)\,,\,\mathcal{L}\widetilde{w}(\tau))_X \\ &= \|\,\nabla(G^{-1/2}\widetilde{w}(\tau))\,\|_2^2 + \frac{1}{16}\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2 - \frac{1}{2}\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2,\end{aligned}$$

la seconde égalité provenant d'une intégration par parties à partir de (5.3). Pour tout $\tau > 0$, puisque la perturbation $\widetilde{w}(\tau)$ appartient à X_0, on obtient $E(\tau) \geq \kappa\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2$ avec $\kappa = 1$ si $\widetilde{w}(\tau)$ appartient à X_1 et $\kappa = 1/2$ sinon. Il s'ensuit en particulier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau > 0$,

$$\|\,\nabla(G^{-1/2}\widetilde{w}(\tau))\,\|_2^2 \;+\; \|\,|\cdot|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2 \;+\; \|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2 \;\leq\; C\,E(\tau)\;.$$

Or une inégalité de Hölder montre que pour tout $\tau > 0$

$$\left|\int_{\mathbf{R}^2} G(\xi)^{-1}(\xi\cdot\widetilde{v}(\tau,\xi))\widetilde{w}(\tau,\xi)^2\,d\xi\right| \;\leq\; \|\,\widetilde{v}(\tau)\,\|_4\,|\,\widetilde{w}(\tau)\,|_{w,4}\,\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X. \quad (5.5)$$

Comme, de plus, l'étude de la loi de Biot-Savart montre que

$$\|\,\widetilde{v}\,\|_4 \;\leq\; C\,\|\,\widetilde{w}\,\|_{4/3} \;\leq\; C\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X\;,$$

d'une inégalité de Sobolev appliquée à $G^{-1/2}\widetilde{w}(\tau)$ il suit que le membre de droite de (5.5) est borné par $C\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X E(\tau)$. Par conséquent, il existe $C_7 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2 &\leq\; -\,2\;E(\tau)\;(1 - C_7\,\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X) \\ &\leq\; -\,2\;\kappa\;\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2\;(1 - C_7\,\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X)\;, \quad (5.6)\end{aligned}$$

la seconde inégalité étant vraie tant que $C_7\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X \leq 1$. Si l'on suppose maintenant que $\|\,\widetilde{w}(0)\,\|_X \leq \delta = (2C_7)^{-1}$, l'inégalité différentielle (5.6) implique que $\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X \leq \|\,\widetilde{w}(0)\,\|_X \leq \delta$ pour tout $\tau \geq 0$ et que

$$\frac{\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X}{1 - C_7\,\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X} \;\leq\; \frac{\|\,\widetilde{w}(0)\,\|_X}{1 - C_7\,\|\,\widetilde{w}(0)\,\|_X}\;e^{-\kappa\tau}\;, \quad \tau \geq 0\;.$$

D'où l'on déduit $\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X \;\leq\; 2\,\|\,\widetilde{w}(0)\,\|_X\,e^{-\kappa\tau}$, pour tout $\tau \geq 0$. Ceci conclut notre démonstration. ∎

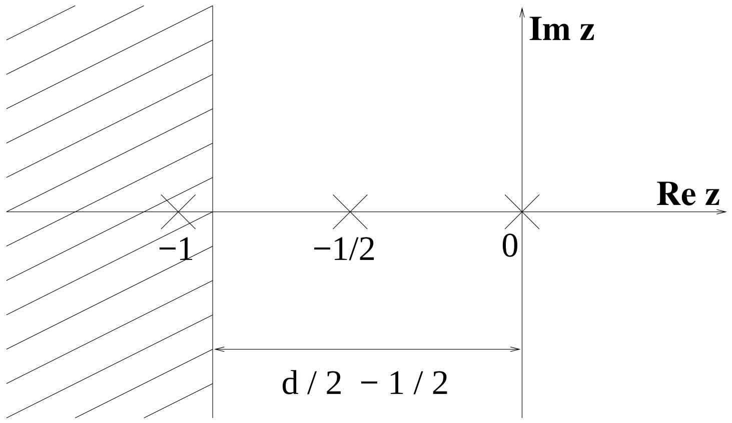

FIG. 5.1 – Spectre de $\mathcal{L}$ sur $L^2(d)$

Remarque : Terminons cette partie par une remarque sur le spectre de $\mathcal{L}$ pour éclairer la nécessité d'une certaine décroissance à l'infini pour pouvoir obtenir une vitesse de convergence vers le tourbillon d'Oseen. Si l'on travaille non plus avec des poids gaussiens mais avec des poids polynomiaux, disons, pour $d \geq 0$, avec l'espace de Hilbert $L^2(d)$ associé à la norme

$$| f |_{p,d} \quad = \quad \| (1 + | \cdot |^2)^{\frac{d}{2}} f \|_2 \ ,$$

au spectre discret déjà décrit vient s'ajouter du spectre essentiel. En fait, dans l'article [26], il est démontré que le spectre de $\mathcal{L}$ sur $L^2(d)$ est

$$\sigma(\mathcal{L}) \quad = \quad \left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; \Re(z) \leq \frac{1}{2} - \frac{d}{2} \right\} \;\cup\; \left\{ -\frac{k}{2} \;\middle|\; k \in \mathbf{N}^+ \right\} .$$

Non seulement la partie réelle du spectre essentiel peut s'approcher aussi près que l'on veut de zéro mais elle peut même être positive[1] !

[1]Évidemment, dans ce cas, d est inférieur à un et $L^2(d)$ ne s'injecte pas dans $L^1(\mathbf{R}^2)$.

Deuxième partie

Fluides incompressibles à densité variable

Chapitre 6

Introduction à la deuxième partie

Nous avons vu que les tourbillons d'Oseen jouent un rôle majeur dans la description du comportement en grand temps des écoulements homogènes bidimensionnels. Premier pas dans l'analyse de la dynamique asymptotique des fluides incompressibles *à densité variable*, cette partie établit la stabilité asymptotique des tourbillons d'Oseen, pour des perturbations localisées de la densité et de la vorticité. Comme corollaire, nous obtiendrons qu'à l'instar de ce qui se passe dans la cas homogène, le comportement des petites solutions faiblement inhomogènes est encore décrit par les tourbillons d'Oseen.

À ma connaissance, assez peu d'ouvrages mathématiques traitent des fluides incompressibles à densité variable. Cependant, le lecteur intéressé pourra encore une fois consulter à profit l'excellent ouvrage de Pierre-Louis Lions [42], mais également compulser un ouvrage plus récent de Franck Boyer et Pierre Fabrie [6]. Citons également les articles de Benoît Desjardins [21, 20], fruits de son travail sur l'existence de solutions faibles, et, plus proche de l'esprit de ce qui suit, le travail de Raphaël Danchin concernant le problème de Cauchy dans les espaces de Besov [18]. Insistons sur le fait que tous ces auteurs travaillent en formulation vitesse. En outre, contrairement aux auteurs cités, nous échapperons aux difficultés techniques liées aux poches de vide ou de quasi vide, puisque nous ne nous intéresserons qu'à des fluides *faiblement* inhomogènes. Nous profiterons ainsi du fait qu'il est aisé de s'assurer que si un fluide *incompressible* est initialement faiblement inhomogène, il le reste pour tout temps ultérieur.

En effet, dorénavant notre densité de masse ρ sera choisie initialement proche d'une constante strictement positive, que nous pouvons supposer égale à un sans restreindre la généralité[1]. De même, pour simplifier l'écriture, nous pouvons supposer, sans heurts, que le coefficient de viscosité μ est égal

[1]Quitte à remplacer la densité ρ par ρ/ρ_0, le coefficient de viscosité de Lamé μ par μ/ρ_0 et la pression p par p/ρ_o.

à un[2]. Rappelons qu'alors, pour notre fluide incompressible, les évolutions temporelles de la densité ρ et du champ de vitesse u sont décrites par le système

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \rho \ + \ u \cdot \nabla \rho & = & 0 \\ \partial_t u \ + \ (u \cdot \nabla) u & = & \frac{1}{\rho} (\triangle u - \nabla p) \end{array}\right\} \tag{6.1}$$

où la pression p est déterminée, à une fonction du temps près, par l'équation elliptique

$$\operatorname{div} \Big(\frac{1}{\rho} \nabla p \Big) \ = \ \operatorname{div} \Big(\frac{1}{\rho} \triangle u - (u \cdot \nabla) u \Big) \ . \tag{6.2}$$

Par construction, ce système intègre la conservation de la condition d'incompressibilité : $\operatorname{div} u = 0$.

Comme dans le cas homogène, nous préférerons travailler en formulation tourbillon. La densité ρ et la vorticité $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ évoluent[3] selon le système

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \rho \ + \ u \cdot \nabla \rho & = & 0 \\ \partial_t \omega \ + \ (u \cdot \nabla) \omega & = & \operatorname{div} \big(\frac{1}{\rho} (\nabla \omega + \nabla^\perp p) \big) \end{array}\right\} \tag{6.3}$$

où la pression p est encore déterminée par (6.2), la vitesse $u(t)$ étant reconstruite à partir de la vorticité $\omega(t)$ selon la loi de Biot-Savart — ce que l'on note $u(t) = K_{BS} \star \omega(t)$ — c'est-à-dire pour tout temps $t > 0$ et presque tout point $x \in \mathbf{R}^2$

$$u(t,x) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \, \omega(t,y) \, dy \ . \tag{6.4}$$

Notons qu'ici la pression ne disparaît pas de la formulation tourbillon. Il nous faut donc étudier la loi de Biot-Savart et la reconstruction de la pression, ce qui est l'objet de deux appendices.

Les solutions ω de la formulation tourbillon (1.15) de l'équation de Navier-Stokes homogène correspondent naturellement à des solutions $(1, \omega)$ de (6.3). Par ailleurs, les fluides incompressibles à densité variable vérifient encore une *invariance d'échelle*[4], associée aux changements d'échelle

$$D_a(\rho, \omega)\,(t,x) \ = \ (\rho\,(a^2\,t, a\,x), \, a^2\,\omega\,(a^2\,t, a\,x)) \ , \quad a > 0 \ . \tag{6.5}$$

Ainsi les tourbillons d'Oseen centrés en l'origine, décrits par $\rho = 1$, $u = \alpha\, u^G$ et $\omega = \alpha\, \omega^G$, où $\alpha \in \mathbf{R}$ est un paramètre et, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbf{R}^2$,

$$\omega^G(t,x) \ = \ \frac{1}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \ , \qquad u^G(t,x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{t}}\, v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)$$

[2]Quitte à changer les cordonnées (t,x) en $(\mu t, x)$ et les inconnues u, ω en u/μ, ω/μ.

[3]Pour obtenir ce système, il peut être utile de remarquer que pour tout champ de vecteurs f, on a $\operatorname{rot} f = -\operatorname{div} f^\perp$ et $\triangle f = \nabla \operatorname{div} f + \nabla^\perp \operatorname{rot} f$.

[4]Si (ρ, ω) est une solution, $D_a(\rho, \omega)$ l'est aussi, pour tout $a > 0$.

avec, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2$,

$$G(\xi) \;=\; \frac{1}{4\pi}\, e^{-|\xi|^2/4}\,, \qquad v^G(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\, \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\, \left(1 - e^{-|\xi|^2/4}\right)\,,$$

forment encore une famille de solutions auto-similaires[5].

Bien que l'équation homogène fournisse un excellent modèle dans bien des situations, tous les fluides réels sont — au moins faiblement — inhomogènes. Par conséquent, il est à la fois important et légitime, tant d'un point de vue pratique que théorique, de se demander si les prédictions du modèle homogène sont encore pertinentes pour le modèle incompressible *à densité variable*, au moins dans le régime de faible inhomogénéité. Nous abordons cette problématique à travers la question suivante : les tourbillons d'Oseen jouent-ils encore un rôle de premier plan dans la description du comportement asymptotique des fluides incompressibles faiblement inhomogènes ? Faute de fonctions de Lyapunov adaptées au problème à densité variable, une réponse générale à cette question n'est pas encore connue, mais nous allons en traiter deux aspects importants : l'asymptotique des petites solutions et la stabilité asymptotique des tourbillons d'Oseen. Pour reformuler le second aspect, disons qu'il s'agit de savoir si le modèle incompressible à densité variable prédit que les tourbillons d'Oseen peuvent être effectivement observés.

De manière volontairement floue, nous pouvons dire que nous allons montrer qu'il existe un voisinage, pour les données initiales, de la famille des tourbillons d'Oseen, c'est-à-dire[6] de l'ensemble $\{(1, \alpha\,\omega^G(1)) | \alpha \in \mathbf{R}\}$, telle qu'à toute donnée initiale dans ce voisinage soit associée une unique solution (ρ, ω) de (6.3), cette solution restant dans un voisinage d'un tourbillon d'Oseen, et sa vorticité convergeant vers celle d'un tourbillon. De plus, nous aurons réellement une stabilité, dans la mesure où, pour tout temps, la distance de la solution au tourbillon d'Oseen déterminant l'asymptotique sera contrôlée par la distance initiale. Évidemment, comme dans le cas homogène, le tourbillon en question est celui de paramètre $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} \omega_0$, puisque la circulation est encore préservée[7] par le système (6.3).

Notons qu'un tel résultat implique que l'asymptotique d'une solution initialement proche de $(1, 0)$, et de circulation non nulle, est donnée par un tourbillon d'Oseen. Pour les petites solutions faiblement inhomogènes mais de circulation α nulle, il implique en revanche qu'elles décroissent plus vite que les tourbillons d'Oseen. Ceci est cohérent avec ce qui se passe dans le cas à densité constante.

Insistons également sur le fait que nous établirons la stabilité des tour-

[5] C'est-à-dire que $D_a(1, \alpha\,\omega^G) = (1, \alpha\,\omega^G)$ pour tout $a > 0$ et tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

[6] Nous regardons la stabilité de tourbillons déjà formés, donc nous partons de $\omega^G(t_0)$, avec $t_0 > 0$ que l'on peut choisir égal à un.

[7] Puisque l'équation de vorticité est obtenue en dérivant l'équation pour la vitesse.

billons d'Oseen, sans hypothèse de petitesse sur le paramètre α. Nous traitons donc le cas des grands nombres de Reynolds $|\alpha|$.

Enfin, rappelons que le fait que seule la vorticité converge, c'est-à-dire que la densité ρ ne devienne pas asymptotiquement constante, n'est pas une surprise. En effet, ρ vérifie une équation de transport par un champ de vitesse à divergence nulle. Ainsi formellement, pour toute fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^2} f(\rho(t))$ est préservée par l'évolution : la densité de masse $\rho(t)$ est constante en loi. En particulier, $\|\,\rho(t) - 1\,\|_p$ est constant pour tout $1 \leq p \leq \infty$!

Avant de formuler un vrai théorème, nous allons changer de cadre. Il nous suffira de montrer la stabilité d'un tourbillon d'Oseen. Or pour obtenir un résultat de stabilité, il est souvent plus agréable de travailler autour de solutions stationnaires et de formuler le problème en termes de la perturbation de cette solution. Ramenons-nous à ce cadre.

Tout d'abord nous changeons de variables et d'inconnues pour transformer les tourbillons d'Oseen en solutions stationnaires d'un autre problème. Notre changement de variables aura de plus le bon goût de transformer des taux de décroissance polynomiaux en taux de décroissance exponentiels, donc plus accessibles par un argument spectral. Nous inspirant du cas homogène [26], nous introduisons les *variables auto-similaires*

$$(\tau,\xi) \;=\; \left(\ln t\;,\;\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\,, \tag{6.6}$$

et, en tenant compte de l'invariance d'échelle (6.5), nous définissons les nouvelles inconnues (r,w,v,Π) *via* les relations

$$\begin{array}{rclcrcl} \rho(t,x) &=& r\left(\ln t\,,\frac{x}{\sqrt{t}}\right) &,& u(t,x) &=& \frac{1}{\sqrt{t}}\,v\left(\ln t\,,\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\,, \\ \omega(t,x) &=& \frac{1}{t}\,w\left(\ln t\,,\frac{x}{\sqrt{t}}\right) &,& p(t,x) &=& \frac{1}{t}\,\Pi\left(\ln t\,,\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\,, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{rclcrcl} r(\tau,\xi) &=& \rho\,(e^\tau,e^{\frac{\tau}{2}}\xi) &,& v(\tau,\xi) &=& e^{\frac{\tau}{2}}\,u\,(e^\tau,e^{\frac{\tau}{2}}\xi)\,, \\ w(\tau,\xi) &=& e^\tau\,\omega\,(e^\tau,e^{\frac{\tau}{2}}\xi) &,& \Pi(\tau,\xi) &=& e^\tau\,p\,(e^\tau,e^{\frac{\tau}{2}}\xi)\,. \end{array} \tag{6.7}$$

Nous portons donc notre attention sur l'évolution temporelle de (r,w) selon le système

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_\tau\,r + \big((v-\frac{1}{2}\,\xi)\cdot\nabla\big)\,r &=& 0 \\ \partial_\tau\,w + \big((v-\frac{1}{2}\,\xi)\cdot\nabla\big)\,w - w &=& \operatorname{div}\big(\,\frac{1}{r}\,(\nabla\omega + \nabla^\perp\Pi)\,\big) \end{array}\right\} \tag{6.8}$$

où la vitesse $v(\tau)$ est obtenue par la loi de Biot-Savart (6.4) à partir de $w(\tau)$ et le gradient de pression $\nabla\Pi$ en résolvant

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\,\nabla\Pi\right) \;=\; \operatorname{div}\left(\frac{1}{r}\,\triangle\,v - (v\cdot\nabla)\,v\right)\,. \tag{6.9}$$

Par construction, les tourbillons d'Oseen correspondent à des solutions stationnaires du système (6.8), de la forme $(1, \alpha\, G)$. Par commodité d'écriture, nous prescrirons la condition initiale, dans les variables originales, au temps $t = 1$ plutôt qu'en $t = 0$, donc au temps $\tau = 0$ dans les variables auto-similaires.

Donnons-nous un tourbillon d'Oseen, autrement dit fixons un réel α, puis écrivons le système décrivant l'évolution temporelle des perturbations de la densité $b = 1/r - 1$ et de la vorticité $\widetilde{w} = w - \alpha\, w$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_\tau\, b + \big((v - \frac{1}{2}\,\xi) \cdot \nabla\big)\, b & = & 0 \\ \partial_\tau\, \widetilde{w} - (\mathcal{L} - \alpha\, \Lambda)\, \widetilde{w} + \big(\widetilde{v} \cdot \nabla\big)\, \widetilde{w} & = & \mathrm{div}\,\big(\, b\,(\nabla w + \nabla^\perp \Pi)\,\big) \end{array}\right\} \tag{6.10}$$

où $\mathcal{L}$ et Λ sont les opérateurs déjà rencontrés dans le dernier chapitre de la partie précédente

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}f & = & \triangle f + \frac{1}{2}\,\xi \cdot \nabla f + f\ , \\ \Lambda f & = & v^G \cdot \nabla f + (K_{BS} \star f) \cdot \nabla G\ , \end{array} \tag{6.11}$$

$\widetilde{v}(\tau)$ est issu de $\widetilde{w}(\tau)$ *via* la loi de Biot-Savart, $\nabla\Pi$ obtenu en résolvant

$$\mathrm{div}\,\big(\,(1+b)\,\nabla\Pi\,\big) \;=\; \mathrm{div}\,\big(\,(1+b)\,\triangle v - (v \cdot \nabla)\, v\,\big)\ , \tag{6.12}$$

avec, bien évidemment,

$$w \;=\; \alpha\, G + \widetilde{w}\ , \qquad v \;=\; K_{BS} \star w \;=\; \alpha\, v^G + \widetilde{v}\ . \tag{6.13}$$

Rappelons que l'opérateur de Fokker-Planck $\mathcal{L}$ génère l'évolution de la chaleur en variables auto-similaires et que l'opérateur non-local d'ordre un Λ provient de la linéarisation du terme de convection de (6.8) autour de $w = G$.

Venons-en au choix des espaces. Nous avons vu que même dans le cas à densité constante, on ne peut obtenir un taux de convergence vers un tourbillon d'Oseen sans hypothèse de localisation sur la vorticité. Un argument supplémentaire pour l'utilisation d'espaces à poids, est qu'elle nous permettra d'estimer la vitesse $\widetilde{v}$ dans des espaces de Sobolev homogènes $\dot{H}^\sigma$, avec $0 < \sigma < 1$. Nous avons également mentionné dans le dernier chapitre de la partie précédente les avantages techniques à travailler avec des poids gaussiens. Notons toutefois qu'alors nous ne pouvons pleinement exploiter la décroissance en espace de $\widetilde{v}$ et de Π, puisqu'elle n'est *a priori* que polynomiale[8]. Il nous faut donc également supposer que la perturbation de la densité est initialement localisée de manière gaussienne, et montrer que ceci est propagé par l'évolution. Par ailleurs, pour préserver le caractère parabolique de la seconde équation de notre système quasi linéaire, nous devons estimer la densité non seulement dans un espace basé sur L^2 mais également

[8] Voir le cas des tourbillons d'Oseen.

dans un espace basé sur L^∞. Rappelons à présent la définition de nos espaces à poids gaussiens

$$L^p_w(\mathbf{R}^2) \quad = \quad \{\ f \mid G^{-\frac{1}{2}} f \in L^p(\mathbf{R}^2)\ \}$$

de normes $|\, f\,|_{w,p} = \|\, G^{-\frac{1}{2}} f\,\|_p$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Réintroduisons également l'espace de Hilbert $X = L^2_w(\mathbf{R}^2)$, muni de la norme $\|\cdot\|_X = |\cdot|_{w,2}$ et du produit scalaire

$$(w_1\,,\,w_2)_X \quad = \quad \int_{\mathbf{R}^2} G(\xi)^{-1}\; w_1(\xi)\; w_2(\xi)\; d\xi\ .$$

Redéfinissons enfin le sous-espace fermé

$$X_0 \quad = \quad \left\{\ w \in X \;\Big|\; \int_{\mathbf{R}^2} w(\xi)\, d\xi = 0\ \right\}. \tag{6.14}$$

Notons que l'espace X_0 est préservé par l'évolution liée au système (6.10).

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie.

Théorème 6.1 *Soient* $0 < s < 1$ *et* $0 < \gamma < 1/2$*, puis* $q_0 > \max(4, 2/s)$*. Il existe une fonction décroissante strictement positive* $\varepsilon_0 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+_*$ *et une fonction strictement croissante* $K : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+_*$ *telles que, pour tout réel* α*, l'on ait, pour tout* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(|\alpha|)$*, si*

1. b_0 *appartient à* $X \cap L^\infty_w(\mathbf{R}^2) \cap H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$*, avec* $\|\, b_0\,\|_X \leq \varepsilon$ *et* $|\, b_0\,|_{w,\infty} \leq \varepsilon$*, et* ∇b_0 *appartient à* $L^{q_0}_w(\mathbf{R}^2)$
2. $\widetilde{w}_0$ *appartient à* $X_0 \cap H^s(\mathbf{R}^2)$ *avec* $\|\,\widetilde{w}_0\,\|_X \leq \varepsilon$

alors le système (6.10) possède une unique solution $(b, \widetilde{w})$ *de condition initiale* $(b_0, \widetilde{w}_0)$*, telle que*

1. $b \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; H^{s+2}(\mathbf{R}^2))$,
2. $b \in L^\infty(\mathbf{R}^+; X \cap L^\infty_w(\mathbf{R}^2))$, $\nabla b \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; L^{q_0}_w(\mathbf{R}^2))$,
3. $\widetilde{w} \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; H^s(\mathbf{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbf{R}^+; H^{s+1}(\mathbf{R}^2))$,
4. $\widetilde{w} \in L^\infty(\mathbf{R}^+; X_0) \cap L^2(\mathbf{R}^+; X_0)$, $\nabla\widetilde{w} \in L^2(\mathbf{R}^+; X)$, $|\cdot|\,\widetilde{w} \in L^2(\mathbf{R}^+; X)$;

cette solution étant par ailleurs telle que, pour tout $\tau > 0$*, sa densité vérifie*

$$|\, b(\tau)\,|_{w,\infty} \;\leq\; K(|\alpha|)\;\varepsilon\;, \qquad \|\, b(\tau)\,\|_X \;\leq\; K(|\alpha|)\;\varepsilon\; e^{-\frac{1}{2}\tau}\;,$$

et sa vorticité $\widetilde{w}(\tau)$ *vérifie* $\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X \leq K(|\alpha|)\;\varepsilon\; e^{-\gamma\tau}$.

Remarques :

1. Nous n'autorisons que des perturbations de la vorticité de moyenne nulle. Cette hypothèse, nécessaire pour avoir la convergence vers le tourbillon d'Oseen et préservée par l'évolution, n'est pas véritablement restrictive[9]. En

[9] Quitte à devoir réduire la taille du voisinage de stabilité, en remplaçant $\varepsilon_0(|\alpha|)$ par $\varepsilon_1(|\alpha|) = \inf_{\sigma \leq |\alpha|} \varepsilon_0(\sigma + \varepsilon_0(\sigma))$.

effet, le tourbillon d'Oseen $\alpha\, G$ dont la donnée initiale w_0 est la plus proche[10] est celui de paramètre $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} w_0$, puisque l'espace X_0 et la droite $\mathbf{R}\, G$ sont orthogonales. Ainsi, si l'on part initialement près d'un tourbillon d'Oseen de paramètre α, l'on demeure proche de ce tourbillon tout en convergeant vers un tourbillon, éventuellement différent, de paramètre $\alpha' = \int_{\mathbf{R}^2} w_0$. En appliquant cela au *tourbillon* de paramètre $\alpha = 0$, on obtient que l'asymptotique en temps long des écoulements incompressibles faiblement inhomogènes, de petite vorticité initiale et de circulation non nulle, est décrite par un tourbillon d'Oseen.

2. Pour rendre plus concret ce résultat de stabilité asymptotique, formulons certaines de ses conséquences dans les variables d'origine. Sous les hypothèses de régularité et de localisation des perturbations du théorème 6.1, si (ρ, ω) est la solution du système (6.3), définie par les relations (6.7) où bien évidemment $w = \alpha\, G + \widetilde{w}$ et $r = \frac{1}{1+b}$, alors la densité $\rho(t,x)$ vérifie, pour tout temps $t \geq 1$,

$$\| \rho(t) - 1 \|_p \;\leq\; \| e^{\frac{|\cdot|^2}{8\,t}} (\rho(t,\cdot) - 1) \|_p \;\leq\; C\, \varepsilon\ , \qquad 2 \leq p \leq \infty\ ,$$

et la vorticité $\omega(t,x)$ satisfait, pour tout temps $t \geq 1$, à

$$t^{\frac{1}{2}}\, \| e^{\frac{|\cdot|^2}{8\,t}} \big(\omega(t,\cdot) - \alpha\, \omega^G(t,\cdot)\big) \|_2 \;\;\leq\;\; \frac{C\, \varepsilon}{t^\gamma}\ ,$$

ce qui implique, pour $1 \leq p \leq 2$ et $2 < q < \infty$,

$$t^{1-\frac{1}{p}}\, \| \omega(t) - \alpha\, \omega^G(t) \|_p \;\leq\; \frac{C\, \varepsilon}{t^\gamma}\ , \qquad t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\, \| u(t) - \alpha\, u^G(t) \|_q \;\leq\; \frac{C_q\, \varepsilon}{t^\gamma}\ .$$

Moyennant une perte que l'on peut rendre aussi petite qu'on le souhaite, on retrouve donc les taux de convergence redémontrés dans la partie précédente dans le cas homogène [26]. Néanmoins, *a priori* on ne peut plus ici réellement accélérer cette convergence en choisissant mieux le centre du tourbillon d'Oseen décrivant l'asymptotique, puisqu'à l'exemple de $\alpha\,\mathrm{div}(b\nabla G)$, certains termes dans le second membre du système (6.3) semblent bloquer la décroissance temporelle de $\| \widetilde{w}(\tau) \|_X$ au taux $e^{-\tau/2}$. Par ailleurs, en général, le centre de gravité de la distribution de vorticité n'est, de toute façon, plus conservé par l'évolution temporelle.

La majeure partie de la démonstration du théorème 6.1 est consacrée à montrer l'existence d'une solution au système (6.10), l'unicité et la stabilité asymptotique se déduisant *mutatis mutandis* d'arguments déjà utilisés pour établir l'existence. De manière classique et à l'exemple de Raphaël Danchin [18], nous prouverons cette existence en construisant une suite de solutions de linéarisations du système (6.10), puis en établissant que cette suite

[10] En norme $\| \cdot \|_X$.

converge et que sa limite est bien une solution du système non linéaire. Pour nous assurer la convergence de notre schéma de construction, nous bornerons la différence entre deux solutions de linéarisations du système (6.10), en exploitant des bornes *a priori*. Pour rendre plus lisible cette démonstration, il peut être utile de séparer ces bornes préliminaires en deux catégories : les *estimations du type 1*, dans des espaces à poids, globales en temps — au sens où elles impliquent des bornes dans des espaces L^∞ en temps sur tout $\mathbf{R}_*^+$ —, permettent de contrôler les non-linéarités en maintenant certaines petitesses initiales et correspondent aux estimations de stabilité asymptotique ; les *estimations de type 2*, dans des espaces de Sobolev homogènes, locales en temps et démontrées à l'aide des estimations de type 1, sont à proprement parler celles qui permettent d'estimer la différence entre deux solutions de systèmes linéarisés, et conduisent ainsi à la convergence du schéma de construction d'une solution et à l'unicité de celle-ci.

Nous regroupons ces estimations préliminaires dans les deux premiers chapitres qui suivent. Le premier est consacré à celles relatives à un type d'équation de transport obtenu comme linéarisation de l'équation pour la densité et le second à une linéarisation de l'équation de vorticité. Dans le chapitre final, nous les exploitons pour démontrer le théorème 6.1. Notons aussi que nous ferons un usage intensif de l'étude de la loi de Biot-Savart et de la reconstruction de la pression, ainsi que de certaines estimations de commutateurs, toutes choses contenues dans les annexes A, B et C.

Observation : Le contenu de cette deuxième partie a fait l'objet de la soumission d'un article.

Chapitre 7

Équation de transport

Dans ce chapitre, nous regroupons les estimations relatives à l'équation de transport pour la densité, appelons-la *linéarisée* pour insister sur le fait que nous ne supposons aucun lien entre le champ de vitesse $\widetilde{\nu}$ et la densité b. Nous considérons l'équation

$$\partial_\tau b \ + \ \big((\nu - \frac{1}{2}\xi) \cdot \nabla \big) \, b \ = \ 0 \tag{7.1}$$

avec $\nu = \alpha \, v^G + \widetilde{\nu}$, où $\widetilde{\nu}$ est un champ de vecteurs à divergence nulle.

À vrai dire, notre problème ne sera pas de prouver l'existence de solutions pour cette équation, puisque, par la suite, nous ne considérerons que des cas où le champ de vitesse $\nu - \frac{1}{2}\xi$ engendre un flot, dans la mesure où $\nabla\widetilde{\nu}$ appartiendra à $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+; L^\infty(\mathbf{R}^2))$ (et $\widetilde{\nu}$ à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; L^\infty(\mathbf{R}^2))$). Notre but n'est donc que d'établir des bornes *a priori* pour ces solutions.

Commençons par des estimations dans des espaces L^p, à poids ou non. Ces estimations sont celles du premier type, au sens décrit dans la fin de l'introduction de cette partie.

Proposition 7.1 *Soit $T > 0$. Supposons que le champ de vecteurs à divergence nulle $\widetilde{\nu}$ appartient à $L^2(0, T\,; L^\infty(\mathbf{R}^2))$. Alors b, la solution de l'équation de transport (7.1), de condition initiale b_0, vérifie*

1. *si b_0 appartient à $L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, alors, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, la densité $b(\tau)$ appartient à $L^p(\mathbf{R}^2)$ avec*

$$\| \, b(\tau) \, \|_p \ \leq \ \| \, b_0 \, \|_p \; e^{-\frac{\tau}{p}} \ , \quad \text{pour tout } 0 < \tau < T\,; \tag{7.2}$$

2. *pourvu que b_0 appartienne à $X \cap L^\infty_w(\mathbf{R}^2)$, alors, pour tout $2 \leq p \leq \infty$, la densité $b(\tau)$ appartient à $L^p_w(\mathbf{R}^2)$ avec, pour tout $0 < \tau < T$,*

$$| \, b(\tau) \, |_{w,p} \ \leq \ | \, b_0 \, |_{w,p} \; e^{-\frac{\tau}{p}} \ \exp\Big(\frac{1}{8} \int_0^\tau \ \| \, \widetilde{\nu}(\sigma) \, \|^2_\infty \, d\sigma \Big) \ . \tag{7.3}$$

Remarque : Afin d'obtenir des bornes indépendantes du temps, il est primordial que cela soit $\widetilde{\nu}$ et non ν qui intervienne dans le membre de droite de l'inégalité (7.3) puisque $\int_0^\tau \| v^G \|_\infty^2 = C\,\tau$.

Démonstration. Pour démontrer la première partie de la proposition, pour $1 \le p < \infty$, il suffit de multiplier l'équation (7.1) par $\mathrm{sgn}(b)\ |\, b\,|^{p-1}$, où sgn est la fonction signe[1] usuelle. En intégrant par parties sur $\mathbf{R}^2$, nous obtenons alors
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \| \, b \,\|_p^p \;=\; - \int_{\mathbf{R}^2} \big((\nu - \frac{1}{2}\,\xi) \cdot \nabla \big) \, |\, b\,|^p \;=\; -\|\, b \,\|_p^p$$
puisque ν est à divergence nulle et $\operatorname{div} \xi = 2$. Cette équation différentielle mène à (7.2) pour les p finis. Le cas $p = \infty$ se déduit alors du cas fini en passant à la limite $p \to \infty$.

Pour démontrer la seconde partie, nous pouvons procéder de manière semblable et obtenir pour $1 \le p < \infty$
$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \,|\, b\,|_{w,p}^p &= - \int_{\mathbf{R}^2} G^{-\frac{p}{2}} \, \big((\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi) \cdot \nabla \big) \ |\, b\,|^p \\ &= \tfrac{p}{4} \int_{\mathbf{R}^2} G^{-\frac{p}{2}} \, \big(\xi \cdot (\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi) - 1 \big) \ |\, b\,|^p \end{aligned}$$
puisque $\nabla G^{-\frac{p}{2}}(\xi) = G(\xi)^{-\frac{p}{2}}\, p\, \xi/4$. Observons à présent que $\xi \perp v^G(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2$. Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2$ et tout $0 < \tau < T$,
$$\xi \cdot (\nu(\tau,\xi) - \frac{1}{2}\,\xi) \;=\; \xi \cdot \widetilde{\nu}(\tau,\xi) - \frac{1}{2}\,|\xi|^2 \;\le\; \frac{1}{2}\,|\widetilde{\nu}(\tau,\xi)|^2$$
donc
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \,|\, b\,|_{w,p}^p \;\le\; (-1 + \frac{p}{8}\, \| \, \widetilde{\nu} \, \|_\infty^2) \ \ |\, b\,|_{w,p}^p \,.$$
Intégrer en temps termine la démonstration pour les p finis, le cas $p = \infty$ en dérivant en faisant tendre p vers l'infini. ∎

Venons-en maintenant aux estimations dans des espaces de Sobolev.

Proposition 7.2 *Soit* $T > 0$.

1. *Soient* $0 < s \le 2$ *et* $0 < \varepsilon_s < s$. *Supposons que* $\widetilde{\nu}$ *est un champ de vecteur à divergence nulle tel que* $\nabla \widetilde{\nu}$ *appartienne à* $L^1(0,T;H^1(\mathbf{R}^2))$. *Alors il existe une constante* $C_T > 0$ *indépendante de* $\widetilde{\nu}$ *telle que, pour tout* b_0 *dans* $H^s(\mathbf{R}^2)$, *une solution* b *de (7.1) de condition initiale* b_0, *appartenant à* $L^\infty(0,T;H^{s-\varepsilon_s}(\mathbf{R}^2))$, *vérifie, pour tout* $0 \le \tau \le T$,
$$|\, b(\tau)\,|_{H^{s-\varepsilon_s}} \;\le\; C_T \ |\, b_0\,|_{H^s} \ \exp\big((C_T \int_0^\tau |\, \nabla \nu(\sigma)\,|_{H^1} \, d\sigma)^2 \big). \quad (7.4)$$

[1] C'est-à-dire que sgn vaut -1 sur $\mathbf{R}_*^-$, 0 en 0 et 1 sur $\mathbf{R}_*^+$.

2. Soit $s > 2$. Supposons que $\widetilde{\nu}$ est un champ de vecteur à divergence nulle tel que $\nabla\widetilde{\nu}$ appartienne à $L^1(0,T;H^{s-1}(\mathbf{R}^2))$.
Alors, pour tout b_0 dans $H^s(\mathbf{R}^2)$, l'équation (7.1) possède une unique solution b appartenant à $L^\infty(0,T;H^s(\mathbf{R}^2))$, et de condition initiale b_0. De plus, il existe une constante $C > 0$ indépendante de b_0 et $\widetilde{\nu}$ telle que cette solution b satisfasse, pour tout $0 \leq \tau \leq T$, à

$$|\, b(\tau)\,|_{H^s} \quad \leq \quad C\,|\, b_0\,|_{H^s}\; e^{\frac{s-1}{2}\tau}\; \exp\big(C\int_0^\tau |\,\nabla\nu(\sigma)\,|_{H^{s-1}}\,d\sigma\big). \quad (7.5)$$

Démonstration. Pour la démonstration de la première partie de la proposition, nous renvoyons à [19, théorème 0.1].

Pour démontrer la seconde partie, commençons par remarquer qu'un simple calcul assure $[I^s, \xi/2]\cdot f = -(s/2)\; I^{s-2}\;\mathrm{div}\, f$, pour tout champ de vecteurs f. En appliquant $I^s = (-\triangle)^{\frac{s}{2}}$ à l'équation (7.1), on obtient alors l'équation

$$\partial_\tau I^s b \;+\; \big((\nu - \frac{1}{2}\xi)\cdot\nabla\big)\, I^s b \quad=\quad \frac{s}{2}\; I^s b \;-\; [I^s,\nu]\cdot\nabla b\;.$$

Multiplions à présent par $I^s b$ et intégrons sur $\mathbf{R}^2$ pour arriver, en tenant compte de $\mathrm{div}\,\nu = 0$, à l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\, I^s b\,\|_2^2 \;-\; \frac{s-1}{2}\;\|\, I^s b\,\|_2^2 \quad=\quad -\int_{\mathbf{R}^2} I^s b\;[I^s,\nu]\cdot\nabla b\;.$$

Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée avec le lemme A.2 (où l'on choisit $\sigma = s-1$) de l'appendice sur les estimations de commutateurs conduit à

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\, I^s b\,\|_2^2 \;-\; \frac{s-1}{2}\;\|\, I^s b\,\|_2^2 \quad\leq\quad C\;|\,\nabla\nu\,|_{H^{s-1}}\,|\, b\,|_{H^s}^2\;.$$

Enfin, en se souvenant de $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\, b\,\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\, b\,\|_2^2 \leq 0$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|\, b\,|_{H^s}^2 \;-\; \frac{s-1}{2}\;|\, b\,|_{H^s}^2 \quad\leq\quad C\;|\,\nabla\nu\,|_{H^{s-1}}\,|\, b\,|_{H^s}^2$$

qui mène à (7.5) par une simple intégration. ∎

Terminons ce chapitre par une estimation qui nous servira directement pour démontrer la convergence de notre schéma de construction d'une solution et l'unicité de cette solution. Nous allons en effet établir une estimation portant sur la différence entre deux solutions d'une équation de type (7.1).

Proposition 7.3 *Soit $T > 0$.*
Donnons-nous, pour $i = 1,2$, un champ de vecteur à divergence nulle $\widetilde{\nu}_i$

appartenant à $L^2(0,T;W^{1,\infty}(\mathbf{R}^2))$. Alors si, pour $i=1,2$, b_i est une solution de l'équation

$$\partial_\tau\, b_i \;+\; \big(\,(\nu_i - \frac{1}{2}\,\xi)\cdot\nabla\,\big)\, b_i \;\;=\;\; 0\;,$$

où $\nu_i = \alpha\, v^G + \widetilde{\nu}_i$, de condition initiale b_0, les densités b_1 et b_2 vérifient

1. *pourvu que ∇b_0 appartienne à $L^p_w(\mathbf{R}^2)$, avec $1 \le p \le \infty$, alors, pour $i=1,2$, $b_i(\tau)$ appartient à $L^p_w(\mathbf{R}^2)$ avec, pour tout $0\le\tau\le T$,*

$$|\,\nabla b_i(\tau)\,|_{w,p} \;\le\; |\,\nabla b_0\,|_{w,p}\; e^{-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\; e^{\frac{1}{8}\int_0^\tau \|\,\widetilde{\nu}_i\,\|^2_\infty}\; e^{\int_0^\tau \|\,\nabla\nu_i\,\|_\infty}\;; \quad (7.6)$$

2. *pourvu que b_0 appartienne à $L^p_w(\mathbf{R}^2)$ et ∇b_0 appartienne à $L^q_w(\mathbf{R}^2)$, avec $1\le p<q\le\infty$, alors (b_1-b_2) vérifie, pour tout $0\le\tau\le T$,*

$$|\,(b_2-b_1)(\tau)\,|_{w,p} \;\le\; e^{\frac{1}{8}\int_0^\tau \|\,\widetilde{\nu}_2\,\|^2_\infty}\; \sup_{[0,\tau]}|\,\nabla b_1\,|_{w,q}\int_0^\tau \|\,\widetilde{\nu}_2-\widetilde{\nu}_1\,\|_r\;, \quad (7.7)$$

où r est défini par $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.

Démonstration. Afin de démontrer la première partie de la proposition pour $i=1$, commençons par dériver l'équation vérifiée par b_1. Nous obtenons ainsi, pour $j=1,2$,

$$\partial_\tau\,\partial_j b_1 \;+\; \big(\,(\nu_1-\frac{1}{2}\,\xi)\cdot\nabla\,\big)\,\partial_j b_1 \;\;=\;\; -\partial_j\nu_1\cdot\nabla b_1 \;+\; \frac{1}{2}\,\partial_j b_1\;.$$

En adaptant la démonstration de (7.3), nous en déduisons, pour $j=1,2$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}|\,\partial_j b_1\,|^p_{w,p} \;\le\; (-1+\frac{p}{2}+\frac{p}{8}\,\|\,\widetilde{\nu}_1\,\|^2_\infty)\;\;|\,\partial_j b_1\,|^p_{w,p} \;+\; p\,\|\,\nabla\nu_1\,\|_\infty\,|\,\nabla b_1\,|^p_{w,p}\;.$$

Il nous suffit [2] maintenant de combiner ces deux équations, pour $j=1,2$, puis d'intégrer en temps pour obtenir (7.6).

Observons à présent que b_2-b_1 satisfait à l'équation

$$\partial_\tau\,(b_2-b_1) \;+\; \big(\,(\nu_2-\frac{1}{2}\,\xi)\cdot\nabla\,\big)\,(b_2-b_1) \;\;=\;\; -\,(\widetilde{\nu}_2-\widetilde{\nu}_1)\cdot\nabla b_1\;.$$

Suivre encore une fois la démonstration de (7.3) conduit alors à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,|\,\delta\, b\,|^p_{w,p} \;\le\; (-1+\frac{p}{8}\,\|\,\widetilde{\nu}_2\,\|^2_\infty)\;|\,\delta\, b\,|^p_{w,p} \;+\; p\;|\,\delta\, b\,|^{p-1}_{w,p}\,|\,\nabla b_1\,|_{w,q}\,\|\,\widetilde{\nu}_2-\widetilde{\nu}_1\,\|_r$$

où $\delta\, b = b_2-b_1$. Enfin, cette inégalité différentielle implique (7.7). ∎

[2] Il faut également bien choisir la norme de ∇b_1 pour ne pas faire apparaître de constante supplémentaire.

Chapitre 8

Équation de vorticité

Ce chapitre est consacré à l'équation linéarisée de vorticité. Sa progression est la même que celle du chapitre précédent. La première section traite des estimations dans les espaces de Lebesgue à poids gaussiens, la deuxième des estimations dans les espaces de Sobolev homogènes, et la dernière majore la différence entre deux solutions d'équations de vorticité linéarisées.

Il y sera fait un usage intensif des appendices dédiés à la loi de Biot-Savart et à la reconstruction de la pression. Nous nous intéressons en effet à majorer les solutions $\widetilde{w}$ de l'équation

$$\partial_\tau \widetilde{w} \;-\; (\mathcal{L} - \alpha\,\Lambda)\,\widetilde{w} \;+\; \big(\widetilde{\nu}\cdot\nabla\big)\,\widetilde{w} \;=\; \mathrm{div}\,\big(b\,(\nabla w + \nabla^{\perp}\Pi)\big) \qquad (8.1)$$

où $\mathcal{L}$ et Λ sont les opérateurs définis par (6.11), α un paramètre réel, b est une petite fonction réelle, $\widetilde{\nu}$ est un champ de vecteur à divergence nulle,

$$\begin{array}{rclcrcl} \widetilde{v} & = & K_{BS} \star \widetilde{w} & , & v & = & \alpha\, v^G + \widetilde{v}\ , \\ w & = & \alpha\, G + \widetilde{w} & , & \nu & = & \alpha\, v^G + \widetilde{\nu}\ , \end{array}$$

et $\nabla\Pi$ s'obtient en résolvant

$$\mathrm{div}\,\big((1+b)\,\nabla\Pi\big) \;=\; \mathrm{div}\,\big((1+b)\,\triangle\, v - (\nu\cdot\nabla)\,v\big)\ . \qquad (8.2)$$

Remarquons que cette équation n'est pas réellement linéaire en $\widetilde{w}$, puisque la pression Π est une fonction linéaire de v mais pas de $\widetilde{v}$, et qu'intervient dans le membre de droite de (8.1) le terme $\alpha\,\mathrm{div}(b\nabla G)$. Il faut s'assurer que ces termes de forçage ne perturbent pas la dynamique.

8.1 Estimation à poids

Cette section contient l'estimation dans des espaces gaussiens, appelée du premier type dans l'introduction de cette partie, relative à l'équation linéarisée de vorticité.

Proposition 8.1 *Soient* $\alpha \in \mathbf{R}$ *et* $K_0 > 0$.
Il existe des constantes $\varepsilon_0 > 0$ *et* $C > 0$ *telles que si* b *est une fonction réelle et* $\widetilde{\nu}$ *un champ de vecteurs à divergence nulle vérifiant, pour un* $T > 0$,

1. *pour tout* $1 \le p \le \infty$, *tout* $2 \le q \le \infty$, *et tout* $0 < \tau < T$,

$$\| b(\tau) \|_p \;\le\; \| b_0 \|_p \, e^{-\frac{\tau}{p}} \quad , \quad | b(\tau) |_{w,q} \;\le\; | b_0 |_{w,q} \, e^{-\frac{\tau}{q}} \, e^{K_0}$$

2. *pour* $0 < \tau < T$,

$$\| \widetilde{\nu}(\tau) \|_8 \;\le\; K_0 \quad , \quad \textstyle\int_0^\tau \| \widetilde{\nu} \|_\infty^2 \;\le\; \frac{1}{24}$$

3. *ainsi que*

$$| b_0 |_{w,4} \;\le\; \varepsilon_0 \quad , \quad | b_0 |_{w,\infty} \;\le\; \varepsilon_0$$

alors toute solution $\widetilde{w} \in L^\infty(0, T\,; X_0)$ *de l'équation (8.1), de condition initiale* $\widetilde{w}_0 \in X_0$, *vérifie, pour tout* $0 < \tau < T$,

$$\begin{aligned} \| \widetilde{w}(\tau) \|_X^2 \;&+\; C \int_0^\tau \big(\| \widetilde{w} \|_X^2 + \| \nabla \widetilde{w} \|_X^2 + \| \, | \cdot | \, \widetilde{w} \|_X^2 \big) \\ &\le\; 2 \| \widetilde{w}_0 \|_X^2 \;+\; C \, |\alpha| \, | b_0 |_{w,4} \, . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Remarques :

1. Notons que les hypothèses faites sur b correspondent aux conclusions de la proposition 7.1.

2. Réciproquement, une fois α et K_0 fixés, la conclusion de la proposition 8.1, grâce à l'estimation (C.4), nous permet de rendre $\int_0^\tau \| \widetilde{v} \|_\infty^2$ aussi petit que nous le souhaitons pourvu que $\widetilde{w}_0$ et b_0 soient assez petits — et donc nous autorise à appliquer la proposition 7.1 avec $\widetilde{\nu} = \widetilde{v}$ — , puisque X s'injecte dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, pour tout $1 \le p \le 2$, et $H^1(\mathbf{R}^2)$ s'injecte dans $L^q(\mathbf{R}^2)$, pour tout $2 \le q < \infty$.

3. Par ailleurs, de la même façon, les conclusions de cette proposition nous permettent de l'appliquer à nouveau avec $\widetilde{\nu} = \widetilde{v}$.

4. Enfin, notons que cette proposition nous permet également de contrôler $\int_0^\tau | \nabla \widetilde{v} |_{H^1}^2$ donc d'appliquer la première partie de la proposition 7.2 avec $\widetilde{\nu} = \widetilde{v}$.

Démonstration. Nous allons majorer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \| \widetilde{w} \|_X^2$. Pour cela, il nous faut estimer chacun des termes provenant du produit scalaire, dans X, de $\widetilde{w}$ avec un terme de l'équation (8.1). À vrai dire, nous abuserons de la notation $(f\,,\,g)_X$ en l'appliquant dès lors que l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^2} G^{-1} f g$ est bien définie, sans avoir nécessairement $f, g \in X$.

1. Reprenons tout d'abord les considérations du dernier chapitre de la partie précédente. L'équation (8.1) préserve également la condition $\int_{\mathbf{R}^2} \widetilde{w} = 0$. Or

$\mathcal{L}$ est auto-adjoint sur X et $\mathcal{L} \leq -1/2$ sur X_0. On obtient ainsi, pour tout paramètre $0 < \gamma < 1/2$,

$$(\widetilde{w}\,,\,\mathcal{L}\,\widetilde{w})_X \quad \leq \quad -\,\frac{1}{2}\,(1-\gamma)\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 \;+\; \gamma\,(\widetilde{w}\,,\,\mathcal{L}\,\widetilde{w})_X$$

puis, en intégrant par parties à partir de $G^{-\frac{1}{2}}\,(-\mathcal{L})\,G^{\frac{1}{2}} \;=\, -\,\triangle + \frac{|\cdot|^2}{16} - \frac{1}{2}$,

$$(\widetilde{w}\,,\,\mathcal{L}\,\widetilde{w})_X \;\leq\; -\frac{1}{2}\,(1-2\gamma)\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 \;-\; \gamma\,\Big(\,\|\,\nabla(G^{-1/2}\,\widetilde{w})\,\|_2^2 + \frac{1}{16}\,\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2\Big)$$

et, en développant,

$$(\widetilde{w}\,,\,\mathcal{L}\,\widetilde{w})_X \leq -\frac{1}{2}\,(1{-}2\gamma)\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2{-}\gamma\,\big(\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X^2{+}\frac{1}{8}\,\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2{+}\frac{1}{2}(\nabla\widetilde{w}\,,\,|\cdot|\,\widetilde{w})_X\big)$$

enfin

$$(\widetilde{w}\,,\,\mathcal{L}\,\widetilde{w})_X \;\leq\; -\frac{1}{2}\,(1-2\gamma)\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 \;-\; \gamma\,\Big(\,\frac{1}{3}\,\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X^2 + \frac{1}{32}\,\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2\Big)\,. \quad (8.4)$$

2. Nous avons également montré, dans le dernier chapitre de la partie précédente, que Λ est antisymétrique sur X. Ainsi nous avons

$$(\widetilde{w}\,,\,\Lambda\,\widetilde{w})_X \quad = \quad 0\;. \qquad (8.5)$$

3. Une inégalité de Hölder permet de montrer que

$$\big|\,(\widetilde{w}\,,\,\widetilde{\nu}\cdot\nabla\widetilde{w})_X\big| \quad\leq\quad 6\,\|\,\widetilde{\nu}\,\|_\infty^2\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 \;+\; \frac{1}{24}\,\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X^2\;. \qquad (8.6)$$

4. D'une intégration par parties procède

$$(\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b\,\nabla\widetilde{w}))_X \quad=\quad -\int_{\mathbf{R}^2} G^{-1}\,b\,|\nabla\widetilde{w}|^2 \;-\; \frac{1}{2}\,(b\,\widetilde{w}\,,\,\xi\cdot\nabla\widetilde{w})_X\;.$$

Une inégalité de Hölder permet alors, en prenant en compte la majoration $\|\,b(\tau)\,\|_\infty \leq \|\,b_0\,\|_\infty$, de s'assurer que

$$\big|\,(\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b\,\nabla\widetilde{w}))_X\big| \;\leq\; \frac{5}{4}\,\|\,b_0\,\|_\infty\,\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X^2 \;+\; \frac{1}{4}\,\|\,b_0\,\|_\infty\,\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2\;. \quad (8.7)$$

5. Compte tenu de $\|\,b(\tau)\,\|_2 \leq \|\,b_0\,\|_2\,e^{-\frac{\tau}{2}}$, une démarche similaire conduit à

$$\begin{aligned}\big|\,(\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b\,\nabla G))_X\big| \quad &= \quad \Big|\,\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2} b\,\xi\,\cdot\,\nabla\widetilde{w} + \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^2} b\,\widetilde{w}\,|\cdot|^2\,\Big| \\ &\leq \quad C\,\|\,b_0\,\|_2\,e^{-\frac{\tau}{2}}\,(\,\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X + \|\,\widetilde{w}\,\|_X\,)\end{aligned}$$

et permet de démontrer

$$\big|\,(\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b\,\nabla G))_X\big| \quad\leq\quad C\,\|\,b_0\,\|_2\,(\,e^{-\tau} + \|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X^2 + \|\,\widetilde{w}\,\|_X^2)\;. \quad (8.8)$$

6. Occupons-nous pour finir du terme de pression. Une intégration par parties, suivie de l'application d'inégalités de Hölder et du bon usage de majorations du type (B.2), avec $p = 2, 4$, permet de démontrer, pourvu que b_0 soit suffisamment petit dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$,

$$
\begin{aligned}
\big| (\widetilde{w}\,,\, \mathrm{div}\,(b\,\nabla^\perp \Pi))_X \big| \quad &= \quad \Big| \frac{1}{2}(b\,,\, \widetilde{w}\;\xi\cdot\nabla^\perp\Pi)_X + (b\,,\, \nabla\widetilde{w}\cdot\nabla^\perp\Pi)_X \,\Big| \\
&\leq \quad \frac{C}{1-\kappa\,\|\, b_0\,\|_\infty}\,(\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X + \|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X) \\
&\times \quad (\ \ |\, b_0\,|_{w,\infty}\, e^{K_0}\,\|\,(1+b)\,\triangle\,\widetilde{v}\,\|_2 \\
&\qquad + |\, b_0\,|_{w,4}\, e^{K_0}\, e^{-\frac{\tau}{4}}\,\|\,\alpha\,(1+b)\,\triangle\, v^G - (\nu\cdot\nabla)\, v\,\|_4\,).
\end{aligned}
$$

Or, d'une part, puisque $\|\, b(\tau)\,\|_\infty \leq \|\, b_0\,\|_\infty$ et $\triangle\,\widetilde{v} = \nabla^\perp\widetilde{w}$, nous vient

$$
\|\,(1+b)\,\triangle\,\widetilde{v}\,\|_2 \quad\leq\quad C\ (\,1+\|\, b_0\,\|_\infty)\ \|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2\ ;
$$

d'autre part, $\|\, b(\tau)\,\|_\infty \leq \|\, b_0\,\|_\infty$ conduit à

$$
\|\,(1+b)\,\triangle\, v^G\,\|_4 \quad\leq\quad C\ (\,1+\|\, b_0\,\|_\infty)\ ;
$$

enfin, l'application d'une inégalité de Hölder, puis de l'estimation (C.5) et d'une injection de Sobolev montre que

$$
\|\,(\nu\cdot\nabla)\, v\,\|_4 \leq C\,(|\alpha| + \|\,\widetilde{\nu}\,\|_8)\,(|\alpha| + \|\,\widetilde{w}\,\|_8) \leq C\,(|\alpha| + \|\,\widetilde{\nu}\,\|_8)\,(|\alpha| + |\,\widetilde{w}\,|_{H^1})\ .
$$

En tenant compte de tout cela, nous obtenons donc, lorsque $\kappa\,\|\, b_0\,\|_\infty \leq 1/2$,

$$
\begin{aligned}
\big| (w\,,\, \mathrm{div}\,(b\,\nabla^\perp\Pi))_X \big| \leq\ & e^{-\frac{\tau}{2}} && C\,|\alpha|\, e^{K_0}\,|\, b_0\,|_{w,4}\,(1+|\alpha| + \|\,\widetilde{\nu}\,\|_8)^2 \\
& + \|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 && C\, e^{K_0}\,|\, b_0\,|_{w,4}\,(1+|\alpha| + \|\,\widetilde{\nu}\,\|_8)^2 \\
& + \|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X^2 && C\, e^{K_0}(|\, b_0\,|_{w,\infty} + |\, b_0\,|_{w,4}(1+|\alpha| + \|\,\widetilde{\nu}\,\|_8)) \\
& + \|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 && C\, e^{K_0}\,(|\, b_0\,|_{w,\infty} + |\, b_0\,|_{w,4}(1+|\alpha|))\ . \qquad (8.9)
\end{aligned}
$$

Il ne nous reste plus qu'à tout rassembler en choisissant $\gamma = 1/4$ dans la majoration (8.4) avant d'intégrer en temps pour obtenir, dès lors que l'on a $\kappa\,\|\, b_0\,\|_\infty \leq 1/2$ et $\int_0^\tau \|\,\widetilde{\nu}\,\|_\infty^2 \leq 1/24$, en tenant compte des hypothèses de la proposition et de l'injection de $L^4_w(\mathbf{R}^2)$ dans $L^2(\mathbf{R}^2)$,

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\|\,\widetilde{w}(\tau)\,\|_X^2 \quad &+ \quad C\int_0^\tau \|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 && \times\,(1-\ \varepsilon_0\, e^{K_0}(1+|\alpha| + K_0)^2) \\
&+ \quad C\int_0^\tau \|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_X^2 && \times\,(1-\ \varepsilon_0\, e^{K_0}\,(1+|\alpha| + K_0)) \\
&+ \quad C\int_0^\tau \|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 && \times\,(1-\ \varepsilon_0\, e^{K_0}\,(1+|\alpha|)) \\
&\leq \quad \tfrac{1}{2}\|\,\widetilde{w}_0\,\|_X^2\ +\ C\,|\alpha|\times|\, b_0\,|_{w,4}\, e^{K_0}\,(1+|\alpha| + K_0)^2\ ,
\end{aligned}
$$

ce qui permet de terminer cette démonstration et cette section, en choisissant ε_0 suffisamment petit. ∎

8.2 Estimation de régularité

Cette section démontre une estimation, dite du second type dans l'introduction de cette partie, dans les espaces de Sobolev homogènes pour une solution de l'équation de vorticité linéarisée (8.1). Rappelons la notation $I = (-\triangle)^{1/2}$.

Proposition 8.2 *Soient* $\alpha \in \mathbf{R}$ *et* $0 < s < 1$.
Soient $\tilde{s}, \bar{s} \in \mathbf{R}^+$ *tels que* $1 + s < \tilde{s} < 2$ *et* $1 < \bar{s} < 2 - s$.
Il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ *telle que, pour tout* $K > 0$, *il existe* $C > 0$ *de sorte que, si* b *est une fonction réelle et* $\widetilde{\nu}$ *un champ de vecteurs à divergence nulle, vérifiant pour un* $T > 0$

$$\begin{array}{rclcrcl} \sup_{[0,T]} \| b \|_\infty & \leq & \| b_0 \|_\infty \leq \varepsilon_0 & , & \sup_{[0,T]} | b |_{H^{\bar{s}}} & \leq & K \ , \\ \sup_{[0,T]} \| \widetilde{w} \|_2 & \leq & K & , & \int_0^T \| \widetilde{w} \|_X^2 & \leq & K \ , \\ \int_0^T \| \nabla \widetilde{w} \|_2^2 & \leq & K & , & \int_0^T \| \widetilde{\nu} \|_\infty^2 & \leq & K \ , \\ \sup_{[0,T]} \| I^s \widetilde{\nu} \|_2 & \leq & \varepsilon_0 & , & \int_0^T | I^s \widetilde{\nu} |_{H^{\bar{s}}}^2 & \leq & K \ , \end{array}$$

alors toute solution $\widetilde{w} \in L^\infty(0, T; \dot{H}^s(\mathbf{R}^2))$ *de l'équation (8.1), de condition initiale* $\widetilde{w}_0 \in \dot{H}^s(\mathbf{R}^2)$, *vérifie, pour tout* $0 < \tau < T$,

$$\| I^s \widetilde{w}(\tau) \|_2^2 \ + \ C \int_0^\tau \| I^s \nabla \widetilde{w} \|_2^2 \ \leq \ C \, e^{C\tau} \left(\| I^s \widetilde{w}_0 \|_2^2 + K \right) . \qquad (8.10)$$

Remarques :

1. Les hypothèses portant sur b sont vérifiées dès lors que l'on peut appliquer à b les conclusions de la proposition 7.1 et de la première partie de la proposition 7.2, la condition de petitesse n'utilisant que la proposition 7.1.

2. Les hypothèses portant sur $\widetilde{w}$ sont assurées par la conclusion de la proposition 8.1. Notons qu'intervient une norme à poids, celle-ci nous est utile pour borner $\| I^s \widetilde{v} \|_2$.

3. Observons que, puisque $0 < s < 1$, on a $\| I^s \widetilde{v} \|_2 \leq C \| \widetilde{w} \|_X$ d'après l'estimation (C.7), et que, comme $1 \leq s + \bar{s} \leq 2$, l'estimation (C.6) donne $| \widetilde{v} |_{\dot{H}^{s+\bar{s}}} \leq C | \widetilde{w} |_{H^1}$. Ainsi la conclusion de la proposition 8.1 permet de satisfaire aux hypothèses sur $\widetilde{\nu}$ lorsque $\widetilde{\nu} = \widetilde{v}$. Notons qu'une fois encore intervient ici une norme à poids.

4. Enfin, la conclusion de la proposition 8.2 permet d'appliquer la seconde partie de la proposition 7.2 lorsque $\widetilde{\nu} = \widetilde{v}$.

Démonstration. Nous allons utiliser intensivement les estimations de commutateurs. Pour clarifier notre usage des estimations (A.1) et (A.2), introduisons σ tel que $1 < \sigma < 1 + s$, $s + \sigma < \tilde{s}$ et $\sigma < \bar{s}$.

Appliquons I^s à l'équation (8.1), puis prenons le produit scalaire, dans $L^2(\mathbf{R}^2)$, avec $I^s\widetilde{w}$. Il nous faut alors majorer chacun des autres termes apparaissant pour borner $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\| I^s\widetilde{w} \|_2^2$. Notons que, dans ce qui suit, nous abuserons[1] encore des notations en notant $(f\,,\,g)_*$ dès lors que $\int_{\mathbf{R}^2} fg$ est défini.

1. Un simple calcul montre que $[\,I^s, \mathcal{L}\,] = \frac{s}{2}\, I^s$. Nous obtenons ainsi

$$(I^s\widetilde{w}\,,\, I^s\mathcal{L}\widetilde{w})_* \;=\; -\,\|\,\nabla I^s\widetilde{w}\,\|_2^2 \;+\; \frac{1+s}{2}\;\|\,I^s\widetilde{w}\,\|_2^2 \tag{8.11}$$

puisque, en intégrant par parties, on a $(f\,,\,\mathcal{L}f)_* = -\|\,\nabla f\,\|_2^2 + \frac{1}{2}\,\|\,f\,\|_2^2$.

2. Estimons maintenant $(I^s\widetilde{w}\,,\, I^s\Lambda\widetilde{w})_*$. À cet effet, commençons par borner $(I^s\widetilde{w}\,,\, I^s((v^G\cdot\nabla)\,\widetilde{w}))_*$. Une intégration par parties donne

$$(I^s\widetilde{w}\,,\,(v^G\cdot\nabla)\,I^s\widetilde{w})_* \;=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}(v^G\cdot\nabla)\,|I^s\widetilde{w}|^2 \;=\; 0\;.$$

Ainsi, en usant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'estimation (A.2), on obtient

$$\begin{aligned}\big|\,(I^s\widetilde{w}\,,\, I^s((v^G\cdot\nabla)\,\widetilde{w}))_*\big| \;&=\; \big|\,(I^s\widetilde{w}\,,\,([I^s, v^G]\cdot\nabla)\,\widetilde{w})_*\big| \\ &\le\; C\,\|\,I^s\widetilde{w}\,\|_2\;|\,I^s v^G\,|_{H^\sigma}\;\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2\;.\end{aligned}$$

Bornons maintenant $(I^s\widetilde{w}\,,\, I^s((\widetilde{v}\cdot\nabla)\,G))_*$. D'une part, une inégalité de Hölder donne

$$\big|\,(I^s\widetilde{w}\,,\,(\widetilde{v}\cdot\nabla)\,I^sG)_*\big| \;\le\; C\;\|\,I^s\widetilde{w}\,\|_2\;\|\,\widetilde{v}\,\|_\infty\;\|\,\nabla I^sG\,\|_2\;.$$

D'autre part, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation de commutateur (A.1), il résulte

$$\big|\,(I^s\widetilde{w}\,,\,([I^s,\widetilde{v}]\cdot\nabla)\,G)_*\big| \;\le\; C\,\|\,I^s\widetilde{w}\,\|_2\;\|\,I^s\widetilde{v}\,\|_2\;|\,\nabla G\,|_{H^\sigma}\;.$$

Puisque $0 < s \le 1$, il nous suffit alors de tout rassembler, en tenant compte des estimations (C.7) et (C.4) de l'appendice traitant de la loi de Biot-Savart, qui impliquent $\|\,\widetilde{v}\,\|_\infty \le C(\|\,\widetilde{w}\,\|_X + \|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2)$ et $\|\,I^s\widetilde{v}\,\|_2 \le C\|\,\widetilde{w}\,\|_X$, pour obtenir

$$\big|\,(I^s\widetilde{w}\,,\, I^s\Lambda\widetilde{w})_*\big| \;\le\; C\;(\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2 + \|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2^2\,)\;. \tag{8.12}$$

3. Remarquons que comme précédemment, avec $\widetilde{\nu}$ en lieu de v^G,

$$(I^s\widetilde{w}\,,\,(\widetilde{\nu}\cdot\nabla)\,I^s\widetilde{w})_* \;=\; \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}(\widetilde{\nu}\cdot\nabla)\,|I^s\widetilde{w}|^2 \;=\; 0\;.$$

[1] $(\cdot\,,\,\cdot)_*$ serait plutôt un crochet de dualité.

En outre, l'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée avec l'estimation de commutateurs (A.1) donne

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^2} I^s\nabla\widetilde{w}\cdot([I^s,\widetilde{\nu}]\,\widetilde{w})\Big| \quad\leq\quad C\,\|\,I^s\nabla\widetilde{w}\,\|_2\;\|\,I^s\widetilde{\nu}\,\|_2\;|\,\widetilde{w}\,|_{H^\sigma}\ .$$

Ainsi, puisque $0\leq\sigma\leq 1+s$, une intégration par parties assure

$$\big|\,(I^s\widetilde{w}\,,\,I^s((\widetilde{\nu}\cdot\nabla)\,\widetilde{w}))_*|\quad\leq\quad C\,\|\,I^s\widetilde{\nu}\,\|_2\,\big(\,\|\,I^s\nabla\widetilde{w}\,\|_2^2+\|\,\widetilde{w}\,\|_2^2\big)\ .$$

4. D'une intégration par parties découle

$$(I^s\widetilde{w}\,,\,I^s\,\mathrm{div}\,(b\nabla\widetilde{w}))_*\quad=\quad-\int_{\mathbf{R}^2} b\,|I^s\nabla\widetilde{w}|^2-\int_{\mathbf{R}^2} I^s\nabla\widetilde{w}\cdot([I^s,b]\,\nabla\widetilde{w})\ .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'estimation de commutateurs (A.2), nous en déduisons, pour tout $\theta>0$,

$$\big|\,(I^s\widetilde{w}\,,\,I^s\,\mathrm{div}\,(b\nabla\widetilde{w}))_*|\;\leq\;(\|\,b_0\,\|_\infty+\theta)\,\|\,I^s\nabla\widetilde{w}\,\|_2^2+\frac{C}{\theta}|\,b\,|^2_{H^{s+\sigma}}\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2^2\,,\quad(8.13)$$

θ étant un paramètre destiné à être choisi suffisamment petit ultérieurement.

5. De manière analogue, il suit

$$\big|(I^s\widetilde{w}\,,\,I^s\mathrm{div}\,(b\nabla G))_*|\leq(\|\,b_0\,\|_\infty+\theta)\,\|\,I^s\nabla\widetilde{w}\,\|_2^2+C(\|\,b_0\,\|_\infty+\frac{1}{\theta}|\,b\,|^2_{H^{s+\sigma}}).\,(8.14)$$

6. Terminons par le terme de pression. Observons que d'une intégration par parties il résulte

$$(I^s\widetilde{w}\,,\,I^s\mathrm{div}\,(b\nabla^\perp\Pi))_*=-\int_{\mathbf{R}^2} I^s\nabla\widetilde{w}\cdot b\,I^s\,\nabla^\perp\Pi-\int_{\mathbf{R}^2} I^s\nabla\widetilde{w}\cdot([I^s,b]\;\nabla^\perp\Pi)$$

alors qu'une inégalité de Hölder conduit à

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^2} I^s\nabla\widetilde{w}\;\cdot\;b\,I^s\nabla^\perp\Pi\Big|\quad\leq\quad\|\,I^s\nabla\widetilde{w}\,\|_2\;\|\,b_0\,\|_\infty\;\|\,I^s\nabla\Pi\,\|_2$$

et que l'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée avec l'estimation de commutateurs (A.2) permet de démontrer

$$\Big|\int_{\mathbf{R}^2} I^s\nabla\widetilde{w}\cdot([I^s,b]\;\nabla^\perp\Pi)\Big|\quad\leq\quad C\,\|\,I^s\nabla\widetilde{w}\,\|_2\;|\,b\,|_{H^{s+\sigma}}\,\|\,\nabla\Pi\,\|_2\ .$$

Or, d'une part, l'estimation de pression (B.2) appliquée à l'équation (8.2), secondée par les inégalités de Hölder, implique

$$\|\,\nabla\Pi\,\|_2\;\leq\;C\,\big(|\alpha|+|\alpha|^2+\|\,\triangle\widetilde{v}\,\|_2+|\alpha|\,\|\,\nabla\widetilde{v}\,\|_2+\|\,\widetilde{\nu}\,\|_\infty\|\,\nabla\widetilde{v}\,\|_2+|\alpha|\,\|\,\widetilde{\nu}\,\|_\infty\big)$$

ce qui conduit, au vu des estimations consacrées à la loi de Biot-Savart, à

$$\| \nabla\Pi \|_2 \;\le\; C\left(|\alpha| + |\alpha|\, \| \widetilde{\nu} \|_\infty + |\alpha|^2 + (|\alpha| + \| \widetilde{\nu} \|_\infty)\, \| \widetilde{w} \|_2 + \| \nabla\widetilde{w} \|_2\right) .$$

Et, d'autre part, l'estimation de pression (B.5) appliquée à l'équation (8.2), encore une fois combinée avec des inégalités de Hölder, assure

$$\| I^s\nabla\Pi \|_2 \;\le\; C\,\left(\, |\, b\, |_{H^{s+\sigma}} \| \nabla\Pi \|_2 + \| I^s((1+b) \triangle v) \|_2 + \| I^s(\nu\cdot\nabla)\, v \|_2\right)$$

tandis qu'en commutant I^s et b à l'aide de l'estimation (A.2), on obtient après quelques calculs

$$\begin{aligned} \| I^s((1+b) \triangle v) \|_2 \;&\le\; C\ |\, b\, |_{H^{s+\sigma}}\ (\, |\alpha| + \| \nabla\widetilde{w} \|_2) \\ &+\; C\ (1 + \| b_0 \|_\infty)\ (\, |\alpha| + \| I^s\nabla\widetilde{w} \|_2) \end{aligned}$$

et que, dans le même esprit, commuter I^s et ν démontre

$$\begin{aligned} \| I^s((\nu\cdot\nabla)\, v) \|_2 \;&\le\; C\ (\, |\alpha| + |\, I^s\widetilde{\nu}\, |_{H^\sigma})\ (\, |\alpha| + \| \widetilde{w} \|_2) \\ &+\; C\ (\, |\alpha| + \| \widetilde{\nu} \|_\infty)\ \ (\, |\alpha| + \| I^s\widetilde{w} \|_2)\ . \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $s+\sigma \le \tilde{s}$, rassembler tout cela grossièrement donne, dès lors que $\varepsilon_0 \le 1$,

$$\begin{aligned} \left| (I^s\widetilde{w}\,,\, I^s \operatorname{div}(b\,\nabla^\perp\Pi))_*\right| \;&\le\; C\,(|\alpha|^2 + \| \widetilde{\nu} \|_\infty^2)\ \| I^s\widetilde{w} \|_2^2 \\ &+\; C\,(\varepsilon_0 + \theta)\ \| I^s\nabla\widetilde{w} \|_2^2 \\ &+\; C\,(\varepsilon_0 + \tfrac{1}{\theta})\ (1 + |\alpha| + K)^4 \\ &\quad \times(1 + \| \widetilde{\nu} \|_\infty^2 + \| \nabla\widetilde{w} \|_2^2 + |\, I^s\widetilde{\nu}\, |_{H^\sigma}^2) \end{aligned} \tag{8.15}$$

où $\theta > 0$ est encore une fois un paramètre à choisir suffisamment petit.

Choisissons donc θ suffisamment petit. Alors, compte tenu de $\sigma \le \bar{s}$ et $s+\sigma \le \tilde{s}$, pour ε_0 suffisamment[2] petit, en regroupant toutes ces estimations, nous obtenons après intégration en temps, avec des constantes dépendant des paramètres, pour tout $0 < \tau < T$,

$$\begin{aligned} \| I^s\widetilde{w}(\tau) \|_2^2 \;&+\; C\int_0^\tau \| I^s\nabla\widetilde{w} \|_2^2 \\ &\le\; \| I^s\widetilde{w}_0 \|_2^2 + C\int_0^\tau (1 + \| \widetilde{\nu} \|_\infty^2)\ \| I^s\widetilde{w} \|_2^2 \\ &+\; C\,\tau + C\int_0^\tau \left(\| \widetilde{w} \|_X^2 + \| \nabla\widetilde{w} \|_2^2 + \| \widetilde{\nu} \|_\infty^2 + |\, I^s\widetilde{\nu}\, |_{H^{\bar{s}}}^2\right)\ . \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall termine alors la démonstration. ■

[2] Indépendamment de T et K.

8.3 Estimation pour la convergence

Pour conclure ce chapitre, sous des hypothèses comparables aux estimations *a priori* que nous venons d'établir, nous bornons la différence entre des solutions d'équations du type (8.1). Cette borne nous servira à démontrer la convergence de notre schéma de construction d'une solution à (6.10) et l'unicité d'une telle solution.

Pour $i = 1, 2$, considérons l'équation

$$\partial_\tau \widetilde{w}_i - (\mathcal{L} - \alpha\Lambda)\widetilde{w}_i + (\widetilde{\nu}_i \cdot \nabla)\widetilde{w}_i = \mathrm{div}\,\big(b_i(\nabla w_i + \nabla^\perp \Pi_i)\big) \quad (8.16)$$

où $\mathcal{L}$ et Λ sont définis par (6.11), b_i et $\widetilde{\Omega}_i$ sont des fonctions réelles, α est un paramètre réel,

$$\begin{array}{rclcrcl} \widetilde{v}_i &=& K_{BS} \star \widetilde{w}_i &,& \widetilde{\nu}_i &=& K_{BS} \star \widetilde{\Omega}_i\ , \\ v_i &=& \alpha\, v^G + \widetilde{v}_i &,& \nu_i &=& \alpha\, v^G + \widetilde{\nu}_i\ , \\ w_i &=& \alpha\, G + \widetilde{w}_i &,& \Omega_i &=& \alpha\, G + \widetilde{\Omega}_i\ , \end{array}$$

et $\nabla\Pi_i$ s'obtient en résolvant

$$\mathrm{div}\,\big((1+b_i)\nabla\Pi_i\big) = \mathrm{div}\,\big((1+b_i)\triangle v_i - (\nu_i \cdot \nabla) v_i\big)\ . \quad (8.17)$$

Soulignons que nous avons choisi d'écrire $\widetilde{\nu}$ sous la forme $\widetilde{\nu} = K_{BS} \star \widetilde{\Omega}$ pour mettre en avant la symétrie des hypothèses portant alors sur $\widetilde{\Omega}$ et $\widetilde{w}$.

Avant d'énoncer la proposition de cette section, convenons que, par souci de concision, nous noterons $\delta f = f_2 - f_1$ pour toutes fonctions f_2, f_1.

Proposition 8.3 *Soient $\alpha \in \mathbf{R}$, $K > 0$, $\sigma > 2$, et des réels ϕ, s, q tels que $0 < \phi < s < 1$ et $\max\left(\frac{2}{\phi}, 4\right) < p < +\infty$.*

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $K', T > 0$, il existe $C > 0$ de sorte que, si $\widetilde{w}_1$ et $\widetilde{w}_2$ satisfont à (8.16), avec la même condition initiale $\widetilde{w}_0$ et

1. $|\, b_0\,|_{w,4} \le \varepsilon_0\,,\ |\, b_0\,|_{w,\infty} \le \varepsilon_0$
2. *pour tout $0 < \tau < T$, pour $i = 1, 2$, pour tout $2 \le r \le \infty$,*

$$\|\, b_i(\tau)\,\|_r \le \|\, b_0\,\|_r\, e^{-\frac{\tau}{r}} \quad , \quad |\, b_i(\tau)\,|_{w,r} \le K\, |\, b_0\,|_{w,r}\, e^{-\frac{\tau}{r}}$$

3. *pour tout $0 < \tau < T$, pour $i = 1, 2$, $|\, b_i(\tau)\,|_{H^\sigma} \le K'$*
4. *pour tout $0 < \tau < T$, pour $i = 1, 2$,*

$$\|\, \widetilde{\Omega}_i(\tau)\,\|_X^2 + \int_0^\tau \|\, \nabla\widetilde{\Omega}_i\,\|_X^2 \le \varepsilon_0$$

$$|\, \widetilde{\Omega}_i(\tau)\,|_{H^s} + \int_0^\tau |\, \nabla\widetilde{\Omega}_i\,|_{H^s}^2 \le K'$$

5. pour tout $0 < \tau < T$, *pour* $i = 1,2$,

$$\begin{aligned} \| \widetilde{w}_i(\tau) \|_X^2 + \int_0^\tau \| \nabla \widetilde{w}_i \|_X^2 &\leq \varepsilon_0 \\ | \widetilde{w}_i(\tau) |_{H^s} + \int_0^\tau | \nabla \widetilde{w}_i |_{H^s}^2 &\leq K' \ , \end{aligned}$$

alors pour tout $0 < \tau < T$,

$$\begin{aligned} \| \delta\widetilde{w}(\tau) \|_2^2 \ &+ \ C \int_0^\tau \big(\| \delta\widetilde{w} \|_X^2 + \| \nabla(\delta\widetilde{w}) \|_X^2 + \| \, | \cdot | \, (\delta\widetilde{w}) \|_X^2 \big) \\ &\leq \ C \int_0^\tau (1 + | \widetilde{w}_1 |_{w,p}^2 + | \nabla \widetilde{w}_1 |_{H^\phi}^2) \ (| \delta b |_{w,p}^2 + \| \delta\widetilde{\Omega} \|_X^2). \quad (8.18) \end{aligned}$$

Remarque : Gardons en tête que les propositions 7.1 et 8.1 fourniront des bornes ε_0 et K qui ne dépendent pas du temps, alors que les propositions 7.2 et 8.2 donneront une borne K' dépendant du temps. On comprend alors qu'il est primordial dans cette proposition que la petitesse, exigée sur ε_0, ne dépende ni de T ni de K'.

Démonstration. Combinons les équations (8.3) pour $i = 1,2$, afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \partial_\tau(\delta\widetilde{w}) \ &- \ (\mathcal{L} - \alpha\,\Lambda)\,(\delta\widetilde{w}) + \big(\widetilde{\nu}_2 \cdot \nabla\big)\,(\delta\widetilde{w}) - \mathrm{div}\,\big(b_2\,(\nabla(\delta\widetilde{w}) + \nabla^\perp\Pi)\big) \\ &= \ -((\delta\widetilde{\nu}) \cdot \nabla)\,\widetilde{w}_1 + \mathrm{div}\,\big((\delta b)\nabla w_1\big) \qquad (8.19) \\ &\qquad + \mathrm{div}\,(b_2\nabla^\perp R) + \ \mathrm{div}\,(b_2\nabla^\perp(\delta S)) + \ \mathrm{div}\,\big((\delta b)\nabla^\perp\Pi_1\big) \end{aligned}$$

où Π, R, S_1 et S_2 s'obtiennent en résolvant

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\big((1+b_2)\nabla\Pi\big) \ &= \ \mathrm{div}\,\big((1+b_2)\triangle(\delta\widetilde{v}) - (\widetilde{\nu}_2 \cdot \nabla)\,(\delta\widetilde{\nu})\big) \\ \mathrm{div}\,\big((1+b_2)\nabla R\big) \ &= \ \mathrm{div}\,\big(- \alpha(v^G \cdot \nabla)\,(\delta\widetilde{v}) + (\delta b)\triangle\widetilde{v}_1 - ((\delta\widetilde{\nu}) \cdot \nabla)\,\widetilde{v}_1\big) \\ \mathrm{div}\,\big((1+b_i)\nabla S_i\big) \ &= \ \mathrm{div}\,\big((1+b_1)\triangle v_1 - (\nu_1 \cdot \nabla)\,v_1\big) \ , \qquad \text{pour } i = 1,2 \ . \end{aligned}$$

Nous avons ici décomposé Π_2 en $\Pi_2 = \Pi + R + S_2$ et renommé Π_1, $\Pi_1 = S_1$.

Nous allons maintenant procéder comme dans la démonstration de la proposition 8.1, c'est-à-dire majorer les termes issus du produit scalaire, dans X, de l'équation (8.19) et de $\delta\widetilde{w}$ afin d'estimer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\| \delta\widetilde{w} \|_X^2$. Les termes issus du membre de gauche de l'équation (8.3) se majorent comme ceux de l'équation (8.1). Contentons-nous de montrer comment borner les autres.

Auparavant, il est utile de remarquer que la quantité $\| G^r \, \nabla(G^{r'} f) \|_2^2$ est contrôlée par $\| \nabla f \|_X^2 + \| \, | \cdot | \, f \|_X^2$ dès lors que $r + r' = -1/2$.

1. En intégrant par parties, on obtient à l'aide des inégalités de Hölder

$$\big| \, (\delta\widetilde{w} \, , \, ((\delta\widetilde{\nu}) \cdot \nabla)\,\widetilde{w}_1)_X \big| \ \ \leq \ \ \| G^{\frac{1}{2}} \, \nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w})) \|_2 \ | \widetilde{w}_1 |_{w,p} \ \| \delta\widetilde{\nu} \|_q$$

où $2 < q < \infty$ est tel que $1/p + 1/q = 1/2$. L'estimation (C.3) sur la loi de Biot-Savart donne donc

$$\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,((\delta\widetilde{\nu})\cdot\nabla)\,\widetilde{w}_1)_X\big| \;\leq\; \theta\,\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2^2 + \frac{C}{\theta}\,|\,\widetilde{w}_1\,|_{w,p}^2\,|\,\delta\widetilde{\Omega}\,|_{w,2}^2 \quad (8.20)$$

où $\theta > 0$ est un paramètre à choisir petit ultérieurement.

2. Avec le même choix de q, il s'ensuit de même

$$\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}((\delta b)\nabla w_1))_X\big| \quad\leq\quad \|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2\;|\,\delta b\,|_{w,p}\;\|\,\nabla w_1\,\|_q$$

puis avec cette fois une injection de Sobolev

$$\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}((\delta b)\nabla w_1))_X\big| \leq \theta\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2^2 + \frac{C}{\theta}|\,\nabla w_1\,|_{H^\phi}^2\,|\,\delta b\,|_{w,p}^2\,. \quad (8.21)$$

3. De même, il résulte également

$$\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b_2\nabla^{\perp}R))_X\big| \quad\leq\quad C\;\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2\;|\,b_0\,|_{w,\infty}\,\|\,\nabla R\,\|_2\;.$$

Alors l'estimation de pression (B.2), combinée avec l'estimation (C.3) sur la loi de Biot-Savart, des inégalités de Hölder et une injection de Sobolev, permet de démontrer

$$\begin{aligned}\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b_2\nabla^{\perp}R))_X\big| \quad\leq\quad & \theta\,\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2^2 \\ & + \frac{C}{\theta}\,|\,b_0\,|_{w,\infty}^2|\,\nabla\widetilde{w}_1\,|_{H^\phi}^2\;\|\,\delta b\,\|_p^2 \\ & + \frac{C}{\theta}\,|\alpha|\;|\,b_0\,|_{w,\infty}^2\;\|\,\delta\widetilde{w}\,\|_2^2 \\ & + \frac{C}{\theta}\,|\,b_0\,|_{w,\infty}^2\;\|\,\widetilde{w}_1\,\|_X^2\;\|\,\delta\widetilde{\Omega}\,\|_X^2\;. \quad (8.22)\end{aligned}$$

4. Après intégration par parties, grâce à l'estimation de pression (B.3) et aux inégalités de Hölder, on obtient, avec le même choix de q que précédemment,

$$\begin{aligned}\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b_2\nabla^{\perp}(\delta S)))_X\big| \quad\leq\quad & C\;\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2\;|\,b_0\,|_{w,\infty} \\ & \times\;\|\,\delta b\,\|_p\;\|\,(1+b_1)\triangle v_1 - (\nu_1\cdot\nabla)\,v_1\,\|_q\;.\end{aligned}$$

Compte tenu de $2/\phi < 1/p < 1/q < 1$, en exploitant les estimations (C.3) et (C.5) sur la loi de Biot-Savart, ainsi qu'une injection de Sobolev, on déduit d'une inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b_2\nabla^{\perp}(\delta S)))_X\big| \quad\leq\quad & \theta\;\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2^2 \\ + \quad & \frac{C}{\theta}\;|\,b_0\,|_{w,\infty}^2\;\|\,\delta b\,\|_p^2 \\ & \times\big[\,|\,\nabla w_1\,|_{H^\phi}^2 + \|\,\Omega_1\,\|_X^2\;\|\,w_1\,\|_p^2\,\big]\;. \quad (8.23)\end{aligned}$$

5. Encore une fois, avec le même choix de q, une intégration par parties combinée avec les inégalités de Hölder donne

$$\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}((\delta b)\nabla^{\perp}\Pi_1))_X\big| \quad\leq\quad \|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2\;|\,\delta b\,|_{w,p}\;\|\,\nabla^{\perp}\Pi_1\,\|_q\;.$$

On termine alors comme pour le terme précédent en remplaçant l'estimation de pression (B.3) par (B.2) pour obtenir

$$\begin{aligned}\big|\,(\delta\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}((\delta b)\nabla\Pi_1))_X\big| \,\leq\, &\theta\;\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,(\delta\widetilde{w}))\,\|_2^2\\ &+\;\frac{C}{\theta}\;|\,\delta b\,|_{w,p}^2\,\big[\,|\,\nabla w_1\,|_{H^{\phi}}^2+\|\,\Omega\,\|_X^2\;\|\,w_1\,\|_p^2\,\big].\end{aligned}\tag{8.24}$$

Il ne nous reste plus qu'à tout rassembler, en choisissant θ assez petit, et à intégrer en temps pour terminer cette démonstration et ce chapitre. ■

Chapitre 9

Démonstration du théorème 6.1

Dans ce dernier chapitre, nous exploitons les différentes bornes établies sur les équations linéarisées pour démontrer le théorème 6.1. Pour plus de clarté, nous démontrons séparément l'existence et l'unicité d'une part et le comportement asymptotique en temps long d'autre part.

9.1 Existence et unicité

Dans cette section, nous établissons la composante *existence et unicité* du théorème 6.1. Auparavant énonçons un lemme élémentaire sur la convergence de séries de fonctions destiné à prouver la convergence de notre schéma de construction d'une solution.

Lemme 9.1 *Soient $T > 0$ et $1 < p \leq \infty$. Soient (f_k) une suite à valeurs dans $L^\infty(0, T; \mathbf{R}^+)$ et (g_k) une suite bornée dans $L^p(0, T; \mathbf{R}^+)$ telles que, pour tout $0 < \tau < T$ et tout $k \in \mathbf{N}$, l'on ait*

$$f_{k+1}(\tau) \quad \leq \quad \int_0^\tau f_k \; g_k \; .$$

Alors (f_k) est uniformément sommable, c'est-à-dire qu'existe une constante $C_T > 0$ telle que, pour tout $0 < \tau < T$,

$$\sum_{k \geq 0} f_k(\tau) \quad \leq \quad C_T \; .$$

Démonstration. Il est aisé et suffisant de montrer par récurrence à l'aide d'une inégalité de Hölder que pour tout $0 < \tau < T$ et tout $k \in \mathbf{N}$ l'on a

$$f_k(\tau) \;\leq\; C\, K^k \left(\frac{\tau^k}{k!}\right)^{1-\frac{1}{p}} \;,$$

K étant une borne pour (g_k) dans $L^p(0,T;\mathbf{R}^+)$. $\blacksquare$

Existence. Construisons une suite $((b_k,\widetilde{w}_k))_{k\in\mathbf{N}^*}$ de paires de fonctions, de même condition initiale $(b_0,\widetilde{w}_0)$ en $\tau=0$, telle que, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_\tau\, b_{k+1} & + & (v_k-\frac{1}{2}\xi)\cdot\nabla\, b_{k+1} \;=\; 0 \\ \partial_\tau \widetilde{w}_{k+1} & - & (\mathcal{L}-\alpha\,\Lambda)\,\widetilde{w}_{k+1}+\big(\widetilde{v}_k\cdot\nabla\big)\,\widetilde{w}_{k+1} \\ & = & \mathrm{div}\,\big(b_k\,(\nabla w_{k+1}+\nabla^\perp\Pi_{k+1})\big) \end{array}\right.$$

où $\mathcal{L}$ et Λ sont définis par (6.11), $(\widetilde{v}_k)$ est obtenu à partir de $(\widetilde{w}_k)$ *via* la loi de Biot-Savart, et, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$, $v_k=\alpha\, v^G+\widetilde{v}_k$, $w_k=\alpha\, G+\widetilde{w}_k$, et $\nabla\Pi_k$ s'obtient en résolvant

$$\mathrm{div}\,\big((1+b_k)\,\nabla\Pi_{k+1}\big) \;=\; \mathrm{div}\,\big((1+b_k)\,\triangle\, v_{k+1}-(v_k\cdot\nabla)\,v_{k+1}\big)\ .$$

Dans le cas $k=0$, c'est-à-dire pour définir $(b_1,\widetilde{w}_1)$, on résout le système avec $\widetilde{v}_k=0$ et $b_k=0$. La construction de cette suite ne pose pas de problème particulier, la première équation du système est une équation de transport par un champ de vitesse, Lipschitzien en espace, engendrant un flot, et la seconde, si (b_k) reste petite, une équation linéaire parabolique.

Montrons simplement comment propager les bornes sur $((b_k,\widetilde{w}_k))_{k\in\mathbf{N}^*}$.

Estimations de type 1. Fixons $K_0>0$ et choisissons $\varepsilon_0>0$ suffisamment petit. Nous pouvons propager

1. pour tout $1\le p\le\infty$ et tout $2\le q\le\infty$, grâce à la proposition 7.1,
$$\|\, b_k(\tau)\,\|_p \;\le\; \|\, b_0\,\|_p\; e^{-\frac{\tau}{p}} \quad,\quad |\, b_k(\tau)\,|_{w,q} \;\le\; |\, b_0\,|_{w,q}\; e^{-\frac{\tau}{q}}\; e^{K_0}$$
2. et, grâce à la proposition 8.1,
$$\begin{array}{l}\|\,\widetilde{w}_k(t)\,\|_X^2 \;+\; C_{K_0}\displaystyle\int_0^\tau \big(\,\|\,\widetilde{w}_k\,\|_X^2+\|\,\nabla\widetilde{w}_k\,\|_X^2+\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}_k\,\|_X^2\,\big) \\ \qquad\le\; C_{K_0}\,(\,\|\,\widetilde{w}_0\,\|_X^2+|\,b_0\,|_{w,4}\,)\end{array}$$

qui donne, grâce à la proposition C.1 et une injection de Sobolev,

$$\begin{array}{c}\|\,\widetilde{v}_k\,\|_8 \;\le\; C\,\|\,\widetilde{w}_k\,\|_{8/5} \;\le\; C\,\|\,\widetilde{w}_k\,\|_X \;\le\; K_0 \\ \int_0^\tau\|\,\widetilde{v}_k\,\|_\infty^2 \;\le\; C\int_0^\tau\,\big(\,\|\,\widetilde{w}_k\,\|_X^2+\|\,\nabla\widetilde{w}_k\,\|_2^2\big) \;\le\; \min\,(\frac{1}{24},K_0)\ .\end{array}$$

Estimations de type 2. Quitte à choisir, indépendemment du temps, ε_0 encore plus petit, en tenant compte du fait que la proposition C.2 permet de déduire des bornes précédentes, pour $0<s<1$ et $1<\bar{s}<2-s$,

$$\begin{array}{lcl} \int_0^\tau|\,\nabla v_k\,|_{H^1} & \le & C(\tau+\tau^{1/2}\,(\int_0^\tau|\,\nabla\widetilde{v}_k\,|_{H^1}^2)^{1/2}) \;\le\; C\;(\tau+\int_0^\tau|\,\widetilde{w}_k\,|_{H^1}^2) \\ \|\,I^s\widetilde{v}_k(\tau)\,\|_2 & \le & C\;\|\,\widetilde{w}_k(\tau)\,\|_X \qquad\qquad\qquad\qquad \le\; C_{K_0}\,\varepsilon_0 \\ \int_0^\tau|\,I^s\widetilde{v}_k\,|_{H^{\bar{s}}}^2 & \le & C\;\int_0^\tau(\|\,\widetilde{w}_k\,\|_X^2+\|\,\nabla\widetilde{w}_k\,\|_2^2) \qquad \le\; K_0\ , \end{array}$$

nous pouvons propager, pour $0<\tau<T$,

1. pour $1+s<\tilde{s}<2$, grâce à la première partie de la proposition 7.2,

$$|\, b_k(\tau)\,|_{H^{\tilde{s}}} \quad \le \quad C_{K_0,T}$$

2. et au moyen de la proposition 8.2

$$\|\, I^s \widetilde{w}_k(\tau)\,\|_2^2 \ + \ C \int_0^\tau \|\, I^s \nabla \widetilde{w}_k \,\|_2^2 \quad \le \quad C_{K_0,T}$$

qui fournit *via* la proposition C.2, pour $0<\tau<T$,

$$\int_0^\tau |\, \nabla v_k \,|_{H^{s+1}} \ \le \ C\left(t + \int_0^\tau (\,\|\, \widetilde{w}_k \,\|_2^2 + \|\, I^s \nabla \widetilde{w}_k \,\|_2^2\,)\right) \ \le \ C_{K_0,T}$$

puis, grâce à la seconde partie de la proposition 7.2, pour tout $0<\tau<T$,

$$|\, b_k(\tau)\,|_{H^{s+2}} \quad \le \quad C_{K_0,T} \ .$$

Une fois ces bornes établies, on peut montrer la convergence de notre schéma. Pour cela, considérons $(\delta b)_k = b_{k+1}-b_k$ et $(\delta\widetilde{w})_k = \widetilde{w}_{k+1}-\widetilde{w}_k$. Choisissons p tel que $\max(4,\frac{2}{s})<p<q_0$ pour appliquer les propositions 7.3 et 8.3. Nous obtenons pour $T>0$, pour tout $0<\tau<T$ et tout $k\in\mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}&|\,(\delta b)_{k+1}(\tau)\,|_{w,p}^2 \ + \ \|\,(\delta\widetilde{w})_{k+1}(\tau)\,\|_X^2 \\ &\le \ C_T \ \textstyle\int_0^\tau \ (\,1+|\,\widetilde{w}_k\,|_{w,p}^2+|\,\nabla\widetilde{w}_k\,|_{H^\phi}^2\,) \ \ (\,|\,(\delta b)_k\,|_{w,p}^2 \ + \ \|\,(\delta\widetilde{w})_k\,\|_X^2\,)\end{aligned} \tag{9.1}$$

pour $0<\phi<s$ tel que $\frac{2}{\phi}<p<+\infty$.

Pour user du lemme 9.1 avec $f_k = |\,(\delta b)_k\,|_{w,p}^2 + \|\,(\delta\widetilde{w})_k\,\|_2^2$, notons que

– puisque la suite $(G^{-1/2}\widetilde{w}_k)$ est bornée dans $L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^2))$ et que la suite $(\nabla(G^{-1/2}\widetilde{w}_k))$ l'est dans $L^2(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^2))$, alors, *via* une injection de Sobolev, par interpolation, la suite $(\widetilde{w}_k)$ est bornée dans $L^r(\mathbf{R}^+;L^p_w(\mathbf{R}^2))$, pour un certain $2<r<\infty$;

– puisque la suite $(\widetilde{w}_k)$ est bornée dans $L^\infty(\mathbf{R}^+;L^2(\mathbf{R}^2))$ ainsi que dans $L^2(0,T;H^{s+1}(\mathbf{R}^2))$, alors, par interpolation, la suite $(\nabla\widetilde{w}_k)$ est bornée dans $L^{r'}(0,T;H^\phi(\mathbf{R}^2))$ pour un certain $2<r'<\infty$.

Ainsi le lemme 9.1 assure que (b_k) converge dans $L^p_w(\mathbf{R}^2)$ et $(\widetilde{w}_k)$ dans X_0, uniformément sur tout intervalle de temps fini. Cela implique directement que (b_k) et $(\widetilde{w}_k)$ convergent également dans $L^2(\mathbf{R}^2)$. Maintenant, observons que, par interpolation, on déduit

– puisque (b_k) est bornée dans $H^{s+2}(\mathbf{R}^2)$, alors (b_k) converge également dans $H^\sigma(\mathbf{R}^2)$, pour tout $0<\sigma<s+2$

– puisque $(\widetilde{w}_k)$ est bornée dans $H^s(\mathbf{R}^2)$, alors $(\widetilde{w}_k)$ converge également dans $H^\sigma(\mathbf{R}^2)$, pour tout $0<\sigma<s$.

Ces propriétés suffisent à montrer que la limite de la suite $((b_k, \widetilde{w}_k))$ est bien une solution du système initial (6.10).

On recouvre la totalité de la régularité sur la limite par une simple application du lemme de Fatou.

Unicité. Nous obtenons une borne similaire à (9.1) pour la différence entre deux solutions du système (6.10) de même condition initiale. Le lemme de Gronwall permet alors de conclure à l'unicité. □

9.2 Stabilité asymptotique

Parachevons la démonstration du théorème 6.1 en établissant sa composante *asymptotique*. Pour plus de clarté, reformulons cette composante, en supposant données certaines des estimations que nous venons de démontrer sous les hypothèses du théorème 6.1.

Théorème 9.2 *Soient* $\alpha \in \mathbf{R}$ *et* $K > 0$.
Pour tout $0 < \gamma < 1/2$, *il existe des constantes strictement positives* ε_0 *et* K' *telles que si* $(b, \widetilde{w})$ *est une solution du système (6.10), de condition initiale* $(b_0, \widetilde{w}_0)$, *vérifiant* $\widetilde{w}_0 \in X_0$,

$$\| b_0 \|_X \ \leq\ \varepsilon_0\,, \quad |\, b_0 \,|_{w,\infty} \ \leq\ \varepsilon_0\,,$$

et, pour tout $\tau > 0$, $\quad \| \widetilde{w}(\tau) \|_X^2 \ +\ \int_0^\tau \| \nabla \widetilde{w} \|_X^2 \ \leq\ \varepsilon_0$,

$$\| b(\tau) \|_X \ \ \leq\ \ K \,|\, b_0 \,|_{w,2}\ e^{-\frac{\tau}{2}}\ , \qquad |\, b(\tau) \,|_{w,\infty} \ \ \leq\ \ K \,|\, b_0 \,|_{w,\infty}\ ,$$

alors, pour tout $\tau > 0$, $\quad \| \widetilde{w}(\tau) \|_X \ \leq\ K'\ e^{-\gamma\tau}\ (\, \| \widetilde{w}_0 \|_X + \| b_0 \|_X\,)$.

Démonstration. La démonstration est essentiellement la même que celle de la proposition 8.1, à ceci près que nous disposons déjà d'une borne mais que notre objectif est plus précis.

Donnons-nous $0 < \gamma < \gamma' < 1/2$ et reformulons la majoration (8.4) :

$$(\widetilde{w}\,,\, \mathcal{L}\,\widetilde{w})_X \ \leq\ -\gamma' \,\| \widetilde{w} \|_X^2 - (\frac{1}{2} - \gamma')\,\big(\,\frac{1}{3}\,\| \nabla \widetilde{w} \|_X^2 + \frac{1}{32}\,\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2\,\big)\ . \quad (9.2)$$

Nous traitons les autres termes comme dans la démonstration de la proposition 8.1, à l'exception du terme de pression et de celui de convection non linéaire :

$$\big|\,(\widetilde{w}\,,\, \widetilde{v} \cdot \nabla \widetilde{w})_X\big| \ \ \leq\ \ C\,\| \widetilde{w} \|_X\ \big(\,\| \widetilde{w} \|_X^2 + \| \nabla \widetilde{w} \|_X^2\,\big) \qquad (9.3)$$

borné grâce à la borne (C.4) sur la loi de Biot-Savart et à une injection de Sobolev.

Nous bornons le terme de pression comme suit :

$$\left|\,(\widetilde{w}\,,\,\mathrm{div}\,(b\,\nabla^{\perp}\Pi))_X\right| \quad\le\quad C\,\|\,G^{\frac{1}{2}}\,\nabla(G^{-1}\,\widetilde{w})\,\|_2\,\|\,b\,\nabla^{\perp}\Pi\,\|_X$$

où l'on majore $\|\,b\,\nabla^{\perp}\Pi\,\|_X$ par

$$\begin{aligned}\|\,b\,\nabla^{\perp}\Pi\,\|_X \le C\,\Big(&\|\,b_0\,\|_X\;e^{-\frac{\tau}{2}}\;\|\,\alpha\,(1{+}b)\,\triangle\,v^G-\alpha^2\,(v^G\cdot\nabla)\,v^G\,\|_\infty\\ &+|\,b_0\,|_{w,\infty}\|\,(1{+}b)\,\triangle\,\widetilde{v}-\alpha\,((v^G\cdot\nabla)\,\widetilde{v}+(\widetilde{v}\cdot\nabla)\,v^G)-(\widetilde{v}\cdot\nabla)\,\widetilde{v}\,\|_2\Big)\end{aligned}$$

où
$$\begin{aligned}\|\,(1+b)\,\triangle\,\widetilde{v}\,\|_2 &\le C\,(1+|\,b_0\,|_{w,\infty})\,\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2\,,\\ \|\,(v^G\cdot\nabla)\,\widetilde{v}\,\|_2 &\le C\,\|\,v^G\,\|_\infty\,\|\,\widetilde{w}\,\|_2\\ \|\,(\widetilde{v}\cdot\nabla)\,v^G\,\|_2 &\le C\,\|\,\nabla v^G\,\|_4\,\|\,\widetilde{v}\,\|_4 \;\le\; C\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X\\ \|\,(\widetilde{v}\cdot\nabla)\,\widetilde{v}\,\|_2 &\le C\,\|\,\widetilde{v}\,\|_\infty\,\|\,\nabla\widetilde{v}\,\|_2 \;\le\; C\big(\|\,\widetilde{w}\,\|_X+\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2\big)\,\|\,\widetilde{w}\,\|_2.\end{aligned}$$

En procédant ainsi, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2+\gamma\,\|\,\widetilde{w}\,\|_X^2+C\,\Big(\|\,\nabla\widetilde{w}\,\|_2^2+\|\,|\cdot|\,\widetilde{w}\,\|_X^2\Big)\;\le\;C\,\|\,b_0\,\|_X^2\;e^{-\tau} \qquad (9.4)$$

qui, après une intégration en temps, termine cette démonstration, puisque l'on a $2\,\gamma<1$. ■

Troisième partie

Fluides compressibles

Chapitre 10

Introduction à la troisième partie

Dans cette partie, nous analysons le comportement asymptotique en temps long d'un fluide compressible, faiblement inhomogène, dont la vitesse initiale est petite et de carré intégrable et la vorticité initiale est bien localisée en espace. Cette analyse, très proche de celle de David Hoff et Kevin Zumbrun [32] pour des vitesses initiales intégrables, nous permet de retrouver les profils asymptotiques correspondant au cas homogène. Dans les normes de localisation de la vitesse, disons dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ avec p proche de 1, il apparaît néanmoins des effets dus à la propagation d'ondes de compression. Nous discutons également les obstacles à l'étude générale du comportement des fluides compressibles faiblement inhomogènes dont la vorticité initiale est bien localisée mais la vitesse n'est plus nécessairement de carré intégrable.

Tout au long de ce mémoire, nous nous intéressons à l'asymptotique en temps long des fluides visqueux bidimensionnels, homogènes ou faiblement inhomogènes, la seule restriction à la généralité étant que la vorticité initiale est toujours bien localisée, ou plutôt que la dynamique asymptotique ne doit pas être influencée par un manque de localisation du tourbillon initial. L'archétype de l'écoulement que nous avons en ligne de mire correspond[1] à une combinaison de masses de Dirac pour le tourbillon initial, une superposition de *vortex*. Pour ces écoulements localisés en vorticité, nous précisons ou retrouvons dans d'autres cadres le comportement typique pour l'équation incompressible homogène.

L'un des inconvénients d'une telle restriction sur la localisation du tourbillon réside dans l'incompatibilité entre les localisations en espace, simultanées, de la vitesse, et du tourbillon. Ainsi si le tourbillon initial $\omega_0 = \operatorname{rot} u_0$

[1]Bien que nous ne considérions que des écoulements réguliers, ce qui correspond, au moins pour des écoulements incompressibles, à n'étudier l'écoulement dérivant de *vortex* qu'après un temps petit mais strictement positif.

est intégrable, la vorticité est asymptotique[2] à celle, $\alpha\,\omega^G$, du tourbillon d'Oseen de paramètre $\alpha = \int_{\mathbf{R}^2} \omega_0$, cette convergence pouvant être précisée si l'on suppose plus de localisation sur le tourbillon initial ω_0. Mais l'hypothèse la plus naturelle sur u_0 qui puisse assurer les mêmes taux de décroissance temporelle que ceux du tourbillon d'Oseen, à savoir u_0 de carré intégrable, force alors $\alpha = 0$ et donc implique que notre solution décroît *plus vite* qu'un tourbillon d'Oseen. Les régimes typiques pour des vitesses initiales localisées et ceux pour des tourbillons localisés sont incompatibles.

Il est alors naturel, sans cesser de supposer que le tourbillon initial est bien localisé, disons par exemple que $(1+|\cdot|)\,\omega_0$ est intégrable, de s'intéresser à savoir quel est le régime typique lorsque de surcroît la vitesse u_0 est de carré intégrable. Dans le cas homogène, ce régime, décroissant plus vite que si l'on ôte l'une des deux hypothèses de localisation spatiale, est par exemple décrit, pour de petites données initiales, dans un article de Thierry Gallay et C. Eugene Wayne [26]. Si $(1+|\cdot|)\,\omega_0$ est intégrable et u_0 de carré intégrable, ou de manière équivalente $\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0 = 0$, alors la solution de l'équation de Navier-Stokes à densité constante, de tourbillon initial ω_0, est asymptotique à $\beta_1\,\omega^{F_1} + \beta_2\,\omega^{F_2}$, avec, pour $i = 1, 2$, $\beta_i = -\int_{\mathbf{R}^2} x_i\,\omega_0(x)\,dx$, et ω^{F_i} des fonctions que nous décrivons au paragraphe suivant. Encore une fois, si l'hypothèse sur ω_0, tout juste suffisante pour donner un sens à ce qui précède, est renforcée, on peut donner un taux de convergence. À défaut de pouvoir traiter le régime général, correspondant aux tourbillons d'Oseen, c'est ce deuxième régime que nous allons essayer de retrouver pour des fluides faiblement compressibles.

Les fonctions ω^{F_1} et ω^{F_2} ne sont pas même des solutions de l'équation homogène pour le tourbillon, ce ne sont que des solutions de sa linéarisation autour de zéro : l'équation de la chaleur. On pourrait préférer exprimer le comportement asymptotique en fonction de vraies solutions, par exemple en fonction d'une à deux paires de *vortex*. Cependant, les vorticités ω^{F_1} et ω^{F_2} ont l'avantage de s'écrire simplement en variables auto-similaires, puisqu'elles sont données, ainsi que les vitesses u^{F_1} et u^{F_2} associées *via* la loi de Biot-Savart, par

$$\begin{array}{rclcrcl} \omega^{F_1}(t,x) & = & \frac{1}{t^{3/2}}\,F_1\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) & , & \omega^{F_2}(t,x) & = & \frac{1}{t^{3/2}}\,F_2\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \quad , \\ u^{F_1}(t,x) & = & \frac{1}{t}\,v^{F_1}\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) & , & u^{F_2}(t,x) & = & \frac{1}{t}\,v^{F_2}\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \quad , \end{array} \tag{10.1}$$

où les profils sont définis, pour $i = 1, 2$, par

$$F_i(\xi) \;=\; \partial_i\,G(\xi) \;=\; -\frac{\xi_i}{2}\,G(\xi)\;, \qquad v^{F_i}(\xi) \;=\; \partial_i\,v^G(\xi)\;, \tag{10.2}$$

avec G et v^G les quantités correspondant aux tourbillons d'Oseen, définies par les formules (1.22). Ainsi G est la gaussienne $G(\xi) = \frac{1}{4\pi}\,e^{-|\xi|^2/4}$, et v^{F_1}

[2]Pour simplifier la discussion, nous supposons momentanément que la densité ρ_0 et le coefficient de Lamé de cisaillement μ sont égaux à un.

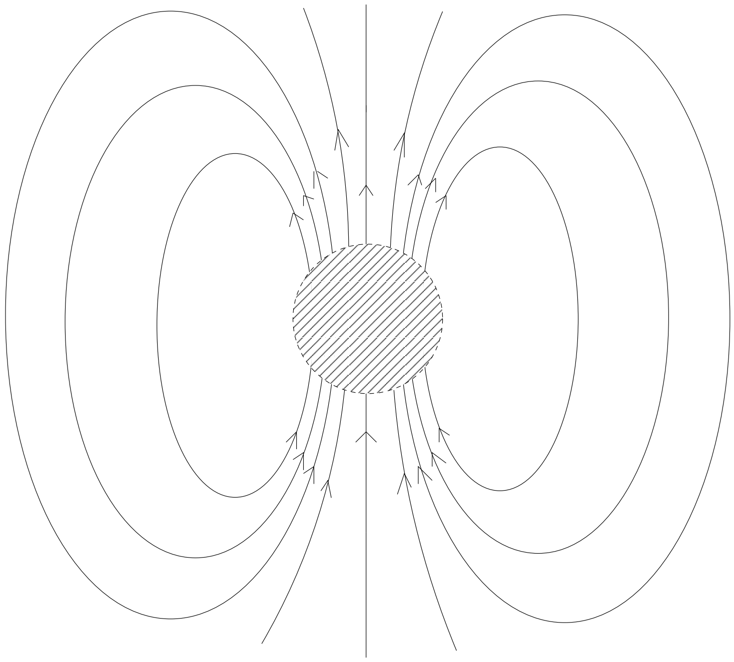

FIG. 10.1 – Allure à l'infini des lignes de courant de u^{F_1}

et v^{F_2} se comportent à l'infini de la manière suivante

$$v^{F_1}(\xi) \overset{|\xi|\to\infty}{=} \frac{1}{2\pi|\xi|^4}\begin{pmatrix} 2\xi_1\xi_2 \\ \xi_2^2-\xi_1^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-|\xi|^2/4}) \;,$$

$$v^{F_2}(\xi) \overset{|\xi|\to\infty}{=} \frac{1}{2\pi|\xi|^4}\begin{pmatrix} \xi_2^2-\xi_1^2 \\ -2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(e^{-|\xi|^2/4}) \;.$$

Observons que v^{F_1} et v^{F_2} sont de carré intégrable mais pas intégrables. La forme (10.1) nous donne alors, pour $i=1,2$, $\|\,\omega^{F_i}\,\|_p = C_p\,t^{-(3/2-1/p)}$ pour tout $1\leq p\leq\infty$, et $\|\,u^{F_i}\,\|_q = C_q\,t^{-(1-1/q)}$, pour tout $1<q\leq\infty$.

Ce régime de décroissance, qui par ailleurs autorise u_0 à appartenir à des espaces de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^2)$ et donc nous permet d'exploiter d'éventuelles symétries dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ *via* des estimations d'énergie, a l'énorme avantage d'être grossièrement réductible au linéaire. Sans même exploiter de décompositions en partie principale et perturbation et d'éventuelles annulations, nous pouvons en effet observer que, formellement au moins, les termes non linéaires sont négligeables. Par exemple, $(u^{F_1}\cdot\nabla)\,u^{F_1}$ décroît[3] en norme $L^p(\mathbf{R}^2)$ comme $t^{-(1-1/p+3/2)}$, et donc une fois intégré dans une formule

[3]Nous avons tenu compte du fait qu'une dérivée supplémentaire apportait une décroissance supplémentaire d'un facteur $t^{-1/2}$.

de Duhamel contre un noyau de la chaleur conduit à une décroissance en $t^{-(1-1/p+1/2)}$, négligeable devant $\| u^{F_1} \|_p$.

Rappelons à présent les équations régissant l'évolution d'un fluide compressible. En termes de la densité ρ et de la quantité de mouvement $m = \rho\, u$, plutôt que de la vitesse u, le système s'écrit

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \rho \;+\; \mathrm{div}\, m &=& 0 \\ \partial_t m \;+\; \mathrm{div}\,(m \otimes \frac{m}{\rho}) &=& \mu \,\triangle\,(\frac{m}{\rho}) + (\mu+\lambda)\,\nabla\,\mathrm{div}\,(\frac{m}{\rho}) - \nabla(P(\rho)) \end{array}\right\} \quad (10.3)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et P est la loi de pression. Nous supposons toujours que $\mu > 0$, que $\lambda + 2\mu > 0$, et que $P : \mathbf{R}_*^+ \to \mathbf{R}$ est une fonction strictement croissante et régulière.

Pour le système compressible, le cadre de loin le mieux connu est celui, déjà pertinent, de la dimension un. Nous allons néanmoins nous concentrer sur les références multidimensionnelles, laissant au lecteur intéressé le soin de trouver dans celles-ci de la bibliographie unidimensionnelle. Dès la dimension deux, et peut-être plus par certains aspects en dimension deux qu'en dimension trois — par exemple parce qu'en dimension paire le principe de Huygens n'est pas exact —, les choses se compliquent. Le lecteur cherchant à pénétrer dans le cœur de la théorie mathématique des écoulements compressibles pourra consulter le livre classique d'Andrew J. Majda [45], la deuxième partie de la monographie de Pierre-Louis Lions [43], ainsi que l'article de revue d'Eduard Feireisl [22]. Pour notre part, en ce qui concerne le problème de Cauchy, bénéficiant de notre retour à un cadre, plus conventionnel, de solutions d'énergie finie, nous pourrons exploiter un résultat d'existence et d'unicité de solutions classiques dû à Shuichi Kawashima [36]. Cependant, sans toutefois entrer dans les détails puisque nous n'aurons pas à nous consacrer à cette tâche, extrayons tout de même de l'histoire des démonstrations d'existence de solutions pour le système compressible (10.3) quelques autres contributions significatives : [47], [43, 23], [31], [17]. Précisons par ailleurs que le mémoire de thèse de Shuichi Kawashima [36] s'intéresse plus globalement aux systèmes mélangeant une partie hyperbolique et une partie parabolique dégénérée. Par des méthodes d'estimations d'énergie $L^2(\mathbf{R}^2)$, Shuichi Kawashima y étudie également des questions relatives au comportement asymptotique des solutions[4]. Néanmoins, dans l'espoir de pouvoir traiter également le régime des tourbillons d'Oseen qui nécessite *a priori* de disposer également de bornes dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, $1 < p < 2$, nous préférerons suivre d'autres méthodes pour analyser la dynamique asymptotique.

Remarques :

1. Contrairement aux cas incompressibles, à moins d'également remettre à

[4]Pour un exposé de ces techniques, mais dans un cadre unidimensionnel, on pourra également consulter [44]. Notons par ailleurs que cet ouvrage contient également une étude détaillée des matrices de Green, généralisée à la dimension supérieure pour les fluides compressibles dans l'étude de David Hoff et Kevin Zumbrun [32].

l'échelle la loi de pression P, le système compressible ne possède pas d'invariance d'échelle. Par conséquent, au risque de décevoir les inconditionnels, dans cette partie, nous n'entendrons pas, ou presque pas, parler de variables auto-similaires. D'une certaine manière, ici, deux régimes coexistent, celui diffusif vivant à l'échelle $\xi = x/\sqrt{t}$ et celui des ondes vivant lui à l'échelle $\xi = x/t$. Il nous est alors difficile, si ce n'est impossible, de suivre simultanément ces deux échelles de dispersion.

2. Alors que l'équation homogène et le système incompressible à densité variable sont parfaitement compatibles, le système compressible est lui *incompatible* avec les deux précédents, à cause de la détermination de la pression, dans la mesure où il n'admet pas de solution commune avec eux. Plus encore, un fluide compressible initialement homogène, ou incompressible, c'est-à-dire de vitesse initiale à divergence nulle, ou même irrotationnel, ne le demeure pas. Cela semble interdire la détermination de l'asymptotique par une méthode naïve de perturbation d'une solution homogène.

3. Une des difficultés mathématiques majeures du système compressible réside dans l'obtention de bornes sur la densité et ses oscillations, et ce même dans le cas favorable où la densité est initialement proche d'une constante strictement positive. Rappelons que, dans le cas incompressible, la densité est contrainte par une équation assez rigide, puisqu'elle obéit à une équation de transport par un champ de vecteurs à divergence nulle. Ici, rien de tel, mais une contre-partie positive est que nous pouvons donc naturellement espérer qu'un fluide compressible initialement faiblement inhomogène se détende pour devenir asymptotiquement à densité constante.

4. Le lecteur pourrait être surpris que nous utilisions maintenant une formulation *moment* plutôt qu'une formulation vitesse ou tourbillon pour notre système compressible. Notre motivation essentielle pour cela est, après avoir perdu un certain nombre de structures, comme l'invariance d'échelle ou la localisation, de conserver la structure *loi de conservation*, la forme *divergence* du système, qui serait perdue en formulation vitesse notamment dans le terme de convection puisque u n'est plus à divergence nulle. En outre, d'une part, nous sommes intéressés par des solutions à densité presque constante et des vitesses petites, or le linéarisé du système (10.3) autour de $(1, 0)$ est le même pour (ρ, u) et pour (ρ, m) ; d'autre part, ici, la densité sera asymptotiquement constante, au moins dans des normes à faible localisation comme celles des espaces $L^p(\mathbf{R}^2)$ avec p dans un certain voisinage de l'infini, de sorte qu'à une constante multiplicative près les asymptotiques en temps long pour la vitesse u et pour le moment $m = \rho\, u$ seront les mêmes.

Nous avons dit que le régime de décroissance que nous étudions ici est essentiellement linéaire. Il nous est donc nécessaire de bien connaître le linéarisé du système (10.3) autour de $\rho = 1$ et $m = 0$. Remarquons que, sans dommage pour la généralité[5], nous avons supposé, et nous le ferons dorénavant, que la densité est proche de un. David Hoff et Kevin Zumbrun ont déjà étudié en détail le comportement asymptotique des petites solutions régulières faiblement inhomogènes du sytème (10.3) dont la vitesse initiale u_0, ou de manière équivalente le moment initial m_0, est intégrable [32]. Pour cela, ils ont décortiqué la matrice de Green S du linéarisé[6]. Nous allons pouvoir extraire *mutatis mutandis* si ce n'est de leurs énoncés du moins de leurs démonstrations l'essentiel de ce dont nous aurons besoin relativement à S.

Plus encore, le régime qu'ils étudient conduit en outre aux mêmes taux de décroissance temporelle que le nôtre. En effet, en ne considérant que la composante à divergence nulle de la vitesse, de même que l'hypothèse $u_0 = K_{BS} \star \omega_0$ de carré intégrable assure les mêmes taux que l'hypothèse ω_0 intégrable mais est incompatible avec l'asymptotique donnée par le tourbillon d'Oseen, supposer $u_0 = K_{BS} \star \omega_0$ intégrable fournit les mêmes taux que demander que $(1 + |\cdot|)\,\omega_0$ soit intégrable mais est incompatible avec l'asymptotique décrite dans cette partie. Lorsque u_0 est intégrable mais que rot u_0 est bien localisé, notre solution doit décroître plus vite que ce que prédisent David Hoff et Kevin Zumbrun. Cependant, ayant les mêmes taux de décroissance typiques et nous trouvant dans un régime aisément réductible au linéaire, notre analyse sera très proche de la leur. Ainsi, si le théorème d'existence de Shuichi Kawashima nous préservera d'avoir à démontrer nous-mêmes l'existence de solutions, l'article de David Hoff et Kevin Zumbrun nous fournira lui une feuille de route.

Nous consacrons tout un chapitre à l'analyse du linéarisé et de sa matrice de Green S. Mais afin de mieux comprendre les hypothèses de notre théorème, disons-en tout de suite quelques mots. Pour cela, décomposons le moment m en la somme $m = m_{\parallel} + m_{\perp}$ d'une partie à divergence nulle $m_{\perp} = \mathbf{P}\, m$ et d'une partie à rotationnel nul $m_{\parallel} = \mathbf{Q}\, m$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ étant les projecteurs de Leray. En termes de $\widetilde{\rho} = \rho - 1$, $m_{\parallel}$ et $m_{\perp}$, le système linéarisé se décompose alors en le système

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \partial_t\, \widetilde{\rho} & + & \operatorname{div} m_{\parallel} & = & 0 \\ \partial_t\, m_{\parallel} & + & c^2\, \nabla \widetilde{\rho} & = & (\lambda + 2\mu)\, \triangle\, m_{\parallel} \end{array}\right\} \tag{10.4}$$

et l'équation

$$\partial_t\, m_{\perp} \; - \; \mu\, \triangle\, m_{\perp} \;\; = \;\; 0\,, \tag{10.5}$$

où $c = \sqrt{P'(1)} > 0$ est la vitesse du son de référence pour l'écoulement. Il est remarquable qu'au niveau linéaire la partie irrotationnelle $(\widetilde{\rho}, m_{\parallel})$, disons-là également purement compressible, et la partie homogène incompressible

[5] Quitte à diviser par une constante ρ_0, la densité ρ, le moment m et les constantes de Lamé μ et λ et à changer la loi de pression $P(\cdot)$ en $P(\rho_0\,\cdot)$.

[6] En ce qui concerne l'étude du système linéarisé, on pourra également consulter [37].

$(0, m_\perp)$ se découplent. À vrai dire, les termes non linéaires décroissent suffisamment rapidement pour que, pour les traiter, il ne nous soit pas utile d'utiliser cette décomposition, il nous suffira de garder les plus mauvais taux de décroissance. En revanche, pour analyser la partie linéaire, cette décomposition sera primordiale. Notre but est de montrer que $\widetilde{\rho}$ converge vers zéro, que $m_{\shortparallel}$ décroît plus vite que u^{F_1}, u^{F_2}, et que $m_\perp$ est asymptotique à une combinaison linéaire de $u^{F_1}(\mu\, t, x)$ et $u^{F_2}(\mu\, t, x)$. Pour avoir une chance de l'atteindre, il est préférable de disposer déjà d'un tel comportement au niveau linéaire.

Or $m_\perp$ vérifie une équation de la chaleur, plus précisément l'équation obtenue par linéarisation à partir de l'équation de Navier-Stokes homogène, mais l'évolution de $(\widetilde{\rho}, m_{\shortparallel})$ est moins immédiatement accessible. Le couple $(\widetilde{\rho}, m_{\shortparallel})$ obéit à un système combinant une partie hyperbolique et une partie parabolique dégénérée ne commutant pas ; ce système se résout pourtant facilement en variable de Fourier. En analysant l'écriture de la transformée de sa matrice de Green, on peut montrer que, comme dans le cas incompressible, la partie hautes fréquences est amortie exponentiellement en temps. Toutefois elle ne régularise pas, ce qui empêche d'employer une méthode directe pour établir un résultat d'existence ou des taux de décroissance avec un argument de type point fixe. Nous pallierons cela en utilisant les estimations d'énergie de Shuichi Kawashima. La partie moyennes fréquences est à la fois amortie exponentiellement et régularisante. Quant à la partie basses fréquences, elle est asymptotique à celle d'un système dit de *viscosité artificielle.*

Ce dernier mélange une partie hyperbolique et une partie strictement parabolique qui commutent. Sa matrice de Green $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ est la convolution de celle de l'équation des ondes sous forme de système et du noyau de la chaleur. Par conséquent, bien que le principe de Huygens ne soit pas exact en dimension deux, on peut penser les composantes de cette matrice de Green $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ comme des gaussiennes diffusant autour d'un cercle dispersant à la vitesse $c\,t$. Plus précisément, dans l'article [33] consacré à ce système de viscosité artificielle, David Hoff et Kevin Zumbrun montrent les bornes ponctuelles suivantes : pour tout multi-indice σ, pour tout temps $t \geq 1$ et en tout point $x \in \mathbf{R}^2$, on a

$$|D^\sigma \widetilde{S}_{\shortparallel}(t,x)| \quad \leq \quad C\, t^{-5/4-|\sigma|/2} \begin{cases} t^{3/4}\ s^{-3/2} \ , & |x| \leq c(t-\sqrt{t}) \ , \\ e^{-\frac{s^2}{Ct}} \ , & |x| \geq c(t-\sqrt{t}) \ , \end{cases} \tag{10.6}$$

où $s = ||x| - c\,t|$ est la distance de x au cercle de rayon $c\,t$, centré en l'origine. Une fois intégrées en espace ces bornes conduisent, dans l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbf{R}^2)$, à un taux de décroissance temporelle en $t^{-(5/4-3/2p)}$. Ainsi si $(\widetilde{\rho}, m_{\shortparallel})$ est initialement intégrable, alors la partie purement compressible décroît *a priori* plus vite que la partie incompressible dans des espaces à faible localisation $L^p(\mathbf{R}^2)$ avec $p \geq 2$ et moins vite dans des espaces de forte localisation $L^p(\mathbf{R}^2)$ avec $1 \leq p \leq 2$.

Énonçons à présent le principal résultat de cette partie, dont la composante existence et unicité est due à Shuichi Kawashima [36].

Théorème 10.1 *Soit $l \geq 3$.*
Il existe des constantes strictement positives ε_0 et C telles qu'avec

$$X_0 \;=\; (\rho_0 - 1, m_0)\;, \qquad X_{0,\shortparallel} \;=\; (\rho_0 - 1, m_{0,\shortparallel})\;,$$

où

$$m_0 \;=\; m_{0,\shortparallel} + m_{0,\perp}\;, \qquad m_{0,\shortparallel} \;=\; \mathbf{Q}\, m_0\;, \qquad m_{0,\perp} \;=\; \mathbf{P}\, m_0\;,$$

si l'on a

$$E \;=\; |\, X_0 \,|_{H^{l+2}} + \|\, X_{0,\shortparallel} \,\|_1 + \|\, (1 + |\cdot|)\, \mathrm{rot}\, m_0 \,\|_1 \;\leq\; \varepsilon_0\;,$$

alors le système (10.3) possède une unique solution $X = (\rho, m)$ globale et classique, cette solution vérifiant pour tout temps $t > 0$

1. *pour $|\sigma| \leq \frac{l-3}{2}$,*

$$\begin{aligned}\|\, D^\sigma\big(X(t) - S(t) \star X_0\big) \,\|_p & \\ &\leq C\, E^2 \ln(1+t) \left\{ \begin{array}{ll} (1+t)^{-\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{|\sigma|}{2} + \frac{1}{2}\right)}\,, & 2 \leq p \leq \infty \\ (1+t)^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2p} + \frac{|\sigma|}{2} + \frac{1}{2}\right)}\,, & 1 \leq p \leq 2 \end{array} \right. ;\end{aligned}$$

2. *pour $|\sigma| \leq \frac{l-3}{2}$, avec $m_\perp = \mathbf{P}\ m$, $m_\shortparallel = \mathbf{Q}\ m$ et $X_\shortparallel = (\rho - 1, m_\shortparallel)$,*

$$\begin{aligned}\|\, D^\sigma X_\shortparallel(t) \,\|_p \;&=\; \|\, \big(D^\sigma\big(\rho(t) - 1\big), D^\sigma\big(m(t) - m_\perp(t)\big)\big) \,\|_p \\ &\leq\; C\, E \left\{ \begin{array}{ll} (1+t)^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2p} + \frac{|\sigma|}{2}\right)}\,, & 2 \leq p \leq \infty \\ t^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2p} + \frac{|\sigma|}{2}\right)}\,, & 1 \leq p < 2 \end{array} \right. ;\end{aligned}$$

3. *pour $|\sigma| \leq \frac{l-3}{2}$, avec $m_\perp = \mathbf{P}\ m$,*

$$\|\, D^\sigma m_\perp(t) \,\|_p \;\leq\; C\, E\ (1+t)^{-\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{|\sigma|}{2}\right)}\,, \qquad 2 \leq p \leq \infty\;,$$

et même

$$\lim_{t \to \infty} t^{1 - \frac{1}{p} + \frac{|\sigma|}{2}}\ \|\, D^\sigma\big(m_\perp(t) - (\beta_1\ u_\mu^{F_1}(t) + \beta_2\ u_\mu^{F_2}(t)\big) \,\|_p \;=\; 0\;,$$

avec, pour $i = 1, 2$, $u_\mu^{F_i}(t, x) = \mu\, u^{F_i}(\mu\, t, x)$, u^{F_i} étant défini par (10.1) et (10.2), et β_i défini par

$$\beta_i \;=\; -\frac{1}{\mu} \int_{\mathbf{R}^2} x_i\ \mathrm{rot}\, m_0(x)\, dx\;;$$

4. si de plus $(1+|\cdot|^2)\,\mathrm{rot}\, m_0$ *est également intégrable, pour tout* $|\sigma| \leq \frac{l-3}{2}$*, tout* $1 < p \leq \infty$ *et tout temps* $t \geq 1$*, avec* $E' = E + \|\,(1+|\cdot|^2)\,\mathrm{rot}\, m_0\,\|_1$*,*

$$\|\, D^\sigma\big(X(t) - (\,1, \beta_1\ u_\mu^{F_1}(t) + \beta_2\ u_\mu^{F_2}(t)\,)\big)\,\|_p \ \leq\ C_p\, E'\, t^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2p} + \frac{|\sigma|}{2}\right)}\ .$$

Remarques :

1. Dès lors que l'on peut leur donner un sens, β_1 et β_2 sont des quantités préservées par l'évolution.

2. L'optimalité dans la régularité ou la localisation de la vorticité n'a jamais été notre préoccupation principale, mais ici nous avons été particulièrement généreux, pour ce qui concerne la régularité, afin de ne pas compliquer encore l'énoncé. On pourra toujours consulter les démonstrations pour y trouver des estimations demandant moins de régularité. Quant à la localisation, comme dans le cas à densité constante, l'hypothèse qui suffit pour donner un sens aux termes qui donnent l'asymptotique suffit également à démontrer cette asymptotique. En revanche, si l'on souhaite obtenir un taux pour cette asymptotique, il nous faut plus de localisation.

3. Alors que nous considérons des coefficients de Lamé, une vitesse du son de référence $\sqrt{P'(1)}$ et une densité ρ d'ordre un, nous nous intéressons à des vitesses petites. Nous sommes donc dans un régime de faibles nombres de Mach et de Reynolds. Par conséquent, il n'est pas étonnant que le comportement de l'écoulement soit essentiellement incompressible et non turbulent.

4. Contrairement au résultat de la partie précédente pour le cas incompressible, ici même les normes de Sobolev doivent être petites. C'est dû au fait que nous estimons certaines normes $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ *via* des injections de Sobolev et non directement, par manque de régularisation de la partie hautes fréquences de la matrice de Green du système linéarisé. Nous y sacrifions deux dérivées. C'est également à cause de ce manque de régularisation qu'apparaissent des restrictions du type $|\sigma| \leq \frac{l-3}{2}$, puisque nous devons borner les termes de régularité critique par des constantes, au mépris de leur décroissance temporelle typique.

5. D'aucuns pourraient légitimement s'étonner de la dissymétrie entre le traitement de $\mathrm{div}\, m_0$ et celui de $\mathrm{rot}\, m_0$. Expliquons que, quant au rotationnel, notre but est d'autoriser des solutions découlant de *vortex*, ici contraintes à avoir un moment de circulation totale nulle. L'équivalent pour la divergence serait de permettre des *puits* et des *sources*. Nous avons choisi de ne pas nous engager dans cette direction.

Sans surprise cette partie est organisée comme suit : dans le premier chapitre à venir nous regroupons les résultats relatifs à l'étude du linéarisé, dans le deuxième nous les exploitons pour démontrer le théorème 10.1, enfin dans le dernier nous concluons par quelques remarques sur les obstacles à l'établissement d'un résultat similaire pour le régime tourbillon d'Oseen.

Chapitre 11

Composante linéaire

Dans ce chapitre, nous analysons le linéarisé autour de $\rho = 1$ et $m = 0$ du système compressible. Ce système s'écrit

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \partial_t \widetilde{\rho} & + & \operatorname{div} m & = & 0 \\ \partial_t m & + & c^2 \nabla \widetilde{\rho} & = & \mu \triangle m + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} m \end{array}\right\} \tag{11.1}$$

où $c = \sqrt{P'(1)} > 0$ est la vitesse du son de référence. Comme nous l'avons déjà mentionné, si l'on écrit $m = m_{\shortparallel} + m_\perp$ avec $m_{\shortparallel} = \mathbf{Q}\, m$ à rotationnel nul et $m_\perp = \mathbf{P}\, m$ à divergence nulle, la résolution de (11.1) se réduit à celles du système

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \partial_t \widetilde{\rho} & + & \operatorname{div} m_{\shortparallel} & = & 0 \\ \partial_t m_{\shortparallel} & + & c^2 \nabla \widetilde{\rho} & = & (\lambda + 2\mu) \triangle m_{\shortparallel} \end{array}\right\} \tag{11.2}$$

et de l'équation

$$\partial_t m_\perp - \mu \triangle m_\perp \;=\; 0\ . \tag{11.3}$$

Avec cette décomposition il appert clairement que $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$ sont les conditions de la stricte parabolicité de la seconde équation du système (11.1).

Notons alors S la matrice de Green du système (11.1), $S_{\shortparallel}$ celle du système (11.2) et K_μ le noyau de la chaleur de l'équation (11.3). Pour exprimer le lien entre ces différents noyaux, écrivons les projecteurs de Leray sous forme de convolution,

$$\mathbf{P}\, f \;=\; R_\perp \star f\ , \qquad \mathbf{Q}\, f \;=\; R_{\shortparallel} \star f\ ,$$

pour tout champ de vecteurs f. En variable de Fourier, on a[1] donc

$$\widehat{R_\perp}(\eta) \;=\; \frac{\eta^\perp\, {}^{\mathrm{t}}\eta^\perp}{|\eta|^2}\ , \qquad \widehat{R_{\shortparallel}}(\eta) \;=\; \frac{\eta\, {}^{\mathrm{t}}\eta}{|\eta|^2}\ .$$

[1] Ce sont ces formules qui nous on fait choisir nos notations $\shortparallel$ et $\perp$. En Fourier, un champ de vecteurs irrotationnel est parallèle à la variable de Fourier en tout point, un champ de vecteurs à divergence nulle lui est orthogonal. À l'inverse, Kevin Hoff et David Zumbrun réservent le symbole $\perp$ à la partie purement compressible, sans doute parce qu'elle est orthogonale à la partie principale.

Alors on obtient

$$S \;=\; S_{\shortparallel} \star \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & R_{\shortparallel} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\mu \star R_\perp \end{bmatrix} , \tag{11.4}$$

où δ_0 est la masse de Dirac centrée en l'origine et de poids un.

Tout en gardant en tête (11.4), étudions à présent séparément $S_{\shortparallel}$ et K_μ.

11.1 Partie purement compressible

Observons que si $(\widetilde{\rho}, m_{\shortparallel})$ est une solution du système (11.2), alors $\widetilde{\rho}$ est une solution de l'équation

$$\partial_t^2 \widetilde{\rho} - c^2 \triangle \widetilde{\rho} - (\lambda + 2\mu) \triangle \partial_t \widetilde{\rho} \;=\; 0 . \tag{11.5}$$

Dans le cas non visqueux $\lambda = \mu = 0$, cela se réduit à une équation des ondes, les ondes de densité se propageant à la vitesse c. En termes de transformée de Fourier, il s'ensuit une équation différentielle pour $y(t, \eta) = \widehat{\widetilde{\rho}}(t, \eta)$:

$$y'' + (\lambda + 2\mu) |\eta|^2 y' + c^2 |\eta|^2 y = 0 . \tag{11.6}$$

Cela nous permet de résoudre le système (11.2) et d'obtenir

$$\widehat{S_{\shortparallel}}(t, \eta) \;=\; \begin{bmatrix} \frac{\lambda^+(\eta)\, e^{\lambda^-(\eta)\, t} - \lambda^-(\eta)\, e^{\lambda^+(\eta)\, t}}{\lambda^+(\eta) - \lambda^-(\eta)} & -\mathrm{i} \left(\frac{e^{\lambda^+(\eta)\, t} - e^{\lambda^-(\eta)\, t}}{\lambda^+(\eta) - \lambda^-(\eta)} \right) {}^{\mathrm{t}}\eta \\ -\mathrm{i}\, c^2 \left(\frac{e^{\lambda^+(\eta)\, t} - e^{\lambda^-(\eta)\, t}}{\lambda^+(\eta) - \lambda^-(\eta)} \right) \eta & \frac{\lambda^+(\eta)\, e^{\lambda^+(\eta)\, t} - \lambda^-(\eta)\, e^{\lambda^-(\eta)\, t}}{\lambda^+(\eta) - \lambda^-(\eta)} \end{bmatrix} , \tag{11.7}$$

avec[2]

$$\lambda^\pm(\eta) \;=\; -\frac{1}{2} \mu_{\shortparallel} |\eta|^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mu_{\shortparallel}^2 |\eta|^4 - 4 c^2 |\eta|^2} \tag{11.8}$$

où $\mu_{\shortparallel} = \lambda + 2\mu$. Cette formule explicite permet d'en obtenir une également pour $\widehat{S}$, et de mener toute l'étude de $S_{\shortparallel}$. Nous décrivons les fruits de cette étude et donnons une idée de la manière dont elle peut être conduite, mais, comme annoncé, nous nous contentons de renvoyer à [32] ou [33] pour de véritables démonstrations.

Les parties basses et hautes fréquences de $S_{\shortparallel}$ ont des comportements suffisamment différents pour qu'il soit utile de les séparer. Donnons-nous une fonction régulière de troncature χ, comprise entre zéro et un, égale à un sur $\{\eta \in \mathbf{R}^2 \,|\, |\eta| \le R_0\}$ et nulle sur $\{\eta \in \mathbf{R}^2 \,|\, |\eta| \ge R_0 + 1\}$. Décomposons alors $S_{\shortparallel}$ en $S_{\shortparallel} = S_{\shortparallel}^{BF} + S_{\shortparallel}^{HF}$ de telle façon que

$$\widehat{S_{\shortparallel}^{BF}}(t, \eta) \;=\; \chi(\eta)\, \widehat{S_{\shortparallel}}(t, \eta) , \qquad \widehat{S_{\shortparallel}^{HF}}(t, \eta) \;=\; (1 - \chi(\eta))\, \widehat{S_{\shortparallel}}(t, \eta) . \tag{11.9}$$

Étudions à présent $S_{\shortparallel}^{BF}$ et $S_{\shortparallel}^{HF}$.

[2]Nous choisissons une détermination de la racine carrée qui coïncide avec la notion habituelle sur $\mathbf{R}$.

11.1.1 Hautes fréquences

Un développement limité des valeurs propres $\lambda^{\pm}(\eta)$ autour de $|\eta| = \infty$ donne

$$\lambda^{+}(\eta) \overset{|\eta|\to\infty}{=} -\frac{c^2}{\mu_{\shortparallel}} + \mathcal{O}(|\eta|^{-2}) \ , \qquad \lambda^{-}(\eta) \overset{|\eta|\to\infty}{=} -\mu_{\shortparallel}\,|\eta|^2 + \frac{c^2}{\mu_{\shortparallel}} + \mathcal{O}(|\eta|^{-2}) \ .$$

A priori les hautes fréquences sont par conséquent amorties exponentiellement en temps. Par ailleurs, cela étaye ce que laisse deviner la forme du système (11.2), à savoir qu'une composante — $m_{\shortparallel}$ — est régularisée, alors que l'autre — $\widetilde{\rho}$ — ne l'est pas.

Pour être plus précis, on peut faire un développement limité de $\widehat{S_{\shortparallel}}$ à l'aide d'une représentation intégrale des solutions de l'équation différentielle (11.6) paramétrée par $|\eta|$. Notons

$$\begin{aligned} A(t,r) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathcal{S}^+\cup\,\mathcal{S}^-} \frac{e^{tz}}{p\,(r,z)}\,dz \\ B(t,r) &= \partial_t\, A(t,r) + \mu_{\shortparallel}\, r^2\, A(t,r) \\ D(t,r) &= e^{-\mu_{\shortparallel}\, r^2 t} \int_0^t e^{\mu_{\shortparallel}\, r^2 s} A(s,r)\, ds \end{aligned}$$

où $\mathcal{S}^+$ et $\mathcal{S}^-$ sont des cercles de rayon $c^2/2\mu_{\shortparallel}$ et de centres respectifs $-c^2/\mu_{\shortparallel}$ et $-\mu_{\shortparallel}\, r^2 + c^2/\mu_{\shortparallel}$, et p le polynôme $p\,(r,z) = z^2 + \mu_{\shortparallel}\, r^2\, z + c^2\, r^2$. Avec des notations matricielles évidentes, alors

$$\begin{aligned} \widehat{S_{\shortparallel}}^{1,1}(t,\eta) &= B(t,|\eta|) \ , & \widehat{S_{\shortparallel}}^{1,2}(t,\eta) &= -\mathrm{i}\ A(t,|\eta|)\ {}^{\mathrm{t}}\eta \ , \\ \widehat{S_{\shortparallel}}^{2,1}(t,\eta) &= -\mathrm{i}\, c^2\, A(t,|\eta|)\ \eta \ , & \widehat{S_{\shortparallel}}^{2,2}(t,\eta) &= e^{-\mu_{\shortparallel}\,|\eta|^2 t} - c^2\,|\eta|^2\, D(t,|\eta|)\,. \end{aligned}$$

Or, en développant sous les intégrales $1/p(z,r)$ en puissances de r^{-1}, on obtient pour r suffisamment grand

$$\begin{aligned} A(t,r) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t,r)\ r^{-2k-2} \\ B(t,r) &= e^{-\frac{c^2 t}{\mu_{\shortparallel}}} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t,r)\ r^{-2k-2} \\ D(t,r) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k(t,r)\ r^{-2k-4} \end{aligned}$$

avec

$$|A_k(t,r)|,\ |B_k(t,r)|,\ |D_k(t,r)|\ \le C\ (e^{-\frac{c^2 t}{\mu_{\shortparallel}}} + e^{-\frac{\mu_{\shortparallel}}{2} r^2 t})\ r_0^k$$

où C et r_0 sont des constantes positives indépendantes de k, r et t. De même, on peut également montrer, pour $j \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|\partial_r^j A(t,r)| &\leq C_j\,(e^{-\frac{c^2 t}{\mu_{\shortparallel}}} + e^{-\frac{\mu_{\shortparallel}}{2} r^2 t})\; r^{-j-2} \\
|\partial_r^j B(t,r)| &\leq C_j\,(e^{-\frac{c^2 t}{\mu_{\shortparallel}}} + e^{-\frac{\mu_{\shortparallel}}{2} r^2 t})\; r^{-j-2} \\
|\partial_r^j D(t,r)| &\leq C_j\,(e^{-\frac{c^2 t}{\mu_{\shortparallel}}} + e^{-\frac{\mu_{\shortparallel}}{2} r^2 t})\; r^{-j-4}\ .
\end{aligned}$$

Alors le théorème de multiplicateur de Marcinkiewicz et un raffinement, démontré dans [32, proposition 4.2], transforment ces développements autour de $|\eta| = \infty$ en le résultat suivant, que nous faisons précéder des définitions utiles.

Définition 11.1

i. Un symbole $\widehat{f}$ *borné est un* multiplicateur L^p *si l'opérateur associé* $f\star$ *s'étend, pour tout* $1 < p < \infty$, *de* $L^2(\mathbf{R}^2) \cap L^p(\mathbf{R}^2)$ *à tout* $L^p(\mathbf{R}^2)$ *:*

$$\| f \star g \|_p \;\leq\; C_p \| g \|_p\ , \qquad g \in L^p(\mathbf{R}^2)\ , \qquad 1 < p < \infty\ .$$

ii. On parle de multiplicateur L^p fort *si cette propriété reste vraie pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *:*

$$\| f \star g \|_p \;\leq\; C \| g \|_p\ , \qquad g \in L^p(\mathbf{R}^2)\ , \qquad 1 \leq p \leq \infty\ .$$

iii. Un famille de multiplicateurs — forts ou non — est dite bornée *si les constantes* C *ou* C_p *peuvent être choisies uniformément pour toute cette famille.*

L'exemple typique du multiplicateur L^p qui n'est pas un multiplicateur L^p fort est fourni par le symbole $\widehat{R_\perp}$ du projecteur de Leray $\mathbf{P}$.

Proposition 11.2 *Pour* R_0 *suffisamment grand, il existe une constante strictement positive* $b > 0$ *telle que la partie hautes fréquences* $S_{\shortparallel}^{HF}$ *de* $S_{\shortparallel}$, *définie par (11.9), vérifie*

$$\widehat{S_{\shortparallel}^{HF}}\,(t,\eta) \;=\; e^{-b\,t}\; M(t,\eta) \tag{11.10}$$

où $(M(t))_{t\geq 0}$ *est une famille bornée de multiplicateurs* L^p *forts, et, pour tous* $1 \leq i,j,k \leq 2$ *avec* $(i,j) \neq (1,1)$

$$\widehat{\partial_k\, S_{\shortparallel}^{HF\;i,j}}\,(t,\eta) \;=\; e^{-b\,t}\;(1 + t^{-1/2})\; N_k^{i,j}(t,\eta) \tag{11.11}$$

où $(N_k^{i,j}(t))_{t\geq 0}$ *est une famille bornée de multiplicateurs* L^p.

Remarques :

1. La seule composante de $S_{\shortparallel}^{HF}$, donc de $S_{\shortparallel}$, qui ne régularise absolument pas est $(S_{\shortparallel}^{HF})^{1,1}$. Son développement contient en effet une masse de Dirac $e^{-c^2 t/\mu_{\shortparallel}}\delta_0$. Ce qui précède, dû à des considérations hautes fréquences en variables de Fourier, est donc encore valable pour $S_{\shortparallel}^{HF} \star \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & R_{\shortparallel} \end{bmatrix}$ et même pour la partie hautes fréquences de S. C'est d'ailleurs sous cette forme que cette proposition est énoncée en [32, lemme 5.3].

2. Les composantes $\widehat{\partial_k\, S_{\shortparallel}^{HF}}^{\,1,2}$ et $\widehat{\partial_k\, S_{\shortparallel}^{HF}}^{\,2,1}$ ne sont effectivement pas des multilpicateurs L^p forts. Leurs développements respectifs contiennent des termes du type $e^{-c^2 t/\mu_{\shortparallel}}\ \eta_k\ \eta_{k'}/|\eta|^2$.

3. En revanche, on peut montrer que $\widehat{\partial_k\, S_{\shortparallel}^{HF}}^{\,2,2}$ est un multiplicateur L^p fort et que $\partial_k\,\widehat{\partial_{k'}\, S_{\shortparallel}^{HF}}^{\,2,2}$ est également un multiplicateur L^p. Ainsi l'éventuel terme source du système (11.2) subirait, s'il était placé dans la première équation, une régularisation d'une dérivée dans la détermination de $m_{\shortparallel}$ mais aucune dans celle de $\widetilde{\rho}$, et, s'il était placé dans la seconde, une régularisation de deux crans dans la détermination de $m_{\shortparallel}$ et seulement d'un dans celle de $\widetilde{\rho}$. On comprend alors qu'avec une méthode naïve basée sur ces estimations on ne puisse pas démontrer l'existence d'une solution, que cela soit en formulation moment où l'on ne peut pas traiter un terme comme $\triangle(m_{\shortparallel}\widetilde{\rho})$ dans la seconde équation, ou en formulation vitesse où l'on ne pourrait pas traiter le terme $u\cdot\nabla\widetilde{\rho}$ dans la première. Par manque de régularité sur $\widetilde{\rho}$, on ne peut donc pas considérer comme termes sources les non-linéarités. Pour pallier ce problème, dans l'article [16], Raphaël Danchin intègre lui un terme de convection dans le linéarisé qu'il étudie. De cette manière, il semble néanmoins difficile d'obtenir des taux de décroissance temporelle dus à la dispersion comme nous en décrivons dans ce qui suit.

11.1.2 Basses fréquences

De la formule explicite (11.7) pour la transformée de Fourier de $S_{\shortparallel}$, s'ensuivent aisément les premières estimations suivantes.

Proposition 11.3 *La partie basses fréquences $S_{\shortparallel}^{BF}$ de $S_{\shortparallel}$ vérifie, pour tout multi-indice σ,*

$$\|\, D^\sigma S_{\shortparallel}^{BF}(t)\,\|_p \ \le\ C_\sigma \left\{ \begin{array}{ll} t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)} & \text{si}\quad t\ge 1 \quad\text{et } 2\le p\le\infty\ , \\ 1 & \text{si } 0\le t\le 1 \text{ et } 1\le p\le\infty\ . \end{array}\right. \tag{11.12}$$

Remarque : Évidemment cette proposition est encore vraie si l'on remplace la partie basses fréquences de $S_{\shortparallel}$ par celle de S.

Notons que, les moyennes fréquences étant à la fois régularisées et amorties exponentiellement en temps, car $\lambda^{\pm}(\eta)$ est de partie réelle strictement négative pour $\eta \neq (0,0)$, pour étudier $S_{\shortparallel}^{BF}$, il nous suffit de nous concentrer sur les basses fréquences. Or un développement limité à l'ordre deux des valeurs propres $\lambda^{\pm}(\eta)$ autour de $\eta=(0,0)$ donne

$$\lambda^{\pm}(\eta) \overset{|\eta|\to 0}{=} -\frac{1}{2}\,\mu_{\shortparallel}\,|\eta|^2 \pm \mathrm{i}\,c\,|\eta| + \mathcal{O}(|\eta|^3)\,. \tag{11.13}$$

La partie basses fréquences $S_{\shortparallel}^{BF}$ est donc *a priori* bien approchée par la matrice de Green $\widetilde{S}_{\shortparallel}$, ou au moins sa partie basses fréquences, du système

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \partial_t\,\widetilde{\rho} & + & \mathrm{div}\,m_{\shortparallel} & = & \frac{1}{2}\,\mu_{\shortparallel}\,\triangle\,\widetilde{\rho} \\ \partial_t\,m_{\shortparallel} & + & c^2\,\nabla\widetilde{\rho} & = & \frac{1}{2}\,\mu_{\shortparallel}\,\triangle\,m_{\shortparallel}\,. \end{array}\right\} \tag{11.14}$$

Commençons par discuter les propriétés de ce système dit de viscosité artificielle.

Le système (11.14) a l'énorme avantage sur (11.2) que sa partie hyperbolique et sa partie parabolique, qui par ailleurs est strictement parabolique, commutent. Ainsi si W est la matrice de Green du système hyperbolique

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \partial_t\,\widetilde{\rho} & + & \mathrm{div}\,m_{\shortparallel} & = & 0 \\ \partial_t\,m_{\shortparallel} & + & c^2\,\nabla\widetilde{\rho} & = & 0 \end{array}\right\} \tag{11.15}$$

et $K_{\mu_{\shortparallel}/2}$ le noyau de la chaleur associé à l'équation

$$\partial_t\,f - \frac{1}{2}\,\mu_{\shortparallel}\,\triangle\,f = 0 \tag{11.16}$$

alors $\widetilde{S}_{\shortparallel} = W \star \begin{bmatrix} K_{\mu_{\shortparallel}/2} & 0 \\ 0 & K_{\mu_{\shortparallel}/2} \end{bmatrix}$.

Pour expliciter plus encore, remarquons que le système (11.15) implique

$$\partial_t^2\,\widetilde{\rho} - c^2\triangle\,\widetilde{\rho} \;=\; 0\,. \tag{11.17}$$

Notons w la solution de (11.17) de condition initiale $w(0)=0$, $\partial_t w(0)=\delta_0$. Alors

$$\widetilde{S}_{\shortparallel} \;=\; \begin{bmatrix} \partial_t\,w\star K_{\mu_{\shortparallel}/2} & -\nabla^{\mathrm{t}}w\star K_{\mu_{\shortparallel}/2} \\ -c^2\,\nabla w\star K_{\mu_{\shortparallel}/2} & \partial_t\,w\star K_{\mu_{\shortparallel}/2} \end{bmatrix}\,. \tag{11.18}$$

En exploitant la formule explicite

$$w\,(t,x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2\pi c}\,\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-|x|^2}} & \text{si} \quad |x| < c\,t\,, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq c\,t\,, \end{cases} \tag{11.19}$$

on peut à présent majorer ponctuellement $S_{\shortparallel}$: pour tout multi-indice σ, tout temps $t\geq 1$, et en tout point $x\in\mathbf{R}^2$,

$$|D^{\sigma}\widetilde{S}_{\shortparallel}(t,x)| \;\leq\; C\,t^{-5/4-|\sigma|/2} \begin{cases} t^{3/4}\,s^{-3/2} & \text{si} \quad |x|\leq c(t-\sqrt{t})\,, \\ e^{-\frac{s^2}{Ct}} & \text{si} \quad |x|\geq c(t-\sqrt{t})\,, \end{cases} \tag{11.20}$$

où $s = ||x| - ct|$ est la distance de x au cercle de rayon ct, centré en l'origine. Pour cette dérivation, nous renvoyons à l'article consacré au système de viscosité artificielle par David Hoff et Kevin Zumbrun [33]. Une fois intégrées en espace ces bornes donnent la proposition suivante.

Proposition 11.4 *La matrice de Green $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ associée au système de viscosité artificielle (11.14) vérifie pour tout multi-indice σ*

$$\| D^\sigma \widetilde{S}_{\shortparallel}(t) \|_p \ \leq\ C_\sigma\, t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)}\ , \qquad t \geq 1\ , \quad 1 \leq p \leq \infty\ . \tag{11.21}$$

Remarques :

1. Pour obtenir ces taux pour tout $1 \leq p \leq \infty$, il ne suffit pas de combiner, pour les q admissibles, les taux de décroissance du noyau de la chaleur dans $L^q(\mathbf{R}^2)$ avec la manière dont le semi-groupe d'évolution de l'équation des ondes envoie[3] $L^q(\mathbf{R}^2)$ dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ puis d'optimiser sur q.

2. Souvenons-nous de la relation (11.4) et notons que le projecteur de Leray $\mathbf{P}$ n'est pas un multiplicateur L^p fort, de sorte que l'on ne peut pas déduire de la proposition 11.4 des bornes $L^1(\mathbf{R}^2)$ et $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ pour

$$\widetilde{S}_{part} \ =\ \widetilde{S}_{\shortparallel} \star \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & R_{\shortparallel} \end{bmatrix}\ . \tag{11.22}$$

Cependant, dans [33], l'on trouve des bornes ponctuelles pour $\widetilde{S}_{part}$ qui donnent les bornes suivantes pour tout multi-indice σ

$$\| D^\sigma \widetilde{S}_{part}(t) \|_p \ \leq\ \frac{c_\sigma\, L_\sigma(t)}{t^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}}}\ , \qquad t \geq 1\ , \quad 1 \leq p \leq \infty\ , \tag{11.23}$$

avec $L_\sigma(t) = 1 + \ln t$, si $\sigma = (0,0)$, et $L_\sigma(t) = 1$ sinon.

Revenons maintenant à $S_{\shortparallel}^{BF}$. Nous donnons à présent une proposition qui assure que $S_{\shortparallel}^{BF}$ est effectivement bien approché par $\widetilde{S}_{\shortparallel}$. La première partie se déduit facilement de l'asymptotique (11.13) et de la formule explicite (11.7) pour la transformée de Fourier de $\widetilde{S}_{\shortparallel}$, la seconde partie peut procéder d'une étude en variables de Fourier transformée en bornes ponctuelles *via* une version adéquate du théorème de Paley-Wiener. Nous renvoyons à [32, section 7 & lemme 8.1] pour la démonstration de cette seconde partie.

Proposition 11.5 *La partie basses fréquences $S_{\shortparallel}^{BF}$ de $S_{\shortparallel}$ vérifie*

1. *pour tout multi-indice σ, pour $t \geq 1$ et $2 \leq p \leq \infty$,*

$$\| D^\sigma (S_{\shortparallel}^{BF}(t) - \widetilde{S}_{\shortparallel}^{BF}(t)) \|_p \ \leq\ C_\sigma\, t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}\right)}\ , \tag{11.24}$$

où $\widetilde{S}_{\shortparallel}^{BF}$ est la partie basses fréquences de $\widetilde{S}_{\shortparallel}$;

[3] On pourra consulter le classique [49] pour connaître ces taux.

2. *pour tout multi-indice σ et tout $\theta > 0$, pour $t \geq 1$ et $1 \leq p \leq 2$,*

$$\| D^\sigma(S_{\shortparallel}^{BF}(t) - \widetilde{S}_{\shortparallel}^{BF}(t)) \|_p \quad \leq \quad C_{\sigma,\theta}\, t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}-\theta\right)} \ , \qquad (11.25)$$

où $\widetilde{S}_{\shortparallel}^{BF}$ est la partie basses fréquences de $\widetilde{S}_{\shortparallel}$.

Remarque : On peut évidemment décomposer $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ en ses parties basses et hautes fréquences $\widetilde{S}_{\shortparallel}^{BF}$ et $\widetilde{S}_{\shortparallel}^{HF}$ comme nous l'avons fait pour $S_{\shortparallel}$ par (11.9). Pour s'assurer que $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ approche bien globalement $S_{\shortparallel}$, il nous reste à noter que $\widetilde{S}_{\shortparallel}^{HF}$ vérifie les mêmes estimations que $S_{\shortparallel}^{HF}$, décrites dans la proposition 11.2, et par conséquent décroît exponentiellement en temps.

11.2 Partie incompressible à densité constante

Nous analysons maintenant l'équation linéaire pour $m_\perp$. Il ne s'agit que de l'équation de la chaleur, mais nous exploitons le fait qu'elle concerne des champs de vecteurs à divergence nulle pour obtenir des estimations non standard.

Commençons par remarquer que pour borner S, au vu de (11.4), il nous faut estimer non pas K_μ mais $K_\mu \star R_\perp$. Certes, $R_\perp$ étant un multiplicateur L^p et les bornes $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ étant accessibles en variables de Fourier, seules les bornes $L^1(\mathbf{R}^2)$ pourraient poser problème. On y remédie par exemple en établissant[4], aisément, grâce entre autres à une formule explicite pour $R_\perp$, les bornes ponctuelles suivantes : pour tout multi-indice σ, tout temps $t > 0$ et en tout point $x \in \mathbf{R}^2$,

$$| D^\sigma(K_\mu(t) \star R_\perp)(x) | \quad \leq \quad C_\sigma\, (\max(t^{1/2}, |x|))^{-(|\sigma|+2)} \ ,$$

qui donnent une fois intégrées en espace la proposition suivante.

Proposition 11.6 *Pour tout temps $t > 0$, on a*

$$\| D^\sigma K_\mu(t) \star R_\perp \|_p \ \leq \ C_\sigma\, t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)} \ , \quad 1 \leq p \leq \infty \ , \quad |\sigma| \neq 0 \ . \quad (11.26)$$

Venons-en maintenant au cœur de cette section.

Proposition 11.7

1. *Pour tout multi-indice σ, il existe une constante strictement positive C_σ de sorte que si ω_0 est une fonction réelle telle que $(1 + |\cdot|)\,\omega_0$ soit intégrable et $\widehat{\omega_0}(0) = 0$, alors, si $m_{0,\perp} = K_{BS} \star \omega_0$ est le champ de vecteurs à divergence nulle associé, on a pour tout temps $t \geq 0$, avec $E = \| (1 + |\cdot|)\,\omega_0 \|_1$*

$$\| D^\sigma K_\mu(t) \star m_{0,\perp} \|_p \ \leq \ C_\sigma\, E\, t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)} \ , \quad 2 \leq p \leq \infty \ . \quad (11.27)$$

[4] Voir par exemple [33, lemme 2.2].

2. Pour tout multi-indice σ, il existe une constante strictement positive $C_\sigma > 0$ de sorte que si ω_0 est tel que $(1+|\cdot|^2)\,\omega_0$ soit intégrable, $\widehat{\omega_0}(0) = 0$ et $\nabla_\eta \widehat{\omega_0}(0) = 0$, alors, si $m_{0,\perp} = K_{BS} \star \omega_0$, on a pour tout temps $t \geq 0$, avec $E' = \|\,(1+|\cdot|^2)\,\omega_0\,\|_1$

$$\|\, D^\sigma K_\mu(t) \star m_{0,\perp}\,\|_p \;\leq\; C_\sigma\, E'\, t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}\right)}\,, \quad 2 \leq p \leq \infty\,. \tag{11.28}$$

3. Pour tout multi-indice σ, il existe une constante $C_\sigma > 0$ de sorte que si ω_0 est tel que $(1+|\cdot|^2)\,\omega_0$ soit intégrable, $\widehat{\omega_0}(0) = 0$ et $\nabla_\eta \widehat{\omega_0}(0) = 0$, alors, si $m_{0,\perp} = K_{BS} \star \omega_0$, on a pour tout temps $t \geq 0$, pour tout $2 \leq p \leq \infty$, avec $E' = \|\,(1+|\cdot|^2)\,\omega_0\,\|_1$

$$\|\,|\cdot|\,(D^\sigma K_\mu(t) \star m_{0,\perp})\,\|_p \;\leq\; C_\sigma\, E'\,(1+t^{-\frac{1}{2}})\; t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)}\,. \tag{11.29}$$

Démonstration.

1. Pour la première partie de la proposition, il suffit d'observer que, puisque $2 \leq p \leq \infty$, avec p' l'exposant conjugué[5] de p, l'on a

$$\|\, D^\sigma K_\mu \star m_{0,\perp}\,\|_p \;\leq\; C\,\|\,|\cdot|^{|\sigma|}\, e^{-\mu|\cdot|^2 t}\,\widehat{m_{0,\perp}}\,\|_{p'} \;\leq\; C\, t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)}\,\|\,\widehat{m_{0,\perp}}\,\|_\infty\,.$$

En effet, $\widehat{\omega_0}$ est lipschitzien et $\widehat{\omega_0}(0) = 0$, d'où pour presque tout $\eta \neq 0$

$$|\widehat{m_{0,\perp}}(\eta)| \;=\; C\,|\eta|^{-1}\,|\widehat{\omega_0}(\eta)| \;\leq\; C\,\|\,\nabla_\eta \widehat{\omega_0}\,\|_\infty \;\leq\; C\,E\,.$$

2. De même, puisqu'ici $|\widehat{\omega_0}(\eta)| \;\leq\; C\,E'\,|\eta|^2$, il s'ensuit

$$\|\, D^\sigma K_\mu \star m_{0,\perp}\,\|_p \;\leq\; C\;E'\;\|\,|\cdot|^{|\sigma|+1}\, e^{-\mu|\cdot|^2 t}\,\|_{p'} \;\leq\; C\,E'\, t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}\right)}\,.$$

3. On a d'une part $|\widehat{m_{0,\perp}}(\eta)| \;\leq\; C\,E'\,|\eta|$ et d'autre part

$$|\nabla_\eta\, \widehat{m_{0,\perp}}(\eta)| \;\leq\; C\,(\,|\eta|^{-2}\,|\widehat{\omega_0}(\eta)| + |\eta|^{-1}\,|\nabla_\eta\, \widehat{\omega_0}(\eta)|\,) \;\leq\; C\,E'$$

de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned}
\|\,|\cdot|\,(D^\sigma K_\mu \star m_{0,\perp})\,\|_p \;&\leq\; C\;\|\,\nabla_\eta\,(\widehat{D^\sigma K_\mu}\;\widehat{m_{0,\perp}})\,\|_{p'} \\
&\leq\; C_\sigma\, E'\,(\;\|\,|\cdot|^{|\sigma|}\;(1+t\,|\cdot|^2)\;e^{-\mu|\cdot|^2 t}\,\|_{p'} \\
&\qquad\qquad + \|\,|\cdot|^{|\sigma|}\;e^{-\mu|\cdot|^2 t}\,\|_{p'}\;) \\
&\leq\; C_\sigma\, E'\,(1+t^{-\frac{1}{2}})\,t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)}\,,
\end{aligned}$$

ce qui termine cette démonstration. ∎

Nous pouvons alors exploiter cette proposition pour réobtenir l'asymptotique : dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, $p \geq 2$, mais avec moins de localisation, quoique sans les taux de convergence, d'une part, et, d'autre part, dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ avec $p \leq 2$.

[5] C'est-à-dire que p' est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Corollaire 11.8 *Soit $1 < p \leq 2$.*
Pour tout multi-indice σ, il existe une constante $C_{\sigma,p} > 0$ de sorte que si ω_0 est tel que $(1 + |\cdot|^2)\,\omega_0$ soit intégrable, $\widehat{\omega_0}(0) = 0$ et $\nabla_\eta \widehat{\omega_0}(0) = 0$, alors, si $m_{0,\perp} = K_{BS} \star \omega_0$, on a pour tout temps $t \geq 0$, avec $E' = \|\,(1 + |\cdot|^2)\,\omega_0\,\|_1$

$$\|\,D^\sigma K_\mu(t) \star m_{0,\perp}\,\|_p \;\leq\; C_{\sigma,p}\; E'\; (1 + t^{-\frac{1}{2}})^{2\,(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})}\; t^{-\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{|\sigma|}{2} + \frac{1}{2}\right)}. \tag{11.30}$$

Démonstration. Donnons-nous une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ non nulle. Alors des inégalités de Hölder permettent, puisque $1 < p \leq 2$, de montrer que, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}\|\,f\,\|_p \;&\leq\; \Big(\int_{|x|\leq R} |f|^p(x)\,dx\;\Big)^{1/p} + \Big(\int_{|x|\geq R} |f|^p(x)\,dx\;\Big)^{1/p} \\ &\leq\; C_p\,\big(\,R^{\frac{2}{p}-1}\;\|\,f\,\|_2 + R^{\frac{2}{p}-2}\;\|\,|\cdot|\,f\,\|_2\,\big)\end{aligned}$$

puis, en choisissant $R = \|\,|\cdot|\,f\,\|_2 \,/\, \|\,f\,\|_2$ pour optimiser le dernier terme relativement à $R > 0$, que

$$\|\,f\,\|_p \;\leq\; C_p\;\|\,f\,\|_2^{2\,(1-\frac{1}{p})}\;\|\,|\cdot|\,f\,\|_2^{2\,(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\;,$$

et l'on termine cette démonstration grâce à la proposition 11.7, en appliquant ceci à $f = D^\sigma K_\mu \star m_{0,\perp}$. ∎

Remarque : Pour étudier la partie linéaire, incompressible et homogène, on aurait pu vouloir plutôt travailler en variables auto-similaires et suivre la décroissance spatiale au cours du temps. Nous avons vu que dans notre espace à poids gaussien $X = L^2_w(\mathbf{R}^2)$ le spectre du générateur de la chaleur en variables auto-similaires $\mathcal{L}$ est constitué de valeurs propres de multiplicité finie en les demi-entiers négatifs. Les conditions d'annulation du corollaire 11.8 et de la fin de la proposition (11.7) sont les conditions d'orthogonalité dans X aux premiers vecteurs propres : G associé à zéro et F_1, F_2 associés à la valeur propre $-1/2$. Il est donc normal d'avoir sous ces conditions une décroissance correspondant à la valeur propre suivante, par conséquent plus rapide d'un facteur $t^{1/2}$ par rapport à celle de u^{F_1} et u^{F_2}. Notons néanmoins que si nous avions procédé ainsi, par un argument spectral, il nous eût fallu recouvrer la décroissance sur $m_\perp$ à partir de celle de ω *via* la loi de Biot-Savart et sans doute abandonner le cadre des espaces basés sur $L^1(\mathbf{R}^2)$ malcommode pour cette procédure.

Corollaire 11.9 *Si ω_0 est une fonction réelle telle que $(1 + |\cdot|)\,\omega_0$ soit intégrable et $\widehat{\omega_0}(0) = 0$, $\nabla_\eta \widehat{\omega_0}(0) = 0$, alors, pour $m_{0,\perp} = K_{BS} \star \omega_0$ le champ de vecteurs à divergence nulle associé, on obtient, pour tout multi-indice σ,*

$$\lim_{t\to\infty}\; t^{1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}}\;\|\,D^\sigma K_\mu(t) \star m_{0,\perp}\,\|_p \;=\; 0\;, \qquad 2 \leq p \leq \infty\;. \tag{11.31}$$

Démonstration. Nous avons déjà démontré que la conclusion du corollaire est vraie si $(1+|\cdot|^2)\,\omega_0$ est intégrable. Obtenons alors à présent le corollaire 11.9 par densité. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons R_ε de sorte qu'en tronquant ω pour obtenir une fonction ω_ε, nulle sur $\{x\,|\,|x| > R_\varepsilon\}$ et coïncidant avec ω_0 sur $\{x\,|\,|x| \leq R_\varepsilon\}$, l'on ait

$$\|\,(1+|\cdot|)\;(\omega_0 - \omega_\varepsilon)\,\|_1 \quad \leq \quad \varepsilon\ ,$$

ce qui implique $|\widehat{\omega_\varepsilon}(0)| \leq C\,\varepsilon$ et $|\nabla_\eta\,\widehat{\omega_\varepsilon}(0)| \leq C\,\varepsilon$. Définissons à présent

$$\omega_{app} \quad = \quad \omega_\varepsilon - [\,\widehat{\omega_\varepsilon}(0)]\;G - \mathrm{i}\,[\partial_{\eta_1}\,\widehat{\omega_\varepsilon}(0)]\;F_1 - \mathrm{i}\,[\partial_{\eta_2}\,\widehat{\omega_\varepsilon}(0)]\;F_2$$

de sorte que ω_{app} est localisée gaussiennement, $\widehat{\omega_{app}}(0) = 0$, $\nabla_\eta\,\widehat{\omega_{app}}(0) = 0$ et

$$\|\,(1+|\cdot|)\;(\omega_0 - \omega_{app})\,\|_1 \quad \leq \quad C\,\varepsilon\ .$$

Soit $2 \leq p \leq \infty$ et σ un multi-indice. Choisissons maintenant, grâce à la deuxième partie de la proposition 11.7, t_ε de sorte que, pour $t \geq t_\varepsilon$,

$$t^{1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}}\;\|\,D^\sigma K_\mu(t) \star K_{BS} \star \omega_{app}\,\|_p \quad \leq \quad \varepsilon\ .$$

Ainsi, avec une constante indépendante de ε, l'inégalité triangulaire fournit, grâce à la première partie de la proposition 11.7, pour $t \geq t_\varepsilon$,

$$t^{1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}}\;\|\,D^\sigma K_\mu(t) \star m_{0,\perp}\,\|_p \quad \leq \quad C\,\varepsilon\ ,$$

ce qui termine cette démonstration et ce chapitre. ∎

Chapitre 12

Composante non linéaire

Dans ce chapitre, nous exploitons les bornes sur la matrice de Green S du système linéarisé (11.1) pour achever la démonstration du théorème 10.1. Il ne nous reste plus qu'à borner les termes non linéaires. Nous allons procéder en deux temps. D'abord nous établissons les bornes dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, pour tout $2 \leq p \leq \infty$, par un argument de type point fixe. Ensuite nous utilisons ces premières bornes pour borner les termes non linéaires dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, pour $1 \leq p \leq 2$.

Pour simplifier la présentation de ce qui suit, suivons [32] et récrivons le système (10.3) sous la forme

$$X(t) \;=\; S(t) \star X_0 \;+\; \sum_{k=1}^{2} \int_0^t S(t-t') \star \partial_k \, Q_k(t') \, dt' \tag{12.1}$$

avec pour $k = 1, 2$

$$Q_k \;=\; Q_k^1 + Q_k^2 \,, \qquad Q_k^1 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ q_k^1 \end{pmatrix} , \qquad Q_k^2 \;=\; \sum_{k'=1}^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{k'} \, q_k^{2,k'} \end{pmatrix} ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} \partial_k \, q_k^1 \;&=\; -\operatorname{div}\Big(\, m \otimes \frac{m}{1+\widetilde{\rho}} \, \Big) \;-\; \nabla \, \big((P'(1+\widetilde{\rho}) - c^2) \, \widetilde{\rho} \big) \\ \sum_{k,k'=1}^{2} \partial_k \, \partial_{k'} \, q_k^{2,k'} \;&=\; -\,\mu \, \triangle \Big(\, \frac{m \, \widetilde{\rho}}{1+\widetilde{\rho}} \, \Big) \;-\; (\mu+\lambda) \, \nabla \operatorname{div} \Big(\, \frac{m \, \widetilde{\rho}}{1+\widetilde{\rho}} \, \Big) \, . \end{aligned}$$

12.1 Cas $p \geq 2$

Comme nous l'avons déjà discuté, la matrice de Green ne régularise pas suffisamment pour permettre de traiter naïvement le système (10.3), aussi nous recourons à un théorème, basé sur des estimations d'énergie dans des espaces de Sobolev, dû à Shuichi Kawashima [36]. Notons qu'en procédant ainsi l'on perd de la décroissance temporelle puisque l'on borne certaines quantités par des constantes au mépris de leur décroissance temporelle typique.

Théorème 12.1 (Kawashima, 1983 [36]) *Soit $l \in \mathbf{N}$.*
Il existe des constantes $\varepsilon_0 > 0$ et $C > 0$ telles que si $X_0 = (\widetilde{\rho}_0, m_0)$ appartient à $H^{l+2}(\mathbf{R}^2)$ avec

$$E \;=\; |\,X_0\,|_{H^{l+2}} \;\leq\; \varepsilon_0$$

alors le système (12.1) possède une unique solution $X = (\widetilde{\rho}, m)$, globale et classique, à valeur dans $H^{l+2}(\mathbf{R}^2)$ et de condition initiale X_0, vérifiant, pour tout temps $t \geq 0$,

$$|\,X(t)\,|^2_{H^{l+2}} \;+\; \int_0^t |\,\nabla X(t')\,|^2_{H^{l+1}}\,dt' \;\;\leq\;\; C\,E^2\;.$$

Supposons à présent comme dans le théorème 10.1 que l'on a de plus $l \geq 3$. Démontrons alors qu'avec

$$E \;=\; |\,X_0\,|_{H^{l+2}} \;+\; \|\,X_{0,\shortparallel}\,\|_1 \;+\; \|\,(1+|\,\cdot\,|)\,\mathrm{rot}\;m_0\,\|_1$$

on a, pour tout $2 \leq p \leq \infty$ et tout $|\sigma| \leq l-2$,

$$\|\,D^\sigma X(t)\,\|_p \leq CE\;(1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\,l-2-|\sigma|)\right)}$$
$$\|\,D^\sigma(X(t) - S(t)\star X_0)\,\|_p \leq CE^2\;\ln(1{+}t)\;(1{+}t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\,l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}.$$

Pour cela, introduisons, comme dans [32],

$$A(t) \;=\; \sup_{\substack{0\leq t'\leq t\\ 2\leq p\leq\infty\\ |\sigma|\leq l-2}} (1+t')^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\,l-2-|\sigma|)}\;\|\,D^\sigma X(t')\,\|_p$$

$$B(t) \;=\; \sup_{\substack{0< t'\leq t\\ 2\leq p\leq\infty\\ |\sigma|\leq l-2}} \ln(1+t')^{-1}\,(1+t')^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\,l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}}\;\|\,D^\sigma X^{NL}(t)\,\|_p$$

avec $X^{NL}(t) = X(t) - S(t)\star X_0$.

Il nous suffit maintenant de nous assurer que, pour $t \geq 0$,

$$B(t) \;\;\leq\;\; C\;(\,E^2 + A(t)^2 + A(t)^l\,)\;. \tag{12.2}$$

En effet, si l'on dispose de (12.2), les estimations sur la partie linéaire donnent alors

$$A(t) \;\;\leq\;\; C\;(\,E + A(t)^2 + A(t)^l\,)$$

ce qui permet de propager, dès lors que $2\,C\,E < 1$ et $4\,C^2 E < 1/2$, simultanément $A(t) + A(t)^{l-1} \leq 1/2$ et

$$A(t) \;\leq\; \frac{C\,E}{1 - A(t) - A(t)^{l-1}} \;\leq\; 2\,C\,E\;,$$

que l'on peut réintégrer dans (12.2).

Démontrons par conséquent la majoration (12.2). Pour cela, séparons S en sa partie basses fréquences S^{BF} et sa partie hautes fréquences S^{HF} comme nous l'avons fait pour $S_{\shortparallel}$ par (11.9). Décomposons ainsi X^{NL} *via*

$$\begin{aligned}
X^{NL}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \int_0^{t/2} S^{BF}(t-t') \star \partial_k\, Q_k(t')\, dt' \\
&+ \sum_{k=1}^{2} \int_{t/2}^{t} S^{BF}(t-t') \star \partial_k\, Q_k^1(t')\, dt' \\
&+ \sum_{k,k'=1}^{2} \int_{t/2}^{t} S^{BF}(t-t') \star \partial_k\, \partial_{k'}\, Q_k^{2,k'}(t')\, dt' \\
&+ \sum_{k=1}^{2} \int_0^{t} S^{HF}(t-t') \star \partial_k\, Q_k(t')\, dt' \\
&= X_1^{NL}(t) + X_2^{NL}(t) + X_3^{NL}(t) + X_4^{NL}(t)\;. \qquad (12.3)
\end{aligned}$$

Soient $2 \leq p \leq \infty$ et $|\sigma| \leq l-2$.

1. Pour des σ' de longueur $|\sigma'| = |\sigma| + 1$, une inégalité de Young donne

$$\begin{aligned}
\|\, D^\sigma X_1^{NL}(t)\,\|_p &\leq \sum_{\sigma'} \int_0^{t/2} \|\, D^{\sigma'} S^{BF}(t-t') \star Q(t')\,\|_p\, dt' \\
&\leq C \sum_{\sigma'} \int_0^{t/2} \|\, D^{\sigma'} S^{BF}(t-t')\,\|_p\; \|\, Q(t')\,\|_1\, dt' \\
&\leq C\,(1+t/2)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{t/2} \|\, Q(t')\,\|_1\, dt'\;.
\end{aligned}$$

Or, comme $X(t)$ est borné dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ grâce à une injection de Sobolev et au théorème 12.1, on obtient en utilisant encore une fois le théorème 12.1, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|\, Q(t')\,\|_1\, dt' &\leq C \int_0^t (\,\|\, X(t')\,\|_2^2 + \|\, \nabla X(t')\,\|_2^2\,)\; dt' \\
&\leq C \int_0^t (\, A(t')^2 (1+t')^{-1} + \|\, \nabla X(t')\,\|_2^2\,)\; dt' \\
&\leq C\,(\, E^2 + A(t)^2)\; \ln(1+t) \qquad (12.4)
\end{aligned}$$

où pour $0 \leq t \leq 1$ on a utilisé $\int_0^t \| \nabla X \|_2^2 \leq C\, E^2\, t$. Ainsi

$$\| D^\sigma X_1^{NL}(t) \|_p \ \leq \ C\,(E^2 + A(t)^2)\ \ln(1+t)\ (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}\right)}. \quad (12.5)$$

2. Une inégalité de Young donne également, en choisissant $1 \leq r \leq 2$ tel que $1 + 1/p = 1/2 + 1/r$,

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma X_2^{NL}(t) \|_p \ &\leq \ \sum_{k=1}^{2} \int_{t/2}^{t} \| \partial_k\, S^{BF}(t-t') \star D^\sigma Q_k^1(t') \|_p \, dt' \\
&\leq \ C \int_{t/2}^{t} \| \nabla\, S^{BF}(t-t') \|_2 \ \| D^\sigma Q^1(t') \|_r \, dt' \\
&\leq \ C \int_{t/2}^{t} (1+t-t')^{-1} \ \| D^\sigma Q^1(t') \|_r \, dt' \ .
\end{aligned}$$

Or, pour un tel r, les inégalités de Hölder appliquées à une formule de Leibniz pour la dérivation assurent, puisque Q^1 est au moins quadratique en X, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma Q^1(t) \|_r \ &\leq \ C \sum_{\sum |\sigma_i| = |\sigma|} \| D^{\sigma_1} X(t) \|_p \ \| D^{\sigma_2} X(t) \|_2 \prod_{i \geq 3} \| D^{\sigma_i} X(t) \|_\infty \\
&\leq \ C\,(A(t)^2 + A(t)^{\max(|\sigma|,2)}) \\
&\quad\ \times\ (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}+\min_{\sum |\sigma_i| = |\alpha|} \sum_i \frac{1}{2} \min(|\sigma_i|,\, l-2-|\sigma_i|)\right)} \\
&\leq \ C\,(A(t)^2 + A(t)^{\max(|\sigma|,2)})\ (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)},
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que d'une part si tous les σ_i satisfont à $|\sigma_i| \leq (l-2)/2$ alors

$$\sum_i \min(|\sigma_i|,\, l-2-|\sigma_i|) \ = \ \sum_i |\sigma_i| \ = \ |\sigma|$$

et d'autre part s'il existe σ_{i_0} tel que $|\sigma_{i_0}| \geq (l-2)/2$ alors

$$\sum_i \min(|\sigma_i|,\, l-2-|\sigma_i|) \geq \min(|\sigma_{i_0}|,\, l-2-|\sigma_{i_0}|) = l-2-|\sigma_{i_0}| \geq l-2-|\sigma|\,.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma X_2^{NL}(t) \|_p \ \ &\leq \ \ C\,(A(t)^2 + A(t)^{\max(|\sigma|,2)})\ \ln(1+t) \\
&\qquad \times\ (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \quad (12.6)
\end{aligned}$$

3. Commençons par traiter le cas où $|\sigma| \neq 0$. Avec une nouvelle fois r tel que $1 + 1/p = 1/2 + 1/r$, pour des σ' tels que $|\sigma'| = |\sigma| - 1$, une inégalité de

Young donne

$$\begin{aligned}\| D^\sigma X_3^{NL}(t) \|_p &\leq C \sum_{\sigma'} \int_{t/2}^{t} \| D^2 S^{BF}(t-t') \|_2 \, \| D^{\sigma'} Q^2(t') \|_r \, dt' \\ &\leq C \sum_{\sigma'} \int_{t/2}^{t} (1+t-t')^{-3/2} \, \| D^{\sigma'} Q^2(t') \|_r \, dt' \ .\end{aligned}$$

En outre, comme pour $\| D^\sigma Q^1(t) \|_r$, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\| D^{\sigma'} Q^2(t') \|_r \leq C \, (A(t)^2 + A(t)^{\max(|\sigma|,2)}) \, (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}.$$

Ainsi, si $|\sigma| \neq 0$, s'ensuit

$$\begin{aligned}\| D^\sigma X_3^{NL}(t) \|_p &\leq C \, (A(t)^2 + A(t)^{\max(|\sigma|,2)}) \, \min(1,t) \\ &\qquad \times \, (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.7)\end{aligned}$$

En faisant porter une dérivée de moins sur S^{BF}, on montre également

$$\| X_3^{NL}(t) \|_p \leq C \, A(t)^2 \, \ln(1+t) \, (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(1,\ l-3)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.8)$$

4. Pour des σ' tels que $|\sigma'| = |\sigma| + 1$, on a

$$\| D^\sigma X_4^{NL}(t) \|_p \leq C \sum_{\sigma'} \int_0^t e^{-b(t-t')} \, \| D^{\sigma'} Q(t') \|_p \, dt' \ .$$

Or, d'une part, comme précédemment, pour tout $t \geq 0$, si $|\sigma'| \leq (l-2)$, alors

$$\begin{aligned}\| D^{\sigma'} Q^1(t) \|_p &\leq C \, (A(t)^2 + A(t)^{\max(|\sigma|+1,2)}) \\ &\qquad \times \, (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|+1,\, l-3-|\sigma|)+1\right)}\end{aligned}$$

et, si $|\sigma'| \leq (l-3)$, alors

$$\begin{aligned}\| D^{\sigma'} Q^2(t) \|_p &\leq C \, (A(t)^2 + A(t)^{|\sigma|+2}) \\ &\qquad \times \, (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|+2,\, l-4-|\sigma|)+1\right)}.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le théorème 12.1 combiné avec des injections de Sobolev, on obtient, pour tout $t \geq 0$, si $|\sigma'| = (l-1)$,

$$\| D^{\sigma'} Q(t) \|_p \leq C \ A(t) \ (E + A(t) + A(t)^{|\sigma|+1}) \ (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Enfin, pour $|\sigma'| = (l-2)$, $\| D^{\sigma'} Q^2(t) \|_p$ peut se majorer par interpolation, de sorte que l'on a toujours, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\| D^{\sigma'} Q(t) \|_p &\leq C \, (E^2 + A(t)^2 + A(t)^{|\sigma|+2}) \\ &\qquad \times \, (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.9)\end{aligned}$$

Notons que c'est dans ces estimations critiques pour la régularité que l'on perd de la décroissance temporelle. Par ailleurs, pour tout $\gamma > 1$, remarquons que, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^{t/2} e^{-b(t-t')}\,(1+t')^{-\gamma}\,dt' &\leq C\,e^{-bt/2}\\ \int_{t/2}^{t} e^{-b(t-t')}\,(1+t')^{-\gamma}\,dt' &\leq C\,(1+t)^{-\gamma}.\end{aligned}$$

Ainsi il résulte de ce qui précède, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|\,D^\sigma X_4^{NL}(t)\,\|_p &\leq C\,(\,E^2 + A(t)^2 + A(t)^{|\sigma|+2})\\ &\qquad \times\,(1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\,l-3-|\sigma|1)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.10)\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de (12.2) donc celle de l'asymptotique dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ pour $2 \leq p \leq \infty$. $\square$

Remarque : En exploitant mieux la régularisation de S, on peut assouplir les hypothèses à la marge pour obtenir, sans supposer $l \geq 3$, et pour tout $|\sigma| \leq (l-1)$ et tout $2 \leq p < \infty$,

$$\|\,D^\sigma X^{NL}(t)\,\|_p \;\leq\; C_p\,E^2\,\ln(1{+}t)\,(1{+}t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\,l-1-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.11)$$

12.2 Cas $p \leq 2$

Dans cette section, nous terminons la démonstration du théorème 10.1 en bornant la partie non linéaire $X^{NL}(t) = X(t) - S(t) \star X_0$ dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, avec $1 \leq p \leq 2$. Profitant du fait que pour borner les termes non linéaires nous pouvons nous contenter des bornes que nous avons déjà obtenues dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, avec $2 \leq p \leq \infty$, nous nous dispensons d'exiger sur X_0 ce qui permettrait de borner $S(t) \star X_0$ dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, avec $1 \leq p \leq 2$, en particulier évidemment nous ne supposons pas X_0 intégrable !

Nous allons en fait montrer les bornes suivantes. Supposons $l \geq 3$. Alors, pour tout temps $t > 0$, tout multi-indice σ tel que $|\sigma| \leq (l-2)$, et tout indice $1 \leq p \leq 2$, on a

$$\|\,D^\sigma X^{NL}(t)\,\|_p \;\leq\; C_\sigma E^2\,\ln(1{+}t)\,(1{+}t)^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\,l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.12)$$

Comme d'une part $(\widehat{S}(t))_{0\leq t\leq 2}$ est une famille bornée de multiplicateurs L^p forts, et, d'autre part le théorème 12.1 assure, *via* des injections de Sobolev, si $|\sigma| \leq (l-2)$, $\|\,D^\sigma Q(t)\,\|_p \leq C\,E^2$, alors on a bien

$$\|\,D^\sigma X^{NL}(t)\,\|_p \;\leq\; C\,E^2\,t\,, \qquad 0 \leq t \leq 2\,, \quad 1 \leq p \leq \infty\,.$$

Concentrons-nous donc sur les bornes pour $t \geq 2$.

Pour cela, en nous inspirant de (11.4), introduisons $\widetilde{S}$ défini par

$$\widetilde{S} \;=\; \widetilde{S}_{\shortparallel} \star \begin{bmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & R_{\shortparallel} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_\mu \star R_\perp \end{bmatrix} , \tag{12.13}$$

où $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ est la matrice de Green du système de viscosité artificielle (11.14). Alors $\widetilde{S}$ est la matrice de Green du système de viscosité artificielle

$$\left.\begin{array}{rcl} \partial_t \widetilde{\rho} + \operatorname{div} m &=& (\mu + \frac{\lambda}{2}) \triangle \widetilde{\rho} \\ \partial_t m + c^2 \nabla \widetilde{\rho} &=& \mu \triangle m + \frac{\lambda}{2} \nabla \operatorname{div} m \end{array}\right\} \tag{12.14}$$

et approche bien S. En effet, la proposition 11.5 est encore vraie si l'on remplace $S_{\shortparallel}$ et $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ par S et $\widetilde{S}$. Décomposons alors S et $\widetilde{S}$ en leur parties basses et hautes fréquences comme nous l'avons fait pour $S_{\shortparallel}$ en (11.9) et scindons X^{NL} en

$$\begin{aligned} X^{NL}(t) &= \sum_{k=1}^{2} \int_{t-1}^{t} S^{BF}(t-t') \star \partial_k Q_k(t')\, dt' \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \int_{0}^{t/2} \widetilde{S}(t-t') \star \partial_k Q_k(t')\, dt' \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \int_{t/2}^{t-1} \widetilde{S}(t-t') \star \partial_k Q_k^1(t')\, dt' \\ &+ \sum_{k,k'=1}^{2} \int_{t/2}^{t-1} \widetilde{S}(t-t') \star \partial_k \partial_{k'} Q_k^{2,k'}(t')\, dt' \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \int_{0}^{t/2} (S^{BF} - \widetilde{S}^{BF})(t-t') \star \partial_k Q_k(t')\, dt' \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \int_{t/2}^{t-1} (S^{BF} - \widetilde{S}^{BF})(t-t') \star \partial_k Q_k^1(t')\, dt' \\ &+ \sum_{k,k'=1}^{2} \int_{t/2}^{t-1} (S^{BF} - \widetilde{S}^{BF})(t-t') \star \partial_k \partial_{k'} Q_k^{2,k'}(t')\, dt' \\ &+ \sum_{k=1}^{2} \int_{0}^{t} (S^{HF} - \widetilde{S}^{HF})(t-t') \star \partial_k Q_k(t')\, dt' \\ &= X_1^{NL}(t) + \cdots + X_8^{NL}(t) \; . \end{aligned} \tag{12.15}$$

Soient $1 \leq p \leq 2$ et σ tel que $|\sigma| \leq (l-2)$.

1. Les inégalités de Hölder et de Young donnent, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma X_1^{NL}(t) \|_p &\leq C \int_{t-1}^{t} \| S^{BF}(t-t') \|_1 \, \| \nabla D^\sigma Q(t') \|_p \, dt' \\
&\leq C\, E^2 \int_{t-1}^{t} (1+t')^{-\left(1-\frac{1}{p}+\min(|\sigma|,\, l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)} dt' \\
&\leq C\, E^2\, t^{-\left(1-\frac{1}{p}+\min(|\sigma|,\, l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)} , \qquad (12.16)
\end{aligned}$$

la borne sur $\| D^\sigma Q(t') \|_p$ se démontrant essentiellement comme (12.9) dans le cas $2 \leq p \leq \infty$.

2. Pour des σ' de longueur $|\sigma'| = |\sigma| + 1$, un inégalité de Young donne, pour tout temps $t \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma X_2^{NL}(t) \|_p &\leq C \sum_{\sigma'} \int_0^{t/2} \| D^{\sigma'} \widetilde{S}(t-t') \|_p \, \| Q(t') \|_1 \, dt' \\
&\leq C\, t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{t/2} \| Q(t') \|_1 \, dt' \\
&\leq C\, E^2 \, \ln(1+t)\; t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+\frac{1}{2}\right)} , \qquad (12.17)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (12.4) avec $A(t) \leq C\, E$.

3. Les inégalités de Young et de Hölder, suivies d'un changement de variables, donnent également, puisque $5/4 - 3/2p + 1/2 \leq 1$, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma X_3^{NL}(t) \|_p &\leq C \int_{t/2}^{t-1} \| \nabla \widetilde{S}(t-t') \|_p \, \| D^\sigma Q^1(t') \|_1 \, dt' \\
&\leq C E^2 \int_{t/2}^{t-1} \Big[(t-t')^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)} \\
&\qquad\qquad \times (1+t')^{-\left(1+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)\right)} \Big] \, dt' \\
&\leq C E^2\, t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)\right)} \int_{1-\frac{1}{t}}^{1/2} \frac{dt''}{t''^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}} \\
&\leq C E^2 \ln(1+t)\;\; t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}, \qquad (12.18)
\end{aligned}$$

où $\| D^\sigma Q^1(t') \|_1$ a été estimé essentiellement comme $\| D^\sigma Q^1(t') \|_p$ dans la section précédente.

4. Si $|\sigma| \neq 0$, en procédant de même, pour des σ' tels que $|\sigma'| = |\sigma| - 1$, on obtient, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma X_4^{NL}(t) \|_p &\leq C \int_{t/2}^{t-1} \| D^2 \widetilde{S}(t-t') \|_p \, \| D^{\sigma'} Q^2(t') \|_1 \, dt' \\
&\leq C E^2 \int_{t/2}^{t-1} \Big[(t-t')^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+1\right)} \\
&\qquad\qquad \times (1+t')^{-\left(1+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)\right)} \Big] \, dt' \\
&\leq C E^2 \int_{t/2}^{t-1} \Big[(t-t')^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)} \\
&\qquad\qquad \times (1+t')^{-\left(1+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)\right)} \Big] \, dt' \\
&\leq C E^2 \ln(1+t) \;\; t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}, \qquad (12.19)
\end{aligned}$$

où l'on a tenu compte de $(t-t')^{-\frac{1}{2}} \leq 1$ dans l'intégrande. De manière similaire, puisque $5/4 - 3/2p + 1/2 \leq 1/2$, il résulte pour $|\sigma| = 0$ que, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\| X_4^{NL}(t) \|_p &\leq C \int_{t/2}^{t-1} \| \nabla \widetilde{S}(t-t') \|_p \, \| Q^2(t') \|_1 \, dt' \\
&\leq C E^2 \ln(1+t) \;\; t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(1,\, l-3)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.20)
\end{aligned}$$

5. En procédant comme pour X_2^{NL}, on montre, pour tout temps $t \geq 2$,

$$\| D^\sigma X_5^{NL}(t) \|_p \leq C\, E^2 \ln(1+t) \;\; t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}+1-\theta\right)}, \qquad (12.21)$$

avec $0 < \theta \leq 1/2$.

6. En procédant comme pour X_3^{NL}, on obtient, pour tout temps $t \geq 0$, après avoir pris en compte, pour $0 < \theta \leq 1/2$, $(t-t')^{-(1/2-\theta)} \leq 1$ dans l'intégrande,

$$\| D^\sigma X_6^{NL}(t) \|_p \leq C\, E^2 \; \ln(1+t) \;\; t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.22)$$

7. En procédant comme pour X_4^{NL}, on obtient, pour tout temps $t \geq 0$, après avoir pris en compte, pour $0 < \theta \leq 1/2$, $(t-t')^{-(1-\theta)} \leq 1$ dans l'intégrande,

$$\| D^\sigma X_7^{NL}(t) \|_p \leq C\, E^2 \ln(1+t) \;\; t^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\min(|\sigma|,\, l-2-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.23)$$

8. Pour tout temps $t \geq 0$, l'étude hautes fréquences donne

$$\begin{aligned}
\| D^\sigma X_8^{NL}(t) \|_p &\leq C \int_0^t e^{-b(t-t')} \, \| \nabla D^\sigma Q(t') \|_p \, dt' \\
&\leq C\, E^2 \int_0^t e^{-b(t-t')} \, (1+t')^{-\left(1-\frac{1}{p}+\min(|\sigma|,\, l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)} \, dt'.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $\gamma \geq 0$, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{t/2} e^{-b(t-t')}\,(1+t')^{-\gamma}\,dt' &\leq C\ t\ e^{-bt/2}\ , \\ \int_{t/2}^{t} e^{-b(t-t')}\,(1+t')^{-\gamma}\,dt' &\leq C\ (1+t)^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\|\, D^\sigma X_8^{NL}(t)\,\|_p \leq C\ E^2\ \ (1+t)^{-\left(1-\frac{1}{p}+\min(|\sigma|,\, l-3-|\sigma|)+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (12.24)$$

Ceci achève la démonstration du théorème 10.1 et ce chapitre.

Chapitre 13

Régime du tourbillon d'Oseen

Dans ce chapitre, nous exposons brièvement les obstacles à l'établissement d'un résultat, semblable au théorème 10.1, dans le régime du tourbillon d'Oseen.

Commençons par discuter l'existence de solutions. En ce qui concerne le théorème 10.1, elle repose sur des estimations d'énergie $L^2(\mathbf{R}^2)$ exploitant une entropie pour le système (10.3). Or le régime du tourbillon d'Oseen correspond précisément aux écoulements dont le champ de vitesse, ou de quantité de mouvement, n'est pas de carré intégrable. Pour remédier à cela, pour les écoulements incompressibles, nous sommes passés en formulation tourbillon, ce qui implique de savoir reconstruire la vitesse à partir de la vorticité. Pour le faire dans $L^q(\mathbf{R}^2)$, avec $2 < q \leq \infty$, *via* la proposition C.1, il nous faudrait estimer la vorticité[1] dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, pour des p compris strictement entre un et deux. Dans ce mémoire, nous avons généralement obtenu de telles estimations en travaillant, dans des variables suivant l'étalement spatial au cours du temps, avec des espaces L^2 à poids. Cela semble nous être maintenant interdit par la compétition de deux régimes de dispersion : celui diffusif et celui des ondes.

Cependant, tout cela ne constitue pas *a priori* une véritable obstruction, aussi venons-en à des considérations sur la décroissance temporelle des solutions. Exposons tout d'abord en quoi elle est critique de bien des points de vue.

Déjà pour l'équation de Navier-Stokes homogène, dans le régime du tourbillon d'Oseen, les termes non linéaires se révèlent critiques pour la décroissance temporelle[2]. En effet, ce régime correspond à des décroissances

[1] Ou $\mathrm{rot}(m)$ si l'on souhaite plutôt reconstruire $m_\perp$.

[2] Ce phénomène est lié à l'auto-similarité des tourbillons d'Oseen.

temporelles de la forme

$$\| \, D^\sigma u_\perp \, (t) \, \|_p \sim t^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{|\sigma|}{2}\right)}$$

qui conduisent à

$$\| \, (u_\perp(t) \cdot \nabla) \; u_\perp(t)) \, \|_p \sim t^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+1\right)} \; ,$$

ce qui une fois intégré contre le noyau de la chaleur dans une formule de Duhamel redonne au mieux $t^{-(1/2-1/p)}$. Insistons sur le fait que puisque la décroissance de la partie à divergence nulle est déjà critique, il est primordial pour estimer les termes quadratiques que la partie à rotationnel nul ne décroisse pas plus lentement dans $L^p(\mathbf{R}^2)$, quand $p \geq 2$.

Il existe au moins une autre raison, cette fois propre aux fluides compressibles, pour laquelle ce régime de décroissance temporelle est critique. Nous avons déjà mentionné que, les systèmes pour les fluides à densité variable étant quasi linéaires, il est utile de contrôler uniformément en temps la densité ρ dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$. En outre, l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \, \rho \; + \; \operatorname{div} m_{\shortparallel} \;\; = \;\; 0 \tag{13.1}$$

laisse penser que pour cela nous aurions besoin de

$$\int_0^\infty \| \operatorname{div} m_{\shortparallel}(t') \, \|_\infty \; dt' \;\; < \;\; \infty \; . \tag{13.2}$$

Or précisément $\nabla m_\perp(t)$ décroît *a priori* comme $(1+t)^{-1}$ dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$, lorsque l'on se place dans le régime du tourbillon d'Oseen. Il est donc crucial que $\nabla m_{\shortparallel}$ décroisse strictement plus vite dans $L^\infty(\mathbf{R}^2)$. Ainsi ne nous suffit-il pas, comme pour le théorème 10.1, de séparer $X_{\shortparallel}$ et $X_\perp$ uniquement dans la composante linéaire $S(t) \star X_0$ et d'une certaine façon *a posteriori.*

À présent que nous avons à l'esprit quelques unes des contraintes sur la décroissance temporelle de la partie irrotationnelle, estimons quels taux de décroissance nous pouvons espérer. Tout d'abord, notons que l'inégalité

$$\begin{aligned} \| \int_0^{t/2} \widetilde{S}_{\shortparallel}(t-t') \;\; \star \;\; \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{div}\,(m_\perp \otimes m_\perp) \end{pmatrix} (t') \; dt' \, \|_p & \\ \leq \; C \int_0^{t/2} (t-t')^{-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\frac{1}{p}\right)} \; (1+t')^{-\frac{1}{2}} \; dt' & \end{aligned} \tag{13.3}$$

donne au mieux une décroissance en $t^{-\left(3/4-3/(2p)\right)}$. Ainsi, comme pour la composante incompressible $m_\perp$, considérer le régime du tourbillon d'Oseen plutôt que celui décrit dans le théorème 10.1 entraînerait une perte d'au moins $t^{1/2}$ en décroissance temporelle, de sorte que formellement la composante purement compressible resterait dominante dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ lorsque

$1 \leq p \leq 2$ et dominée dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ lorsque $2 \leq p \leq \infty$. Ces taux de décroissance satisferaient aux exigences mentionnées plus haut.

Néanmoins, le taux prescrit par (13.3) est sans doute bien trop optimiste. Pour nous en convaincre, considérons cette fois une estimation critique en régularité. Pour un σ' tel que $|\sigma'| = |\sigma| - 1$ et un $k \in \{1, 2\}$, on obtient, lorsque $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned}
\| \int_{t/2}^{t-1} \partial_k \, \widetilde{S}_{\shortparallel}(t-t') \star \begin{pmatrix} 0 \\ D^{\sigma'} \mathrm{div}(m_\perp \otimes m_\perp) \end{pmatrix} (t') \; dt' \, \|_p & \\
\leq C \int_{t/2}^{t-1} (t-t')^{-\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\frac{1}{q} + \frac{1}{2}\right)} \; (1+t')^{-\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{|\sigma|}{2}\right)} \; dt' & \\
\leq \begin{cases} C_p \ln(1+t) \; (1+t)^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{|\sigma|}{2}\right)} & \text{si } 2 \leq p < \infty \\ C_p \; (1+t)^{-\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\frac{1}{p} + \frac{|\sigma|}{2}\right)} & \text{si } 1 < p < 2 \end{cases} & \qquad (13.4)
\end{aligned}$$

après avoir optimisé la décroissance temporelle, en tenant compte de la condition d'intégrabilité $5/4 - 3/2q + 1/2 \leq 1$ et de la condition d'applicabilité d'une inégalité de Young $1/q + 1/r = 1 + 1/p$, par les choix $q = 2$ et $r = (1/2 + 1/p)^{-1}$ si $2 \leq p < \infty$, et $q = p$, $r = 1$ sinon. Cette fois, l'estimation est désastreuse à tout point de vue, puisqu'elle donne en toute norme $L^p(\mathbf{R}^2)$ une décroissance strictement plus lente que celle du tourbillon d'Oseen, déjà critique.

Conclusion

Chapitre 14

Perspectives

Un certain nombre de questions restent en suspens. Rassemblons-les pour en offrir une vision plus claire.

Tout d'abord, la borne sur le temps de vie de la turbulence homogène en termes du nombre de Reynolds, fournie par le théorème 2.1, semble devoir être améliorée. Sans doute une des clefs se trouve dans l'étude non pas du comportement en grand temps mais en temps intermédiaire, passant par l'observation de *pseudo-équilibres* intermédiaires donnés par des combinaisons de *vortex* évoluant selon ce que prédit le modèle non visqueux.

Pour les écoulements incompressibles faiblement inhomogènes, demeure la question des grandes solutions loin des tourbillons d'Oseen. *A priori* les fluides incompressibles dont le tourbillon initial est intégrable et la densité initiale proche d'une constante doivent encore se comporter asymptotiquement comme un tourbillon d'Oseen.

Quant aux écoulements compressibles, les perspectives sont plus claires encore : il nous reste à traiter le régime des tourbillons d'Oseen. Il semblerait déjà intéressant de traiter ce régime pour un système modèle, comme un système de viscosité artificielle[1], ce qui aurait l'avantage de séparer — formellement et temporairement — les problèmes liés au régime de décroissance temporelle de ceux dus au manque de régularisation du linéarisé.

Un autre aspect que nous n'avons pas discuté jusqu'ici concerne la stabilité de tous ces résultats bidimensionnels vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. Se poser la question de cette stabilité revient d'une certaine manière à interroger la validité de l'hypothèse bidimensionnelle.

[1]Cela correspondrait par exemple à remplacer S dans l'équation (12.1) par $\widetilde{S}$, définie par (12.13). La matrice de Green $\widetilde{S}$ approche bien S quant à la dynamique, mais est régularisante.

Appendices

Annexe A

Commutateurs

Dans ce court appendice, nous regroupons, afin de ne pas entraver la progression d'autres démonstrations, quelques estimations de commutateurs, un peu dans l'esprit — quoique plus élémentaires — de celles de Tosio Kato et de Gustavo Ponce [35].

Commençons par des estimations correspondant à des espaces de Sobolev homogènes de petits indices. Rappelons $I = (-\triangle)^{\frac{1}{2}}$.

Lemme A.1 *Soient* $0 < s \leq 1$ *et* $\sigma > 1$.

1. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que si* $I^s f$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$ *et* g *appartient à* $H^\sigma(\mathbf{R}^2)$, *alors* $I^s(fg) - f\, I^s g$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$ *avec*

$$\| I^s(fg) - f\, I^s g \|_2 \quad \leq \quad C \,\| I^s f \|_2 \; | \, g \,|_{H^\sigma}. \tag{A.1}$$

2. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que si* $I^s f$ *appartient à* $H^\sigma(\mathbf{R}^2)$ *et* g *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$, *alors* $I^s(fg) - f\, I^s g$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$ *et*

$$\| I^s(fg) - f\, I^s g \|_2 \quad \leq \quad C \;| \, I^s f \,|_{H^\sigma} \; \| \, g \,\|_2. \tag{A.2}$$

Démonstration. Commençons par remarquer qu'il existe une constante strictement positive $C > 0$ tel que l'on ait $\| \widehat{h} \|_1 \leq C \,| \, h \,|_{H^\sigma}$ pour toute fonction h appartenant à $H^\sigma(\mathbf{R}^2)$. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer une inégalité de Hölder à

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{h}(\eta)| \, d\eta \quad = \quad \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{(1 + |\eta|^2)^{\frac{\sigma}{2}}} \; (1 + |\eta|^2)^{\frac{\sigma}{2}} \; |\widehat{h}(\eta)| \; d\eta \; .$$

Il nous suffira donc de démontrer les deux inégalités suivantes

$$\| I^s(fg) - f\, I^s g \|_2 \quad \leq \quad C \;\| \, I^s f \,\|_2 \; \| \, \widehat{g} \,\|_1 \; , \tag{A.3}$$

$$\| I^s(fg) - f\, I^s g \|_2 \quad \leq \quad C \;\| \, \widehat{I^s f} \,\|_1 \; \| \, g \,\|_2 \; . \tag{A.4}$$

Posons $h = I^s(fg) - f\, I^s g$. Nous avons alors

$$\widehat{h}(\eta) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} (|\eta|^s - |\eta-\zeta|^s)\ \widehat{f}(\zeta)\ \widehat{g}(\eta-\zeta)\ d\zeta$$

pour presque tout $\eta \in \mathbf{R}^2$. En exploitant l'inégalité élémentaire suivante

$$||\eta|^s - |\eta'|^s| \;\le\; |\eta-\eta'|^s\ , \quad 0 < s \le 1 \tag{A.5}$$

vérifiée par tous $\eta, \eta' \in \mathbf{R}^2$, nous obtenons

$$|\widehat{h}(\eta)| \;\le\; \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbf{R}^2} |\zeta|^s\ |\widehat{f}(\zeta)|\ |\widehat{g}(\eta-\zeta)|\ d\zeta\ .$$

Enfin, selon l'inégalité de Young que l'on applique à la convolution du membre de droite, on peut arriver à (A.3) ou (A.4). ∎

Venons-en à présent à l'estimation pour des indices de régularité plus élevés.

Lemme A.2 *Soient $s \ge 1$ et $\sigma > 1$.*
Il existe $C > 0$ tel que si $I^s f$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^2)$ et g appartient à $H^\sigma(\mathbf{R}^2)$, alors $I^s(fg) - f\, I^s g$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^2)$ et

$$\|\, I^s(fg) - f\, I^s g\,\|_2 \;\le\; C\,\|\, I^s f\,\|_2\ |\, g\,|_{H^\sigma} \;+\; C\,|\,\nabla f\,|_{H^\sigma}\|\, I^{s-1} g\,\|_2\ . \tag{A.6}$$

Démonstration. La démonstration est essentiellement la même que celle du lemme précédent, où l'on remplace (A.5) par l'inégalité

$$||\zeta|^s - |\zeta'|^s| \;\le\; C\ |\zeta-\zeta'|\quad (\,|\zeta-\zeta'|^{s-1} + |\zeta'|^{s-1}) \tag{A.7}$$

vérifiée pour tous $\zeta, \zeta' \in \mathbf{R}^2$. Bien évidemment, comme précédemment, nous aurions pu obtenir d'autres estimations en faisant varier notre application des inégalités de Young. ∎

Annexe B

Reconstitution de la pression

Nous regroupons ici le nécessaire pour estimer la pression dans la partie traitant des fluides incompressibles à densité variable.

Ayant en ligne de mire l'équation (6.12), nous nous intéressons à la reconstitution d'un gradient de pression $\nabla\Pi$ en fonction d'une fonction F à travers la résolution de l'équation

$$\operatorname{div}\,\Big((1+b)\,\nabla\,\Pi\Big) \;=\; \operatorname{div}\,F\;, \tag{B.1}$$

où b est une petite fonction donnée. Notons que $\nabla\Pi$ dépend linéairement du champ de vecteurs F.

Lorsque $b=0$, l'équation se réduit à $\triangle\,\Pi = \operatorname{div} F$, et se résout donc *via* $\nabla\Pi = -\nabla(-\triangle)^{-1}\operatorname{div} F$. Si l'on note $\mathbf{P}$ le projecteur de Leray, c'est-à-dire le projecteur[1] sur les champs de vecteurs à divergence nulle le long des gradients, et $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ son projecteur supplémentaire, alors dans ce cas l'équation est donc résolue par $\nabla\Pi = \mathbf{Q}\,F$. Ces projecteurs sont définis et continus sur $L^p(\mathbf{R}^2)$, pour tout $1<p<\infty$, et nous allons en fait résoudre (B.1) comme une perturbation de l'équation pour $b=0$.

La proposition suivante énonce des estimations dans les espaces de Lebesgue. La première partie résout l'équation (B.1) ; la seconde estime la différence entre deux solutions d'équations du type (B.1).

Proposition B.1

1. *Soit* $1<p<\infty$.
   Il existe des constantes strictement positives $C>0$ *et* $\kappa>0$ *telles que si* F *appartient à* $L^p(\mathbf{R}^2)$ *et* b *à* $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ *avec* $\kappa\,\|\,b\,\|_\infty<1$, *alors l'équation (B.1) possède, à une constante près, une unique solution* Π *telle que* $\nabla\Pi$ *appartienne à* $L^p(\mathbf{R}^2)$, *cette solution vérifiant par ailleurs*

$$\|\,\nabla\Pi\,\|_p \;\leq\; \frac{C}{1-\kappa\,\|\,b\,\|_\infty}\;\|\,F\,\|_p\;. \tag{B.2}$$

[1] Orthogonal dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

2. *Soient $1 < p \leq \infty$ et $1 < q, r < +\infty$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.*
Il existe des constantes $C > 0$ et $\kappa > 0$ telles que si F appartient à $L^q(\mathbf{R}^2)$ et, pour $i = 1, 2$, b_i appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^2) \cap L^p(\mathbf{R}^2)$ avec $\kappa \| b_i \|_\infty < 1$, alors les solutions Π_i de

$$\operatorname{div} \big((1 + b_i) \nabla \Pi_i \big) \quad = \quad \operatorname{div} F \ ,$$

pour $i = 1, 2$, sont telles que $\nabla \left(\Pi_2 - \Pi_1 \right)$ appartienne à $L^r(\mathbf{R}^2)$ et vérifie

$$\| \nabla \left(\Pi_2 - \Pi_1 \right) \|_r \quad \leq \quad \frac{C \ \| b_2 - b_1 \|_p \ \| F \|_q}{\left(1 - \kappa \| b_1 \|_\infty \right) \left(1 - \kappa \| b_2 \|_\infty \right)} \ . \tag{B.3}$$

Démonstration. Afin d'exprimer $\nabla \Pi$ en termes de projecteurs de Leray, commençons par récrire (B.1) sous la forme

$$\operatorname{div} \nabla \Pi \quad = \quad \operatorname{div} \left(\, F - b \nabla \Pi \, \right) \ .$$

L'équation (B.1) est par conséquent équivalente à $\nabla \Pi = \mathbf{Q} \left(F - b \nabla \Pi \right)$ donc à $(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b) \nabla \Pi = \mathbf{Q}\, F$. Or, puisque l'opérateur $\mathbf{Q}$ est continu sur $L^p(\mathbf{R}^2)$, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\| \mathbf{Q} \ b \, f \|_p \quad \leq \quad \kappa \ \| b \|_\infty \ \| f \|_p$$

pour tout $f \in L^p(\mathbf{R}^2)$. Ainsi, si $\kappa \| b \|_\infty < 1$, l'opérateur $\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b$ est inversible sur $L^p(\mathbf{R}^2)$, et il s'ensuit que

$$\nabla \Pi \quad = \quad \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b \, \right)^{-1} \mathbf{Q} \ F \tag{B.4}$$

définit notre unique solution, avec la borne annoncée.

Afin de démontrer la seconde partie de la proposition, en utilisant la formulation (B.4), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \nabla \Pi_1 \quad &= \quad \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_2 \, \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_2 \, \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_1 \, \right)^{-1} \mathbf{Q} \ F \\ \nabla \Pi_2 \quad &= \quad \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_2 \, \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_1 \, \right) \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_1 \, \right)^{-1} \mathbf{Q} \ F \end{aligned}$$

puis soustraire ces deux égalités et factoriser pour obtenir

$$\nabla (\Pi_2 - \Pi_1) \quad = \quad \left(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_2 \, \right)^{-1} \mathbf{Q} \ (b_1 - b_2) \ (\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_1)^{-1} \ \mathbf{Q} \ F \ .$$

La continuité du projecteur $\mathbf{Q}$ sur $L^r(\mathbf{R}^2)$ réduit alors l'estimation (B.3) à une estimation de $(b_1 - b_2) \ (\mathbf{I} + \mathbf{Q}\, b_1)^{-1} \mathbf{Q}\, F$ en norme $L^r(\mathbf{R}^2)$. Ainsi une inégalité de Hölder combinée avec la continuité des opérateurs sur $L^q(\mathbf{R}^2)$ termine la démonstration de la proposition. ∎

Contrairement à ce qui se passe dans le cas $b = 0$, notre équation (B.1) ne commute pas avec les opérateurs de dérivation $I^s = (-\triangle)^{\frac{s}{2}}$. Cependant à l'aide d'une estimation de commutateurs démontrée dans l'annexe A, nous concluons cet appendice-ci par des estimations dans des espaces de Sobolev homogènes pour les solutions $\nabla \Pi$ de l'équation (B.1).

Proposition B.2 *Soient* $0 < s < 1$ *et* $\sigma > 1$.
Il existe des constantes $C > 0$ *et* $\kappa > 0$ *telles que, pourvu que* F *appartienne à* $H^s(\mathbf{R}^2)$, b *à* $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ *avec* $\kappa \| b \|_\infty < 1$ *et* $I^s b$ *à* $H^\sigma(\mathbf{R}^2)$, *alors la solution* Π *de l'équation (B.1) est telle que* $I^s \nabla\Pi$ *appartienne à* $L^2(\mathbf{R}^2)$ *et*

$$\| I^s \nabla\Pi \|_2 \; \leq \; \frac{C}{1-\kappa \| b \|_\infty} \big(\| I^s F \|_2 + \frac{1}{1-\kappa \| b \|_\infty} | I^s b |_{H^\sigma} \| F \|_2 \big). \quad \text{(B.5)}$$

Démonstration. Appliquons I^s à l'équation (B.1), nous obtenons

$$\operatorname{div} \big((1+b) \nabla I^s \Pi \big) \; = \; \operatorname{div} \big([b, I^s] \nabla \Pi \big) \; + \; \operatorname{div} \big(I^s F \big) .$$

En utilisant la première partie de la proposition B.1, nous en déduisons

$$\| I^s \nabla \Pi \|_2 \;\; \leq \;\; \frac{C}{1-\kappa \| b \|_\infty} \big(\| I^s F \|_2 + \| [b, I^s] \nabla\Pi \|_2 \big) \; .$$

Or en appliquant d'abord l'estimation (A.2) de commutateurs puis à nouveau l'inégalité (B.2), on montre que

$$\| [b, I^s] \nabla\Pi \|_2 \; \leq \; C \; | I^s b |_{H^\sigma} \| \nabla \Pi \|_2 \; \leq \; \frac{C}{1-\kappa \| b \|_\infty} | I^s b |_{H^\sigma} \| F \|_2 \; .$$

Il ne reste donc plus qu'à tout rassembler pour terminer la démonstration de la majoration (B.5) et cet appendice. ∎

Annexe C

Loi de Biot-Savart

Ce mémoire repose partiellement sur une bonne compréhension de la reconstruction d'un champ de vecteur à divergence nulle à partir de son rotationnel. Cet appendice est censé pourvoir à cette nécessité.

Rappelons tout d'abord comment obtenir la loi de Biot-Savart. La paire d'équations formée par $\operatorname{div} v = 0$ et $\operatorname{rot} v = w$ est formellement équivalente[1] à $v = \nabla^\perp \phi$ avec $\triangle \phi = \omega$. D'où $v = -\nabla^\perp (-\triangle)^{-1} w$, ce qui, en variable de Fourier, conduit à

$$\widehat{v}(\eta) \quad = \quad \frac{i\,\eta^\perp}{|\eta|^2}\, \widehat{w}\,(\eta) \tag{C.1}$$

et, connaissant la solution fondamentale associée au Laplacien sur $\mathbf{R}^2$, à

$$v(x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\, w(y)\; dy\ . \tag{C.2}$$

On dit alors que v est obtenu à partir de w *via* la *loi de Biot-Savart* et l'on note $v = K_{BS} \star w$, où K_{BS} est le noyau de Biot-Savart : $K_{BS}(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$.

Donnons maintenant des estimations dans les espaces de Lebesgue.

Proposition C.1

1. *Soient* $1 < p < 2 < q < \infty$ *tels que* $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$.
   Il existe une constante $C > 0$ *telle que, si* w *appartient à* $L^p(\mathbf{R}^2)$*, alors (C.2) définit* v *dans* $L^q(\mathbf{R}^2)$ *avec*

$$\|\, v \,\|_q \quad \leq \quad C\, \|\, w \,\|_p\ . \tag{C.3}$$

   En outre, dans ce cas, on a bien $\operatorname{div} v = 0$ *et* $\operatorname{rot} v = w$.

[1] $\mathbf{R}^2$ est simplement connexe. Donc une forme fermée y est exacte.

2. *Soient* $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$ *et* $0 < \theta < 1$ *tels que* $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{2}$.
Il existe une constante $C > 0$ *telle que, si* w *appartient à* $L^p(\mathbf{R}^2) \cap L^q(\mathbf{R}^2)$*, alors (C.2) définit* v *dans* $L^\infty(\mathbf{R}^2)$ *avec*

$$\| v \|_\infty \quad \leq \quad C \, \| w \|_p^\theta \, \| w \|_q^{1-\theta} \; . \tag{C.4}$$

En outre, dans ce cas, on a bien $\operatorname{div} v = 0$ *et* $\operatorname{rot} v = w$.

3. *Soit* $1 < p < +\infty$*. Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, si* w *appartient à* $L^p(\mathbf{R}^2)$ *et* v *est défini par (C.2), alors* ∇v *appartient à* $L^p(\mathbf{R}^2)$ *avec*

$$\| \nabla v \|_p \quad \leq \quad C \, \| w \|_p \; . \tag{C.5}$$

Démonstration. La première partie dérive d'une inégalité de type Young, appelée inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev. En effet, le noyau de Biot-Savart K_{BS} manque de peu d'être de carré intégrable, mais il appartient à l'espace L^2-faible. Pour l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, nous renvoyons à [48, théorème V.1]. On pourra trouver plus généralement des règles de convolution pour les espaces de Lorentz dans [5] ou [40].

La deuxième partie est triviale lorsque $w = 0$. Dans le cas contraire, remarquons que des inégalités de Hölder on déduit

$$\begin{aligned} |v(x)| \quad & \leq \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq R} |w(x-y)| \, \frac{dy}{|\, y\,|} \; + \; \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \geq R} |w(x-y)| \, \frac{dy}{|\, y \,|} \\ & \leq \quad C \, \| w \|_q \, R^{1-\frac{2}{q}} \; + \; C \, \| w \|_p \, \frac{1}{R^{\frac{2}{p}-1}} \; , \end{aligned}$$

pour presque tout $x \in \mathbf{R}^2$ et tout $R > 0$. Choisissons $R = (\| w \|_p \,/\, \| w \|_q)^\beta$ où $\beta = (1-\theta)/(\frac{2}{p} - 1) = \theta/(1 - \frac{2}{q})$, pour optimiser vis-à-vis de R le dernier membre de cette double inégalité. Nous obtenons ainsi (C.4).

Dériver (C.2) montre que ∇v est obtenu à partir de w *via* une convolution avec un noyau de type Calderón-Zygmund. Ces noyaux n'appartiennent qu'à L^1-faible, mais ils vérifient des conditions supplémentaires de régularité et d'annulation qui assurent leur continuité sur $L^p(\mathbf{R}^2)$, pour tout $1 < p < \infty$. Pour plus de détail, nous renvoyons à [48, théorème II.3]. ■

Remarques :

1. Notons qu'en dimension deux il existe un certain décalage, faible mais primordial pour la dynamique asymptotique en temps long, entre les espaces de Lebesgue auxquels appartiennent simultanément v et w. Si w est intégrable, v n'est que *faiblement* de carré intégrable dès lors que w n'est pas d'intégrale nulle. En effet, si w est intégrable mais $\widehat{w}(0) \neq 0$, alors $\widehat{w}$ est continu et $|\widehat{v}(\eta)|$ est équivalent au voisinage de l'origine à $|\widehat{w}(0)| \,/\, |\eta|$, $\widehat{v}$ et v

ne peuvent par conséquent pas être de carré intégrable.

2. De même, si $(1+|\cdot|)\,w$ est intégrable, alors $\widehat{w}$ est continûment dérivable et $\widehat{v}$ ne peut être continu — et v intégrable — que si $\widehat{w}(0)=0$ et $\partial_i\widehat{w}(0)=0$ pour $i=1,2$, c'est-à-dire $\int_{\mathbf{R}^2} w = 0$ et $\int_{\mathbf{R}^2} x_i\, w(x)\, dx = 0$ pour $i=1,2$.

Énonçons à présent des estimations pour les semi-normes de Sobolev homogènes. Nous avons vu que v ne peut pas en général appartenir à $L^2(\mathbf{R}^2)$, mais nous montrons cependant que $I^s\, v$ peut bel et bien appartenir à $L^2(\mathbf{R}^2)$, pour tout indice de régularité $s>0$. Rappelons à cet effet $I=(-\triangle)^{\frac{1}{2}}$.

Proposition C.2

1. *Soit* $s\in\mathbf{R}$.
   Il existe une contante $C>0$ *telle que, si* $I^{s-1}w$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$, *alors, si* v *est défini par (C.2),* $I^s\, v$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$ *et*
$$|\, v\,|_{\dot H^s} \;\le\; C\,|\, w\,|_{\dot H^{s-1}}\;. \tag{C.6}$$

2. *Soit* $0<s<1$.
   Il existe une constante $C>0$ *telle que, si* $(1+|\cdot|)\,w$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$, *alors, si* v *est défini par (C.2),* $I^s\, v$ *appartient à* $L^2(\mathbf{R}^2)$ *et*
$$|\, v\,|_{\dot H^s} \;\le\; C\,\|\,(1+|\cdot|)\,w\,\|_2\;. \tag{C.7}$$

Démonstration. La première partie est une conséquence directe de l'expression de la loi de Biot-Savart en variables de Fourier (C.1). Elle nous permet par ailleurs de réduire la démonstration de la deuxième partie à une majoration de $|\,w\,|_{\dot H^{s-1}}$. Or pour $0<s<1$, on a

$$|\,w\,|^2_{\dot H^{s-1}} = C\int_{\mathbf{R}^2}\frac{|\widehat{w}(\eta)|^2}{|\eta|^{2(1-s)}}\,d\eta \;\le\; C\int_{|\eta|\le 1}\frac{|\widehat{w}(\eta)|^2}{|\eta|^{2(1-s)}}\,d\eta + C\int_{|\eta|\ge 1}|\widehat{w}(\eta)|^2\,d\eta\,.$$

Le second terme du dernier membre de cette inégalité est dominé par $\|\,w\,\|_2^2$. Choisissons maintenant un $p>2/s$ et appliquons d'abord une inégalité de Hölder puis une injection de Sobolev pour borner l'autre terme comme suit

$$\int_{|\eta|\le 1}\frac{|\widehat{w}(\eta)|^2}{|\eta|^{2(1-s)}}\,d\eta \;\le\; C\,\|\,\widehat{w}\,\|_p^2 \;\le\; C\,|\,\widehat{w}\,|^2_{H^1}\;.$$

Nous pouvons à présent conclure la démonstration de la proposition en rassemblant tout cela pour obtenir

$$|\,w\,|^2_{\dot H^{s-1}} \;\le\; C\,|\,\widehat{w}\,|^2_{H^1} \;+\; C\,\|\,w\,\|_2^2 \;\le\; C\,\|\,(1+|\cdot|)\,w\,\|_2^2\;.$$

■

Concluons cet appendice par une proposition, qui certes ne nous est pas réellement utile par ailleurs, mais qui constitue une justification de la dérivation formelle de la loi de Biot-Savart en tant que réciproque partielle de la première proposition de cet appendice.

Proposition C.3 *Soient $1 < p < 2 < q < \infty$ tels que $1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$.*
Si v est un champ de vecteurs à divergence nulle appartenant à $L^q(\mathbf{R}^2)$ tel que $w = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ appartienne à $L^p(\mathbf{R}^2)$, alors $v = K_{BS} \star w$.

Démonstration. Définissons $\widetilde{v} = v - K_{BS} \star w$ dans $L^q(\mathbf{R}^2)$, grâce à la première proposition de cet appendice. Alors $\operatorname{div} \widetilde{v} = 0$ et $\operatorname{rot} \widetilde{v} = 0$. Par conséquent $\widetilde{v}$ est harmonique, puisque $\triangle \widetilde{v} = \nabla \operatorname{div} \widetilde{v} + \nabla^{\perp} \operatorname{rot} \widetilde{v} = 0$. Il s'ensuit que $\widetilde{v}$ vérifie la propriété de la moyenne. D'où l'on déduit, *via* une inégalité de Hölder, pour tout $x \in \mathbf{R}^2$,

$$|\widetilde{v}(x)| \ \leq \ \frac{1}{\pi} \int_{|x-y| \leq 1} |\widetilde{v}(y)| \, dy \ \leq \ C \, \| \, \widetilde{v} \, \|_q \, .$$

Ainsi $\widetilde{v}$ est une fonction harmonique et bornée sur tout l'espace, donc, d'après le principe de Liouville, constante. Or $\widetilde{v}$ appartient à $L^q(\mathbf{R}^2)$. Finalement, q étant fini, $\widetilde{v}$ est donc bel et bien nulle et l'on a $v = K_{BS} \star w$. ■

Annexe D

Notations

Soucieux du confort de lecture, nous regroupons ici l'essentiel des notations et conventions de ce mémoire, toutes étant classiques ou déjà définies dans le corps du texte.

Sans aucun doute la convention la plus fréquemment employée consiste à désigner par C toute constante *inoffensive*, dont la valeur peut même varier au cours d'une même formule.

Ensembles élémentaires

Bien évidemment $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, *et cætera*.

Si x est un réel, alors x^+, x^- désignent les parties positive et négative de x, c'est-à-dire

$$x^+ = \max(x, 0) \geq 0, \qquad x^- = \max(-x, 0) \geq 0, \qquad x = x^+ - x^- .$$

On définit également le signe de x par

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Si p est un réel tel que $1 \leq p \leq \infty$, alors on note p' l'exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$.

Le nombre i désigne une racine carrée de -1. Pour un nombre complexe z, on note $\Re z = (z + \bar{z})/2$ sa partie réelle et $\Im z = (z - \bar{z})/2\mathrm{i}$ sa partie imaginaire.

Pour un point $x = (x_1, x_2)$ du plan, son orthogonal $x^\perp$ est le vecteur obtenu par rotation d'un quart de tour dans le sens direct

$$(x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1) .$$

Pour des points x, y d'un espace euclidien $\mathbf{R}^d$, $d \in \mathbf{N}^*$, $x \cdot y$ désigne leur produit scalaire canonique et, pour $x \in \mathbf{R}^d$, $|\,x\,|$ la norme associée. On note alors $\mathbf{S}^{d-1}$ la sphère euclidienne de $\mathbf{R}^d$. En outre, nous notons $|\,\Omega\,|$ la mesure de Lebesgue d'un espace mesurable Ω.

Pour tout multi-indice $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{N}^2$, on définit sa longueur $|\sigma|$ par $|\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2$.

Espaces de fonctions

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbf{R}^2)$ désigne l'espace de Lebesgue habituel, de norme $\|\cdot\|_p$. Le produit scalaire sur $L^2(\mathbf{R}^2)$ est noté $(\cdot\,,\,\cdot)_*$, qui nous sert également à noter tout crochet de dualité.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p_w(\mathbf{R}^2)$ désigne un espace de Lebesgue à poids gaussien, c'est-à-dire, avec $G(\xi) = (4\pi)^{-1} e^{-|\xi|^2/4}$,

$$L^p_w(\mathbf{R}^2) \;=\; \left\{\, f \;\middle|\; G^{-1/2} f \in L^p(\mathbf{R}^2) \,\right\}$$

de norme associée $|\,f\,|_{w,p} = \|\,G^{-1/2} f\,\|_p$. On note alors $X = L^2_w(\mathbf{R}^2)$ l'espace de Hilbert associé à la nome $\|\cdot\|_X = |\cdot|_{w,2}$ et au produit scalaire

$$(f\,,\,g)_X \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} G(x)^{-1}\; f(x)\; g(x)\; dx\;.$$

On introduit également les sous-espaces fermés

$$\begin{aligned} X_0 &\;=\; \left\{\, f \in X \;\middle|\; \int_{\mathbf{R}^2} f(x)\,dx \;=\; 0 \,\right\}, \\ X_1 &\;=\; \left\{\, f \in X_0 \;\middle|\; \int_{\mathbf{R}^2} x_i\; f(x)\,dx \;=\; 0\,, \quad \text{pour } i = 1,2 \,\right\}. \end{aligned}$$

Occasionnellement on rencontre également un espace de Hilbert à poids polynomial $L^2(d)$, paramétré par $d \in \mathbf{R}$,

$$L^2(d) \;=\; \left\{\, f \;\middle|\; (1 + |\cdot|^2)^{d/2} f \in L^2(\mathbf{R}^2) \,\right\}$$

de norme $|\cdot|_{p,d}$.

Naturellement $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ désigne l'espace des distributions, dual des fonctions C^∞ à support compact ; $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$ désigne l'espace des distributions tempérées, dual de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$, espace des fonctions à décroissance rapide ; $\mathcal{M}(\mathbf{R}^2)$ l'espace des mesures finies, dual des fonctions continues sur $\mathbf{R}^2$ et nulles à l'infini.

Pour $p \in \mathbf{R}$ et $1 \leq q \leq \infty$, $W^{p,q}(\mathbf{R}^2)$ est l'espace de Sobolev basé sur $L^q(\mathbf{R}^2)$ et de régularité p. Un cas particulier en est l'espace de Hilbert $H^s(\mathbf{R}^2)$ de norme $|\cdot|_{H^s}$ définie par

$$|\,f\,|^2_{H^s} \;=\; \|\,f\,\|_2^2 \;+\; |\,f\,|^2_{\dot{H}^s}$$

où $|\cdot|_{\dot H^s}$ est la semi-norme associée à l'espace de Sobolev homogène $\dot H^s(\mathbf{R}^2)$,

$$|\, f\,|_{\dot H^s} \;=\; \|\, I^s\, f\,\|_2\ , \qquad I \;=\; (-\triangle)^{1/2}\ .$$

Nous mentionnons également au détour d'une note de bas de page un espace de Besov homogène $\dot B^s_{p,q}(\mathbf{R}^2)$.

Disons également quelques mots sur les espaces L^p-faible. Pour tout paramètre $1 \le p \le \infty$, on dit qu'une fonction f est faiblement L^p s'il existe une constante C telle que, pour tout $a > 0$,

$$|\ \{\ x \quad | \quad |f(x)| > a\ \}\ | \quad \le \quad C\ a^{-p}\ .$$

Tel est le cas avec $C = \|\, f\,\|_p^p$ si f appartient à $L^p(\mathbf{R}^2)$.

Enfin, pour $1 \le p,\ q \le \infty$, si $J \subset \mathbf{R}$ est un intervalle, on dit qu'une fonction mesurable $f : J \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ (t,x) \mapsto f(t,x)$ appartient à $L^p(J; L^q(\mathbf{R}^2))$ si la fonction $J \to L^q(\mathbf{R}^2),\ t \mapsto f(t,\cdot)$ est de puissance p-ième intégrable. De même, on dit que f appartient à $L^p_{loc}(J; L^q(\mathbf{R}^2))$ si pour tout intervalle compact $J' \subset J$, f appartient à $L^p(J'; L^q(\mathbf{R}^2))$.

Opérations sur les fonctions

Lorsqu'une fonction $f : t \mapsto f(t,x)$ dépend d'une variable de temps et d'une variable d'espace, alors, pour tout temps t, nous notons $f(t,\cdot)$ ou autant que possible simplement $f(t)$ la fonction associée ne dépendant plus que de la variable d'espace.

Souvent lorsque l'on considère deux fonctions f_1, f_2, on note $\delta\, f = f_2 - f_1$. De même, quand on s'intéresse à une suite de fonctions (f_k), on définit la suite $((\delta\, f)_k) = (f_{k+1} - f_k)$.

Pour des distributions f, g définies sur tout l'espace, on note, quand elle existe, $f \star g$ la convolution de f et g. Si f appartient à $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2)$, alors on définit sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ par[1]

$$\widehat{f}\,(\eta) \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} f(x)\ e^{\mathrm{i}\,\eta\cdot x}\ dx\ , \qquad \eta \in \mathbf{R}^2\ .$$

Ainsi la transformée de Fourier n'est pas une isométrie sur $L^2(\mathbf{R}^2)$, mais la transformée d'une convolution est le produit des transformées.

Pour tout multi-indice $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, on note $D^\sigma f = \partial_1^{\sigma_1}\,\partial_2^{\sigma_2}\, f$. On note également $\nabla f = (\partial_1\, f, \partial_2\, f)$, donc $\nabla^\perp f = (-\partial_2\, f, \partial_1\, f)$, et

$$D^2\, f \;=\; \begin{bmatrix} D^{(2,0)} f & D^{(1,1)} f \\ D^{(1,1)} f & D^{(0,2)} f \end{bmatrix}\ .$$

[1]Comme pour la loi de Biot-Savart, la formule définit plutôt l'opération sur un sous-espace dense, et on l'étend à tout l'espace.

En dimension deux, les opérateurs divergence et rotationnel désignent

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\, f & = & \partial_1 f_1 \; + \; \partial_2 f_2 \;, \\ \mathrm{rot}\, f & = & \partial_1 f_2 \; - \; \partial_2 f_1 \;. \end{array}$$

Toujours pour des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, on définit de nouvelles fonctions, $\mathrm{div}\,(f \otimes g)$ et $(f \cdot \nabla)\, g$, à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ par, pour $i = 1, 2$,

$$\begin{array}{rcl} \big(\mathrm{div}\; (f \otimes g)\big)_i & = & \mathrm{div}\; (f_i \; g) \;, \\ \big((f \cdot \nabla)\; g\big)_i & = & f \cdot \nabla g_i \;. \end{array}$$

Pour des écoulements incompressibles, l'invariance d'échelle est associée aux changements d'échelle

$$\begin{array}{rcl} D_a^v\,(u)\;(t,x) & = & a\; u\,(a^2\, t,\; a\, x) \\ D_a^w\,(\omega)\;(t,x) & = & a^2\; \omega\,(a^2\, t,\; a\, x) \\ D_a\,(\rho,\omega)\;(t,x) & = & (\rho\,(a^2\, t,\; a\, x)\,,\; a^2\; \omega\,(a^2\, t,\; a\, x)) \end{array}$$

qui donnent pour les données initiales

$$\begin{array}{rcl} D_a^{v_0}\,(u_0)\;(x) & = & a\; u_0\,(a\, x) \\ D_a^{w_0}\,(\omega_0)\;(x) & = & a^2\; \omega_0\,(a\, x) \\ D_a^0\,(\rho_0,\omega_0)\;(t,x) & = & (\,\rho_0\,(a\, x)\,,\; a^2\; \omega_0\,(a\, x)\,) \end{array}$$

où $a > 0$ est un paramètre de changement d'échelle.

Inconnues

Les inconnues principales de ce mémoire sont : la densité de masse ρ, le champ de vitesse u, la quantité de mouvement $m = \rho u$, le tourbillon ou vorticité $\omega = \mathrm{rot}\, u$ et la pression p. Les données initiales, au temps $t = 0$ ou $t = 1$, correspondantes sont marquées par l'indice 0, comme dans u_0.

Lors de décompositions, la *perturbation* est surmontée d'un tilde comme dans $\rho = 1 + \widetilde{\rho}$ ou $u = \alpha\, u^G + \widetilde{u}$.

Pour les écoulements incompressibles, nous effectuons un changement de variables, lié à l'invariance d'échelle,

$$(\tau, \xi) \;\; = \;\; \left(\ln t \;,\; \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \;,$$

et le changement d'inconnues permettant de conserver des équations autonomes

$$\begin{array}{rclcrcl} \rho\,(t,x) & = & r\left(\ln t\,, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) & , & u\,(t,x) & = & \frac{1}{\sqrt{t}}\; v\left(\ln t\,, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) \;, \\ \omega\,(t,x) & = & \frac{1}{t}\; w\left(\ln t\,, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) & , & p\,(t,x) & = & \frac{1}{t}\; \Pi\left(\ln t\,, \frac{x}{\sqrt{t}}\right) \;, \end{array}$$

que l'on peut aussi exprimer sous la forme

$$\begin{array}{rclcrcl} r(\tau,\xi) &=& \rho(e^\tau, e^{\frac{\tau}{2}}\xi) &,& v(\tau,\xi) &=& e^{\frac{\tau}{2}}\, u(e^\tau, e^{\frac{\tau}{2}}\xi) \quad , \\ w(\tau,\xi) &=& e^\tau\, \omega(e^\tau, e^{\frac{\tau}{2}}\xi) &,& \Pi(\tau,\xi) &=& e^\tau\, p(e^\tau, e^{\frac{\tau}{2}}\xi) \quad . \end{array}$$

Dans la partie compressible, nous regroupons les inconnues et les données initiales en $X = (\widetilde{\rho}, m)$ et $X_0 = (\widetilde{\rho}_0, m_0)$ que nous décomposons souvent en partie purement compressible $X_{\shortparallel} = (\widetilde{\rho}, m_{\shortparallel})$ et partie incompressible $(0, m_\perp)$. Nous scindons également X, *via* une formule de Duhamel, en sa partie linéaire et sa partie non linéaire X^{NL}.

Pour caractériser la dynamique ou en quantifier certains aspects, on introduit les quantités suivantes définies à partir des données initiales

$$\begin{array}{rcl} D &=& \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)| \exp\left(\frac{|x-x_0|^2}{8\nu t_0}\right) dx \ , \\ R &=& \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)|\ dx \ , \\ \alpha &=& \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\ dx \ , \\ \beta_i &=& -\dfrac{1}{\nu^{3/2}} \displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} x_i \operatorname{rot} m_0(x)\ dx \ , \qquad i = 1,2 \ , \\ E &=& |\, X_0 \,|_{H^{l+2}} \ + \ \|\, X_{0,\shortparallel} \,\|_1 \ + \ \|\, (1+|\cdot|) \operatorname{rot} m_0 \,\|_1 \ , \\ E' &=& E \ + \ \|\, (1+|\cdot|^2) \operatorname{rot} m_0 \,\|_1 \ , \end{array}$$

où ν est la viscosité cinématique de cisaillement de référence et $l \in \mathbf{N}$ est un indice de régularité, $l \geq 3$.

Paramètres physiques

μ est la constante de *viscosité de Lamé* associée au cisaillement, λ celle associée à la compression. Pour assurer une certaine ellipticité, nous supposons toujours $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$.

Si la densité est constante égale à ρ_0 ou que ρ_0 est la densité de référence, alors on définit la *viscosité cinématique* $\nu = \mu/\rho_0$. Pour mesurer la viscosité portant sur la partie purement compressible, nous introduisons également la constante $\mu_{\shortparallel} = \lambda + 2\mu$.

Pour comparer les effets de la viscosité et ceux de la convection, on utilise le *nombre de Reynolds* de circulation R déjà défini dans la section précédente.

Pour un fluide compressible, il nous faut une *loi d'état* $P(\cdot)$ pour la pression. Nous supposons toujours que $P : \mathbf{R}_*^+ \to \mathbf{R}$ est une fonction strictement croissante et régulière. On note $c = \sqrt{P'(\rho_0)} > 0$ la *vitesse du son* de référence.

Pour mesurer le degré de compression d'un écoulement, on introduit le *nombre de Mach* de référence

$$Ma \;=\; \frac{\|\, u_0 \,\|_\infty}{c} \;.$$

Fonctions particulières

Le tourbillon d'Oseen centré en l'origine, de densité ρ_0, de paramètre α et issu d'une masse de Dirac en le temps $t = 0$, est déterminé par $\rho(t, x) = \rho_0$, $u = \alpha\, u^G$, $\omega = \alpha\, \omega^G$ où

$$\omega^G(t, x) \;=\; \frac{1}{t}\, G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right) \,, \qquad u^G(t, x) \;=\; \sqrt{\frac{\nu}{t}}\; v^G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\right) \,,$$

avec les profils

$$G(\xi) \;=\; \frac{1}{4\pi}\, e^{-|\xi|^2/4}, \qquad v^G(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\, \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\left(1 - e^{-|\xi|^2/4}\right) \,.$$

Les tourbillons d'Oseen, centrés en un point $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et issus d'une masse de Dirac au temps $t = -t_0$, sont donnés eux par $\rho = \rho_0$ et $\omega = \alpha\, \omega^G_{t_0, x_0}$ où

$$\omega^G_{t_0, x_0}(t, x) \;=\; \frac{1}{t + t_0}\, G\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{\nu(t + t_0)}}\right) \,.$$

Le régime suivant de décroissance temporelle, pour des tourbillons localisés, est lui déterminé par une densité $\rho = \rho_0$, un champ de vitesse $u = \beta_1 u^{F_1}_\nu + \beta_2 u^{F_2}_\nu$, et une vorticité $\omega = \beta_1 \omega^{F_1}_\nu + \beta_2 \omega^{F_2}_\nu$, avec, pour $i = 1, 2$, $u^{F_i}_\nu(t, x) = u^{F_i}(t, x/\nu)$ et $\omega^{F_i}_\nu(t, x) = \omega^{F_i}(t, x/\nu)$ où

$$\begin{array}{rclcrcl}
\omega^{F_1}(t, x) & = & \frac{1}{t^{3/2}}\, F_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) & , & \omega^{F_2}(t, x) & = & \frac{1}{t^{3/2}}\, F_2\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \;, \\
u^{F_1}(t, x) & = & \frac{1}{t}\, v^{F_1}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) & , & u^{F_2}(t, x) & = & \frac{1}{t}\, v^{F_2}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \;,
\end{array}$$

avec les profils, pour $i = 1, 2$,

$$F_i(\xi) \;=\; \partial_i\, G(\xi) \;=\; -\frac{\xi_i}{2}\, G(\xi) \,, \qquad v^{F_i}(\xi) \;=\; \partial_i\, v^G(\xi) \,.$$

Notons que v^{F_1} et v^{F_2} se comportent à l'infini de la manière suivante

$$v^{F_1}(\xi) \;\overset{|\xi| \to \infty}{=}\; \frac{1}{2\pi|\xi|^4} \begin{pmatrix} 2\xi_1\xi_2 \\ \xi_2^2 - \xi_1^2 \end{pmatrix} + \;\mathcal{O}\left(e^{-|\xi|^2/4}\right) \,,$$

$$v^{F_2}(\xi) \;\overset{|\xi| \to \infty}{=}\; \frac{1}{2\pi|\xi|^4} \begin{pmatrix} \xi_2^2 - \xi_1^2 \\ -2\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} + \;\mathcal{O}\left(e^{-|\xi|^2/4}\right) \,.$$

Pour décrire les décroissances temporelles, on rencontre

$$a(\tau) \;=\; 1 - e^{-\tau} \;, \qquad \tau \geq 0 \;,$$

ainsi que, pour tout multi-indice σ,

$$L_\sigma(t) \;=\; \begin{cases} 1 \;+\; \ln t & \text{si} \quad |\sigma| = 0 \\ \quad 1 & \text{si} \quad |\sigma| \neq 0 \end{cases} \;.$$

Opérateurs et noyaux

Si A et B sont des opérateurs, on note $[A, B] = AB - BA$ leur commutateur. Souvent B est un opérateur de multiplication.

Pour l'étude de l'équation à densité constante et de ses solutions positives, on introduit une entropie relative

$$\mathcal{H}(f_1 \,|\, f_2) \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} f_1(x) \;\ln\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)\, dx \;,$$

pour toutes fonctions strictement positives f_1, f_2. Un cas particulier en est l'entropie

$$H(f) \;=\; \mathcal{H}(f \,|\, \alpha\, G) \;,$$

définie pour f strictement positive, dont l'étude est menée parallèlement à celle de la fonctionnelle d'information

$$I(f) \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} f(x) \left|\nabla \;\ln\left(\frac{f(x)}{\alpha\, G(x)}\right)\right|^2 dx \;.$$

À un champ de vecteurs u donné, on associe occasionnellement la matrice de Green Γ_u de l'équation linéaire

$$\partial_t \omega \;+\; u \cdot \nabla \omega \;=\; \nu \triangle u \;,$$

autrement dit l'on note Γ_u le noyau intégral de l'opérateur d'évolution associé à cette équation.

La loi de Biot-Savart définit $u = K_{BS} \star \omega$ avec le noyau

$$K_{BS}(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\, \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2} \;, \qquad \xi \in \mathbf{R}^2 \;.$$

Elle reconstruit un champ de vecteurs à divergence nulle à partir de son rotationnel.

On note $\mathbf{P}$ le projecteur de Leray et $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ son supplémentaire. $\mathbf{P}$ projette sur les champs de vecteurs à divergence nulle parallèlement aux gradients. On peut également écrire ces projecteurs comme opérateurs de convolution

$$\mathbf{P}\, f \;=\; R_\perp \star f \;, \qquad \mathbf{Q}\, f \;=\; R_{\shortparallel} \star f \;.$$

On marque alors d'un indice $\perp$ ou $\shortparallel$ les projections, ainsi $m = m_{\shortparallel} + m_\perp$, avec $m_{\shortparallel} = \mathbf{Q}\, m$ et $m_\perp = \mathbf{P}\, m$.

Dans les variables auto-similaires apparaît l'opérateur de Fokker-Planck, $\mathcal{L}$, générateur de la chaleur en variables autos-similaires,

$$\mathcal{L} \;=\; \triangle_\xi \;+\; \frac{\xi}{2}\cdot\nabla_\xi \;+\; 1 \;.$$

Quand on écrit les équations pour une perturbation, apparaît également l'opérateur intégro-différentiel d'ordre un, Λ, obtenu par linéarisation du terme de convection autour de $w = G$,

$$\Lambda\, f \;=\; v^G\cdot\nabla\, f \;+\; (K_{BS}\star f)\cdot\nabla\, G \;.$$

S est la matrice de Green associée au linéarisé du système compressible autour de $\rho = 1$ et $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \partial_t\,\widetilde{\rho} & + & \operatorname{div} m & = & 0 \\ \partial_t\, m & + & c^2\,\nabla\,\widetilde{\rho} & = & \mu\,\triangle\, m \;+\; (\mu+\lambda)\,\nabla\operatorname{div} m \end{array}\right. .$$

Elle se décompose en

$$S \;=\; S_{\shortparallel}\star\begin{bmatrix}\delta_0 & 0\\ 0 & R_{\shortparallel}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & K_\mu\star R_\perp\end{bmatrix} \;,$$

où $S_{\shortparallel}$ est la matrice de Green du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \partial_t\,\widetilde{\rho} & + & \operatorname{div} m_{\shortparallel} & = & 0 \\ \partial_t\, m_{\shortparallel} & + & c^2\,\nabla\widetilde{\rho} & = & (\lambda+2\mu)\,\triangle\, m_{\shortparallel} \end{array}\right.$$

et K_μ est le noyau de la chaleur associé à l'équation

$$\partial_t\, m_\perp \;-\; \mu\,\triangle\, m_\perp \;=\; 0 \;.$$

On note parfois

$$S_{part} \;=\; S_{\shortparallel}\star\begin{bmatrix}\delta_0 & 0\\ 0 & R_{\shortparallel}\end{bmatrix} \;.$$

On approche $S_{\shortparallel}$ par la matrice de Green $\widetilde{S}_{\shortparallel}$ du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \partial_t\,\widetilde{\rho} & + & \operatorname{div}\, m_{\shortparallel} & = & \frac{1}{2}\,\mu_{\shortparallel}\,\triangle\,\widetilde{\rho} \\ \partial_t\, m_{\shortparallel} & + & c^2\,\nabla\widetilde{\rho} & = & \frac{1}{2}\,\mu_{\shortparallel}\,\triangle\, m_{\shortparallel} \;. \end{array}\right.$$

et par conséquent S par celle $\widetilde{S}$ du système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \partial_t \widetilde{\rho} & + & \operatorname{div} m & = & (\mu + \frac{\lambda}{2}) \bigtriangleup \widetilde{\rho} \\ \partial_t m & + & c^2 \nabla \widetilde{\rho} & = & \mu \bigtriangleup m \, + \, \frac{\lambda}{2} \nabla \operatorname{div} m \end{array} \right. .$$

Naturellement on peut définir également $\widetilde{S}_{part}$. À présent, fixons une fonction régulière de troncature χ, comprise entre zéro et un, égale à un sur l'ensemble $\{\eta \in \mathbf{R}^2 \,|\, |\eta| \leq R_0\}$ et nulle sur $\{\eta \in \mathbf{R}^2 \,|\, |\eta| \geq R_0 + 1\}$, où $R_0 > 0$ est le niveau de troncature. On décompose alors les différentes matrices de Green en leurs parties basses fréquences et hautes fréquences comme suit : $S = S^{BF} + S^{HF}$ de telle manière que

$$\widehat{S^{BF}}\,(t,\eta) \;=\; \chi(\eta)\; \widehat{S}\,(t,\eta)\;, \qquad \widehat{S^{HF}}\,(t,\eta) \;=\; (1-\chi(\eta))\; \widehat{S}\,(t,\eta)\;.$$

Bibliographie

[1] Thomas Alazard. *Alentours de la limite incompressible.* Au Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles. 2004–2005, Exp. No. XXIV, 18. École Polytech., Palaiseau, 2005.

[2] Anton Arnold, Peter Markowich, Giuseppe Toscani, et Andreas Unterreiter. *On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations.* Comm. Partial Differential Equations, 26 (1-2) : 43–100, 2001.

[3] Matania Ben-Artzi. *Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations.* Arch. Rational Mech. Anal., 128 (4) : 329–358, 1994.

[4] Matania Ben-Artzi. *Planar Navier-Stokes equations : vorticity approach.* Dans le Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. II, pages 143–167. North-Holland, Amsterdam, 2003.

[5] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.

[6] Franck Boyer et Pierre Fabrie. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 de *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[7] Lorenzo Brandolese. *Atomic decomposition for the vorticity of a viscous flow in the whole space.* Math. Nachr., 273 : 28–42, 2004.

[8] Lorenzo Brandolese and Yves Meyer. *On the instantaneous spreading for the Navier-Stokes system in the whole space.* ESAIM Control Optim. Calc. Var., 8 : 273–285 (electronic), 2002. En hommage à J. L. Lions.

[9] Haïm Brezis. *Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi : "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations" [Arch. Rational Mech. Anal.* **128** *(1994), no. 4, 329–358 ; MR1308857 (96h :35148)].* Arch. Rational Mech. Anal., 128 (4) : 359–360, 1994.

[10] Marco Cannone. *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes.* Diderot Editeur, Paris, 1995. Avec une préface d'Yves Meyer.

[11] Marco Cannone et Fabrice Planchon. *Self-similar solutions for Navier-Stokes equations in* $\mathbf{R}^3$. Comm. Partial Differential Equations, 21 (1-2) : 179–193, 1996.

[12] Eric A. Carlen et Michael Loss. *Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation.* Duke Math. J., 81(1) :135–157 (1996), 1995. En l'honneur de John F. Nash, Jr.

[13] Ana Carpio. *Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three.* Comm. Partial Differential Equations, 19 (5-6) : 827–872, 1994.

[14] Thierry Cazenave, Flávio Dickstein, et Fred B. Weissler. *Chaotic behavior of solutions of the Navier-Stokes system in* $\mathbf{R}^N$. Adv. Differential Equations, 10 (4) : 361–398, 2005.

[15] Georges-Henri Cottet. *Équations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 303 (4) : 105–108, 1986.

[16] Raphaël Danchin. *Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations.* Invent. Math., 141 (3) : 579–614, 2000.

[17] Raphaël Danchin. *Global existence in critical spaces for flows of compressible viscous and heat-conductive gases.* Arch. Ration. Mech. Anal., 160 (1) : 1–39, 2001.

[18] Raphaël Danchin. *Local and global well-posedness results for flows of inhomogeneous viscous fluids.* Adv. Differential Equations, 9 (3-4) : 353–386, 2004.

[19] Raphaël Danchin. *Estimates in Besov spaces for transport and transport-diffusion equations with almost Lipschitz coefficients.* Rev. Mat. Iberoamericana, 21 (3) : 861–886, 2005.

[20] Benoît Desjardins. *Global existence results for the incompressible density-dependent Navier-Stokes equations in the whole space.* Differential Integral Equations, 10 (3) : 587–598, 1997.

[21] Benoît Desjardins. *Linear transport equations with initial values in Sobolev spaces and application to the Navier-Stokes equations.* Differential Integral Equations, 10 (3) : 577–586, 1997.

[22] Eduard Feireisl. *Viscous and/or heat conducting compressible fluids.* Dans le Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I, pages 307–371. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[23] Eduard Feireisl, Antonín Novotný, et Hana Petzeltová. *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations.* J. Math. Fluid Mech., 3 (4) : 358–392, 2001.

[24] Isabelle Gallagher and Thierry Gallay. *Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes equation with a measure as initial vorticity.* Math. Ann., 332 (2) : 287–327, 2005.

[25] Isabelle Gallagher, Thierry Gallay, et Pierre-Louis Lions. *On the uniqueness of the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equation with a Dirac mass as initial vorticity.* Math. Nachr., 278 (14) : 1665–1672, 2005.

[26] Thierry Gallay et C. Eugene Wayne. *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on* $\mathbf{R^2}$. Arch. Ration. Mech. Anal., 163 (3) : 209–258, 2002.

[27] Thierry Gallay et C. Eugene Wayne. *Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation.* Comm. Math. Phys., 255 (1) : 97–129, 2005.

[28] Thierry Gallay et C. Eugene Wayne. *Existence and stability of asymmetric Burgers vortices.* J. Math. Fluid Mechanics, 9 (2) : 243–261, 2007.

[29] Yoshikazu Giga et Tsutomu Kambe. *Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation.* Comm. Math. Phys., 117 (4) : 549–568, 1988.

[30] Yoshikazu Giga, Tetsuro Miyakawa, et Hirofumi Osada. *Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity.* Arch. Rational Mech. Anal., 104 (3) : 223–250, 1988.

[31] David Hoff. *Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional compressible flow with discontinuous initial data.* J. Differential Equations, 120 (1) : 215–254, 1995.

[32] David Hoff et Kevin Zumbrun. *Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow.* Indiana Univ. Math. J., 44 (2) : 603–676, 1995.

[33] David Hoff et Kevin Zumbrun. *Pointwise decay estimates for multidimensional Navier-Stokes diffusion waves.* Z. Angew. Math. Phys., 48 (4) : 597–614, 1997.

[34] Tosio Kato. *The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in* $\mathbf{R}^2$ *with a measure as the initial vorticity.* Differential Integral Equations, 7 (3-4) : 949–966, 1994.

[35] Tosio Kato et Gustavo Ponce. *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations.* Comm. Pure Appl. Math., 41 (7) : 891–907, 1988.

[36] Schuichi Kawashima. *Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics.* Thèse de doctorat, Kyoto University, 1983.

[37] Takayuki Kobayashi et Yoshihiro Shibata. *Remark on the rate of decay of solutions to linearized compressible Navier-Stokes equations.* Pacific J. Math., 207 (1) : 199–234, 2002.

[38] Olga A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Seconde édition anglaise, revue et enrichie. Traduite du russe par Richard A. Silverman et John Chu. Mathematics and its Applications, Vol. 2. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.

[39] Lev D. Landau et Evgueni M. Lifshitz. *Fluid mechanics.* Traduit du russe par J. B. Sykes et W. H. Reid. Course of Theoretical Physics, Vol. 6. Pergamon Press, London, 1959.

[40] Pierre Gilles Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, volume 431 des *Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[41] Jean Leray. *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace.* Acta Math., 63 (1) : 193–248, 1934.

[42] Pierre-Louis Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1*, volume 3 des *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Incompressible models, Oxford Science Publications.

[43] Pierre-Louis Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2*, volume 10 des *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Compressible models, Oxford Science Publications.

[44] Tai-Ping Liu et Yanni Zeng. *Large time behavior of solutions for general quasilinear hyperbolic-parabolic systems of conservation laws.* Mem. Amer. Math. Soc., 125 (599) : viii+120, 1997.

[45] Andrew J. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, volume 53 des *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[46] Andrew J. Majda et Andrea L. Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27 des *Cambridge Texts in Applied Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[47] Akitaka Matsumura et Takaaki Nishida. The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases. *J. Math. Kyoto Univ.*, 20(1) :67–104, 1980.

[48] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[49] Walter A. Strauss. *Nonlinear wave equations*, volume 73 des *CBMS Regional Conference Series in Mathematics.* Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1989.

[50] Roger Temam. *Navier-Stokes equations.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. Theory and numerical analysis. Réimpression de l'édition de 1984.