Université Grenoble 1, Institut Fourier, UMR CNRS 5582

Habilitation à Diriger des Recherches

Contributions à l'étude des fonctions spéciales

Julien Roques

21 novembre 2013

Soutenue après avis de

Y. André	Université Pierre et Marie Curie
D. Bertrand	Université Pierre et Marie Curie
F. Beukers	Université d'Utrecht

Jury composé de

Y. André	Université Pierre et Marie Curie
D. Bertrand	Université Pierre et Marie Curie
F. Beukers	Université d'Utrecht
E. Peyre	Université Joseph Fourier
J.-P. Ramis	Université Paul Sabatier
T. Rivoal	Université Joseph Fourier
J. Sauloy	Université Paul Sabatier

Table des matières

Remerciements

Je remercie vivement Y. André, D. Bertrand et F. Beurkers, qui ont accepté de rédiger un rapport sur ce mémoire, et Y. André, D. Bertrand, E. Peyre, J.-P. Ramis, T. Rivoal et J. Sauloy, qui ont accepté de faire partie du jury de soutenance. C'est un honneur que tant de mathématiciens talentueux se penchent sur mon travail.

Les conditions de travail à l'Institut Fourier sont excellentes. Je remercie ce laboratoire, et l'ensemble de mes collègues.

J'adresse toute mon affection à ma famille et à mes amis.

Avant-propos

Ce mémoire est une synthèse des recherches que j'ai menées après mon doctorat, c'est-à-dire durant les six dernières années.

Travaux présentés

[1] J. Roques. "Galois groups of the basic hypergeometric equations". Dans : *Pacific J. Math.* 235.2 (2008), p. 303–322.

[2] G. Casale et J. Roques. "Dynamics of rational symplectic mappings and difference Galois theory". Dans : *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), Art. ID rnn 103, 23.

[3] J. Roques. "On the Galois groups of families of regular singular difference systems". Dans : *Séminaires et Congrès* 23 (2011), p. 367–383.

[4] J. Roques. "Generalized basic hypergeometric equations". Dans : *Invent. Math.* 184.3 (2011), p. 499–528.

[5] J. Roques. "A note on p-curvatures". Dans : *Manuscripta Math.* 140.1 (2013), p. 115–118.

[6] J. Roques. "On classical irregular q-difference equations". Dans : *Compositio Math.* 148.5 (2012), p. 1624–1644.

[7] G. Casale et J. Roques. "Nonintegrability by discrete quadratures". Dans : *J. reine angew. Math.* (A paraître).

[8] T. Rivoal et J. Roques. "Convergence and modular type properties of a twisted Riemann series". Dans : *Unif. Distrib. Theory* (A paraître).

[9] J. Roques. "Arithmetic properties of mirror maps associated with Gauss hypergeometric equations". Dans : *Monatshefte für Math.* (A paraître).

[10] J. Roques. "On generalized hypergeometric equations and mirror maps". Dans : *Proc. Amer. Math. Soc.* (A paraître).

[11] J. Roques. "Birkhoff matrices, residues and rigidity for q-difference equations". Dans : *J. reine angew. Math.* (A paraître).

[12] E. Delaygue, T. Rivoal et J. Roques. "Integrality of the Taylor coefficients of hypergeometric functions and of their associated mirror maps". Prépublication.

Ces articles sont librement téléchargeables à l'adresse suivante :

`http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~jroques/`

Plan du mémoire

Les travaux présentés dans ce mémoire ont en commun l'étude des fonctions spéciales.

Le chapitre I contient des rappels au sujet des équations aux q-différences.

Le chapitre II a trait aux groupes de Galois d'équations aux q-différences classiques : la section II.2 est consacrée aux équations q-hypergéométriques généralisées à points singuliers réguliers, alors que la section II.3 est relative à des équations irrégulières. Nous y abordons notamment l'étude des singularités intermédiaires (c'est-à-dire $\neq 0, \infty$) des équations aux q-différences et nous intéressons à la question suivante : par quoi « remplacer » la monodromie des équations différentielles ?

Le chapitre III revient sur les singularités intermédiaires des équations aux q-différences : nous introduisons et étudions des notions de rigidité pour des équations aux q-différences « suffisamment régulières ». Une attention particulière est portée au cas q-hypergéométrique ; nous donnons notamment une description « q-monodromique » des équations q-hypergéométriques généralisées à points singuliers réguliers.

Le chapitre IV est scindé en deux parties (galoisiennes) indépendantes. Dans la première, nous donnons une condition suffisante, de nature arithmétique (elle porte sur les p-courbures), pour la Lie-irréductibilité d'un opérateur différentiel. Dans la seconde, nous étudions la variation de la dimension des groupes de Galois d'équations aux différences fuchsiennes paramétrées par le biais d'outils transcendants.

Le chapitre V concerne l'intégrabilité des systèmes dynamiques discrets. Nous y présentons des critères de non intégrabilité du type Morales-Ramis (les groupes de Galois d'équations aux différences linéaires y jouent donc un rôle essentiel) et y établissons la non intégrabilité d'équations de Painlevé discrètes.

Le chapitre VI prend sa source dans la théorie de la symétrie miroir. Nous achevons d'abord la classification des équations hypergéométriques généralisées à monodromie unipotente maximale en 0 conduisant à des applications miroir dont les coefficients de Taylor en 0 sont « presque entiers ». Nous raffinons et complétons ensuite des travaux de B. Dwork ; nous en déduisons une nouvelle propriété d'intégralité des applications miroir hypergéométriques.

Le chapitre VII appartient à la théorie des q-séries avec $|q| = 1$. Nous y explorons les propriétés d'une série, dépendant d'un paramètre réel α, intervenant dans l'étude de la répartition des parties fractionnaires $\{k\alpha\}$. Nous étudions en détail sa convergence (qui s'avère être liée à la condition de Brjuno). Pour ce faire, nous établissons une propriété de quasi-modularité de cette série, qui présente un intérêt en soi, et est à rapprocher de l'idée sous-jacente aux quantum modular forms de D. Zagier.

Diverses questions et pistes de recherche, liées aux travaux présentés, émaillent ce texte.

CHAPITRE I

Notations et rappels au sujet des équations aux q-différences

Nous avons rassemblé dans ce chapitre quelques rappels au sujet des équations aux q-différences. Nous renvoyons par exemple à [PS97, §1.4] et [Sau04 ; Sau03] pour davantage de détails.

Sauf mention explicite du contraire, q désignera un nombre complexe non nul de norme $\neq 1$. Nous noterons σ_q l'automorphisme de corps de $\mathbb{C}(z)$ défini par $\sigma_q(f(z)) = f(qz)$.

L'algèbre $\mathcal{D}_q$ des opérateurs aux q-différences. Nous notons $\mathcal{D}_q$ l'algèbre de Öre $\mathbb{C}(z)\langle \boldsymbol{\sigma}_q, \boldsymbol{\sigma}_q^{-1}\rangle$ des polynômes non commutatifs à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ tels que $\boldsymbol{\sigma}_q f(z) = f(qz)\boldsymbol{\sigma}_q$ pour tout $f(z) \in \mathbb{C}(z)$.

Pentes des opérateurs aux q-différences. Le polygone de Newton de $L = \sum_i a_i(z)\boldsymbol{\sigma}_q^i \in \mathcal{D}_q \setminus \{0\}$ en 0 est l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ de $\{(i,j) \mid i \in \mathbb{Z}, j \geq v_0(a_i(z))\}$ où v_0 est la valuation z-adique. Il est délimité par deux demi-droites verticales et k vecteurs (m_1, n_1),..., $(m_k, n_k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ de pentes n_1/m_1,...,n_k/m_k deux à deux distinctes, appelées pentes de L en 0. L'entier m_i est la multiplicité de la pente n_i/m_i.

Opérateurs aux q-différences purs isoclines et singuliers réguliers. Si L possède une seule pente en 0, il est dit pur isocline en 0 ; si son unique pente en 0 est en outre nulle, L est dit singulier régulier en 0. On a des notions similaires en ∞.

La catégorie $\mathscr{E}$ des modules aux q-différences. Nous notons $\mathscr{E}$ la catégorie des modules aux q-différences sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire des $\mathcal{D}_q$-modules à gauche de longueur finie.

Pentes des modules aux q-différences. Considérons un objet M de $\mathscr{E}$ de rang n (il s'agit de la dimension de M comme $\mathbb{C}(z)$-espace vectoriel). D'après le lemme du vecteur cyclique, il existe $L \in \mathcal{D}_q$ tel que $M \cong \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q L$. Nous définissons les pentes de M en 0, et leurs multiplicités, comme étant celles de L ; cette construction est indépendante du choix de L. Notons que le comportement tensoriel des ces pentes est différent de celui des pentes des modules différentiels ; voir à ce propos [And09].

Modules aux q-différences purs isoclines et singuliers réguliers. Si M possède une seule pente en 0, il est dit pur isocline en 0 ; si son unique pente en 0 est en outre nulle, M est dit singulier régulier en 0. On a des notions similaires en ∞.

La catégorie $\mathscr{F}$ des modules aux q-différences singuliers réguliers. La sous-catégorie pleine de $\mathscr{E}$ formée par ses objets singuliers réguliers en 0 et ∞ sera notée $\mathscr{F}$.

Théorie de Galois. La catégorie $\mathscr{E}$ est tannakienne $\mathbb{C}$-linéaire neutre ; $\mathscr{F}$ en est une sous-catégorie tannakienne. Le groupe de Galois G de M relativement à un $\mathbb{C}$-foncteur fibre ω sera indentifié à un sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(\omega(M)) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$. Nous dirons que M est Lie-irréductible si l'action de la composante neutre G° de G sur $\omega(M)$ est irréductible. Nous renvoyons à [PS97 ; Sau03] pour les détails.

CHAPITRE II

Groupes de Galois d'équations aux q-différences classiques

II.1. Introduction

Ce chapitre rend compte de nos travaux [1 ; 4 ; 6] au sujet des groupes de Galois d'opérateurs aux q-différences (singuliers réguliers ou irréguliers) classiques.

Une attention particulière est portée aux opérateurs q-hypergéométriques généralisés

$$\mathrm{L}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda)=\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{b_j}{q}\boldsymbol{\sigma}_q-1\right)-z\lambda\prod_{i=1}^{r}(a_i\boldsymbol{\sigma}_q-1)$$

de paramètres $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_r)\in(\mathbb{C}^*)^r$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_s)\in(\mathbb{C}^*)^s$ et $\lambda\in\mathbb{C}^*$. Depuis l'article fondateur de E. Heine [Hei46], la théorie q-hypergéométrique a connu un essort spectaculaire. Elle irrigue aujourd'hui de nombreuses branches des sciences physique et mathématique. Elle relie par exemple les algèbres affines quantiques aux groupes quantiques elliptiques dans l'article de V. Tarasov and A. Varchenko [TV97] ; elle intervient en théorie des nombres, en combinatoire, nous la rencontrerons dans la section V.4 en liaison avec les équations de Painlevé discrètes, etc. Nous renvoyons à [Sla66 ; GR04a] pour des informations historiques détaillées.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La section II.2 est consacrée aux groupes de Galois des opérateurs q-hypergéométriques généralisés singuliers réguliers (c'est-à-dire au cas $r=s$). Nous nous intéressons au cas Lie-irréductible dans la section II.2.1 et à celui des groupes finis dans la section II.2.2. La section II.2.3 traite le cas $r=s=2$. Dans la section II.3, nous étudions les groupes de Galois d'opérateurs aux q-différences irréguliers.

Dans ce qui suit, nous noterons

$$\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda)=\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q\,\mathrm{L}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda)$$

l'objet de $\mathscr{E}$ associé à $\mathrm{L}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda)$.

II.2. Opérateurs q-hypergéométriques généralisés singuliers réguliers

Nous étudions dans cette section les opérateurs q-hypergéométriques généralisés singuliers réguliers. Nous supposons donc que

$$r=s=:n$$

II.2.1. Cas Lie-irréductible. Les groupes de Galois des opérateurs hypergéométriques généralisés

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\delta+\beta_k-1)-z\lambda\prod_{k=1}^{n}(\delta+\alpha_k),\qquad \delta=z\frac{d}{dz},$$

de paramètres $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,...,\beta_n)\in\mathbb{C}^n$ et $\lambda\in\mathbb{C}^*$ ont été étudiés par F. Beukers et G. Heckman [BH89] puis par N. M. Katz [Kat90]. Le résultat suivant est central (dans ce qui suit, $G^{\circ,\mathrm{der}}$ désigne le sous-groupe dérivé de la composante neutre G° du groupe algébrique G).

Théorème 1 (F. Beukers et G. Heckman [BH89])**.** *Si* $\mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};\lambda)$ *est Lie-irréductible alors son groupe de Galois* G *vérifie* $G^{\circ,\mathrm{der}}=\mathrm{SL}(\mathbb{C}^n)$, $\mathrm{SO}(\mathbb{C}^n)$ *ou* $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$.

Ce théorème est une conséquence des deux résultats suivants. Le premier, dû à Pochhammer, est issu de la *théorie analytique* des équations différentielles :

Proposition 2. *Si* $\mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta};\lambda)$ *est irréductible alors sa monodromie autour du point* λ^{-1} *est une pseudo-réflexion.*

Le second est purement algébrique :

Théorème 3 (F. Beukers et G. Heckman [BH89])**.** *Soit* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie semi-simple de* $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ *dont l'action sur* $\mathbb{C}^n$ *est irréductible. Si* $\mathfrak{g}$ *est normalisée par une pseudo-réflexion de* $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ *alors* $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{so}(\mathbb{C}^n)$ *ou* $\mathfrak{sp}(\mathbb{C}^n)$.

Malheureusement, « l'outil essentiel dans la détermination du groupe de Galois différentiel hypergéométrique, à savoir la pseudo-réflexion donnée par la monodromie locale au point 1, ne se transporte pas au cas q-hypergéométrique » comme le relève Y. André dans [And01] (prendre ici $\lambda=1$).

Problème 1. *Comment pallier l'absence des monodromies locales ?*

Ce problème fondamental de la théorie des équations aux q-différences, sur lequel nous allons revenir en détail, explique sans doute que peu de choses étaient connues sur les groupes de Galois q-hypergéométriques jusqu'aux importants progrès d'Y. André dans [And01]. Il y contourne le Problème 1 lorsque q est transcendant et les paramètres q-rationnels en combinant son théorème de spécialisation des groupes de Galois aux résultats de F. Beukers et G. Heckman ; nous renvoyons à [And01, §3.3.3] pour les énoncés précis.

Dans [4] nous avons repris l'étude des groupes de Galois q-hypergéométriques à la base. Nous avons répondu au Problème 1 et prouvé le résultat suivant :

Théorème 4 ([4, Theorem 4])**.** *Si* $\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda)$ *est Lie-irrédutible alors son groupe de Galois* G *vérifie* $G^{\circ,\mathrm{der}}=\mathrm{SL}(\mathbb{C}^n)$, $\mathrm{SO}(\mathbb{C}^n)$ *ou* $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$.

Indiquons les grandes lignes de notre approche.

Soit M un objet de $\mathscr{F}$ et considérons un système aux q-différences associé ($\sigma_q Y=AY$) avec $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$. Ce dernier admet des solutions $Y^{(0)}$ et

$Y^{(\infty)}$ attachées aux points fixes 0 et ∞ de σ_q sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La première est de la forme

$$Y^{(0)} = F^{(0)} e_{A^{(0)}}$$

où $F^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ (ici et dans ce qui suit $\mathcal{M}$ désigne le faisceau des fonctions méromorphes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) et où $e_{A^{(0)}} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$ vérifie $\sigma_q e_{A^{(0)}} = A^{(0)} e_{A^{(0)}}$. La seconde est de la forme

$$Y^{(\infty)} = F^{(\infty)} e_{A^{(\infty)}}$$

où $F^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}))$ et où $e_{A^{(\infty)}} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*))$ vérifie $\sigma_q e_{A^{(\infty)}} = A^{(\infty)} e_{A^{(\infty)}}$ (voir [Sau03, §1.2] pour les détails). Considérons la *matrice de Birkhoff* ou *de connexion* associée

$$P = \left(Y^{(\infty)}\right)^{-1} Y^{(0)} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q})$$

où $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ invariantes par l'action de σ_q (fonctions elliptiques). On doit à G. D. Birkhoff l'idée que le triplet $(A^{(0)}, P, A^{(\infty)}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ suffit à reconstituer M à isomorphisme près. En fait, on a l'analogue suivant, essentiellement dû à G. D. Birkhoff [Bir13], de la correspondance de Riemann-Hilbert (voir aussi [PS97, §12]).

Théorème 5 (J. Sauloy [Sau03, §3.2.1])**.** *La catégorie des modules aux q-différences singuliers réguliers $\mathscr{F}$ est équivalente à celle des triplets de Birkhoff $\mathscr{B}$ dont les objets sont les triplets*

$$(A^{(0)}, P, A^{(\infty)}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Alors que les données $A^{(0)}$ et $A^{(\infty)}$ sont de nature locale, attachées à 0 et ∞, la matrice de Birkhoff P est de nature globale. Pouvons-nous en extraire des avatars galoisiens des monodromies locales des équations différentielles ? Nous reviendrons sur cette question après un bref interlude galoisien.

P. Etingof [Eti95] fut le premier à comprendre l'intérêt galoisien de la matrice de Birkhoff P dans le cas régulier, c'est-à-dire lorsque $A^{(0)} = A^{(\infty)} = I_n$. Le cas singulier régulier fut ensuite traité par M. van der Put et M. Singer [PS97, §12] puis par J. Sauloy [Sau03]. Le résultat suivant est généralement considéré comme analogue au théorème de densité de Schlesinger [1] ; nous renvoyons à [PS97, Theorem 12.14] pour un théorème de densité de nature « plus algébrique » dû à M. van der Put et M. F. Singer. Nous noterons $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ et $\mathcal{M}$ le faisceau des fonctions méromorphes sur $\widetilde{\mathbb{C}^*}$.

Théorème 6 (J. Sauloy [Sau03, §3.2.2.3])**.** *Soient M et $(A^{(0)}, P, A^{(\infty)})$ comme plus haut et notons $\breve{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\widetilde{\mathbb{C}^*}))$ la matrice de Birkhoff tordue associée suivant [Sau03, §3.2.2.2]* [2]*. Alors le groupe de Galois de M est le sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ engendré par :*

1. « La monodromie est dense dans le groupe de Galois d'une équation différentielle à points singuliers réguliers. »

2. Par exemple, $\breve{P} = P$ dans le cas régulier.

– *les groupes de Galois locaux de M en 0 et ∞* [3] *;*
– *les quotients $\breve{P}(b)^{-1}\breve{P}(a)$ des valeurs de $\breve{P}$ non dégénérées.*

Nous sommes à présent en mesure de décrire notre réponse au Problème 1. Nous travaillons dans l'algèbre de Lie du groupe de Galois de M par le biais du résultat suivant.

Proposition 7 ([4, Proposition 2])**.** *La dérivée logarithmique $\breve{P}^{-1}\breve{P}' \in \mathrm{M}_n(\mathcal{M}(\widetilde{\mathbb{C}^*}))$ est à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Galois de M.*

Nous disposons donc d'une famille méromorphe de morphismes galoisiens infinitésimaux. Nous avons montré que ses singularités renferment une information précieuse dans le cas q-hypergéométrique :

Théorème 8 ([4, Lemmas 1 and 2])**.** *Supposons que $M = \mathcal{H}_q(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \lambda)$ est irréductible. Alors, parmi les coefficients du développement de Taylor de $\breve{P}^{-1}\breve{P}' \in \mathrm{M}_n(\mathcal{M}(\widetilde{\mathbb{C}^*}))$ au voisinage d'un certain $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}^*}$ (une singularité intermédiaire) figure une matrice de rang 1 ou une matrice de rang 2 et de trace nulle*

Ce coefficient de Taylor joue dans notre travail le rôle de la monodromie locale du cas différentiel ; les deux résultats précédents conduisent au :

Corollaire 9. *Supposons que $M = \mathcal{H}_q(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \lambda)$ est irréductible. Alors, l'algèbre de Lie du groupe de Galois de M contient un élément de rang 1 ou un élément de rang 2 et de trace nulle.*

Le Théorème 4 en résulte en utilisant des caractérisations des algèbres de Lie classiques.

Remarque 10. *Nous reviendrons plus loin dans ce mémoire sur la localisation aux singularités intermédiaires de la théorie des équations aux q-différences via des prises de résidus.*

Concluons cette section avec des calculs explicites. Notons $\approx$ la relation d'équivalence sur $(\mathbb{C}^*)^n$ définie par $\boldsymbol{c} = (c_1, ..., c_n) \approx \boldsymbol{d} = (d_1, ..., d_n)$ si et seulement s'il existe une permutation σ de $[[1, n]]$ telle que, pour tout $i \in [[1, n]]$, $c_i = d_{\sigma(i)}$; de plus, nous écrirons $\boldsymbol{c} \approx \boldsymbol{d} \mod q^{\mathbb{Z}}$ s'il existe une permutation σ de $[[1, n]]$ telle que, pour tout $i \in [[1, n]]$, $c_i = d_{\sigma(i)} \mod q^{\mathbb{Z}}$.

Théorème 11 ([4, Theorem 6])**.** *Considérons $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (q^{\mathbb{Q}})^n$ tels que*

- *pour tout $i, j \in [[1, n]]$, $a_i/b_j \notin q^{\mathbb{Z}}$,*
- *pour tout diviseur $d \geq 2$ de n, on a $q^{1/d}\boldsymbol{a} \not\approx \boldsymbol{a} \mod q^{\mathbb{Z}}$ ou $q^{1/d}\boldsymbol{b} \not\approx \boldsymbol{b} \mod q^{\mathbb{Z}}$.*

Alors, le groupe de Galois G de $\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \lambda)$ vérifie $G^{\circ,\mathrm{der}} = \mathrm{SL}(\mathbb{C}^n)$, $\mathrm{SO}(\mathbb{C}^n)$ ou $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$.

De plus, $G^{\circ,\mathrm{der}} = \mathrm{SO}(\mathbb{C}^n)$ (resp. $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^n)$) si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

3. Nous n'en disons volontairement pas davantage sur ces groupes locaux dont nous n'aurons pas l'utilité. Mentionnons par ailleurs qu'il suffit en fait de considérer un seul de ces groupes.

- $\varpi := \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n} b_j\right)^{-1} \in q^{\mathbb{Z}}$,
- *il existe* $c \in \mathbb{C}^*$ *tel que* $1/\boldsymbol{a} \approx c\boldsymbol{a} \mod q^{\mathbb{Z}}$ *et* $1/\boldsymbol{b} \approx c\boldsymbol{b} \mod q^{\mathbb{Z}}$,
- n *est pair (resp. impair).*

Par ailleurs,

- $G = G^{\circ} = \mathbb{C}^* G^{\circ,\mathrm{der}}$ *si* $\varpi \notin q^{\mathbb{Z}}$ *;*
- $G^{\circ} = G^{\circ,\mathrm{der}}$ *si* $\varpi \in q^{\mathbb{Z}}$.

II.2.2. Groupes de Galois finis. On doit à H. A. Schwarz la liste des équations hypergéométriques de Gauss dont le groupe de Galois est fini [Sch73 ; Gou36 ; Beu07]. Celle-ci a été étendue aux équations hypergéométriques généralisées irréductibles par F. Beukers et G. Heckman [BH89]. N. M. Katz [Kat90] a retrouvé leur résultat via les p-courbures (en exploitant ses travaux [Kat72] sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck pour les équations différentielles d'origine géométrique). Par ailleurs, l'analogue de la liste de Schwarz pour les équations q-hypergéométriques d'ordre 2 a été obtenu par L. Di Vizio dans [DV02].

Dans [4], nous avons décrit les équations q-hypergéométriques généralisées dont le groupe de Galois est fini. Nous avons pour cela introduit la notion suivante.

Définition 12 ([4, Definition 2])**.** *Pour* $c, d \in \mathbb{C}^*$, *la notation* $c \preceq_q d$ *(resp.* $c \prec_q d$*) signifie que* $dc^{-1} \in q^{\mathbb{N}}$ *(resp.* $dc^{-1} \in q^{\mathbb{N}^*}$*). Pour* $\boldsymbol{c} \in (\mathbb{C}^*)^n$ *et* $\boldsymbol{d} \in (\mathbb{C}^*)^n$, *la notation* $\boldsymbol{c} \trianglelefteq_q \boldsymbol{d}$ *signifie qu'on peut réarranger les coordonnées de* $\boldsymbol{c}$ *et* $\boldsymbol{d}$ *comme suit*

- $\boldsymbol{c} \approx (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r})$ *;*
- $\boldsymbol{d} \approx (d_{1,1}, \ldots, d_{1,n_1}, \ldots, d_{r,1}, \ldots, d_{r,n_r})$ *;*

de telle sorte que

- $c_{\mu,\nu} = c_{\mu',\nu'} \mod q^{\mathbb{Z}}$ *si et seulement si* $\mu = \mu'$ *;*
- $\forall \mu \in [[1, r]]$, $\forall \nu \in [[1, n_\mu]]$, $d_{\mu,\nu} = c_{\mu,\nu} \mod q^{\mathbb{Z}}$ *;*
- $\forall \mu \in [[1, r]]$, $c_{\mu,1} \preceq_q d_{\mu,1} \prec_q c_{\mu,2} \preceq_q d_{\mu,2} \prec_q \cdots \prec_q c_{\mu,n_\mu} \preceq_q d_{\mu,n_\mu}$.

Dans le théorème suivant, $\mathbb{U}_\infty$ désigne le groupe de racines complexes de l'unité.

Théorème 13 ([4, Theorems 7 and 8])**.** *Le module q-hypergéométrique généralisé* $\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \lambda)$ *a un groupe de Galois fini si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (\mathbb{U}_\infty q^{\mathbb{Q}})^n$ *;*
- $\boldsymbol{a} \trianglelefteq_q q^{-1}\boldsymbol{b}$ *ou* $\boldsymbol{b} \trianglelefteq_q \boldsymbol{a}$.

Son groupe de Galois est trivial si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (q^{\mathbb{Z}})^n$ *;*
- $\boldsymbol{a} \trianglelefteq_q q^{-1}\boldsymbol{b}$ *ou* $\boldsymbol{b} \trianglelefteq_q \boldsymbol{a}$.

II.2.3. Equations q-hypergéométriques d'ordre 2. Dans [1] nous avons étudié en détail les opérateurs q-hypergéométriques du second ordre

(1) $$\mathrm{L}_q(a, b; c, q; 1) = (abz - c/q)\,\boldsymbol{\sigma}_q^2 - ((a+b)z - (1 + c/q))\,\boldsymbol{\sigma}_q + z - 1$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C}^*$. Pour des travaux antérieurs, suivant une approche totalement différente, nous renvoyons à l'article de P. A. Hendriks [Hen97].

Théorème 14 ([1])**.** *Nous avons déterminé les groupes de Galois de la plupart des opérateurs q-hypergéométriques du second ordre.*

La stratégie de base consiste à combiner le Théorème 6 (il s'agissait à ma connaissance de la première application de ce résultat) à la formule de Barnes-Mellin-Watson [GR04a] afin de ramener, dans une large mesure, les calculs de groupes de Galois à l'étude d'éventuelles relations entretenues par des fonctions thêta de Jacobi (et leurs dérivées).

Nous ne donnons pas davantage de détails, mais mentionnons l'utilisation faite par C. Hardouin et M. F. Singer [HS08] de nos calculs. Ils les ont appliqués pour démontrer le

Théorème 15 (C. Hardouin et M. F. Singer [HS08])**.** *Si $y_1(z)$ et $y_2(z)$ sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation q-hypergéométrique*

$$y(q^2z) - \frac{2az-2}{a^2z-1}y(qz) + \frac{z-1}{a^2z-q^2}y(z) = 0,$$

avec $a \notin q^{\mathbb{Z}}$ et $a^2 \in q^{\mathbb{Z}}$, alors $y_1(z)$, $y_2(z)$, et $y_1(qz)$ sont différentiellement indépendantes sur $\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}(z)$.

Une autre application de nos calculs sera donnée dans le cadre des équations de Painlevé discrètes dans la section V.4.

II.3. Équations aux q-différences irrégulières classiques

Nous poursuivons l'étude des groupes de Galois d'opérateurs aux q-différences classiques. Nous avons donné dans [6] des (outils permettant de mener des) calculs de groupes de Galois d'opérateurs irréguliers $L \in \mathcal{D}_q$ ayant l'une des propriétés suivantes (où n est l'ordre de L) :

($\mathscr{H}1$) *L est pur isocline (c'est-à-dire possède une unique pente) en 0, de pente m/n avec $m \in \mathbb{Z}^*$ relativement premier à n.*

($\mathscr{H}2$) *L a deux pentes en 0. L'une est supposée nulle, l'autre est notée μ et sa multiplicité r. On suppose que $\mu = m/r$ avec $m \in \mathbb{Z}^*$ relativement premier à r et que les exposants attachés à la pente nulle sont dans $q^{\mathbb{R}}$.*

Par exemple, les opérateurs q-hypergéométriques généralisés *confluents*

$$\mathrm{L}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda) = \prod_{j=1}^{s}\left(\frac{b_j}{q}\boldsymbol{\sigma}_q - 1\right) - z\lambda\prod_{i=1}^{r}\left(a_i\boldsymbol{\sigma}_q - 1\right)$$

de paramètres $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_r) \in (q^{\mathbb{R}})^r$, $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_s) \in (q^{\mathbb{R}})^s$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ vérifient ($\mathscr{H}2$) si $r > s > 0$ et ($\mathscr{H}1$) si $r > s = 0$. Les opérateurs de q-Kloosterman

$$\mathrm{Kl}_q(U, V) = U(\boldsymbol{\sigma}_q) + V(z^{-1})$$

associés aux paires (U, V) d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ telles que $U(0) = 0$ et $V(0) \neq 0$ vérifient quant à eux ($\mathscr{H}1$) si $\mathrm{pgcd}(\deg U, \deg V) = 1$. Remarquons que

$$\mathrm{L}_q(\boldsymbol{a};\emptyset;\lambda) = z\,\mathrm{Kl}_q\left(-\lambda\prod_{i=1}^{r}(a_iX-1) + (-1)^r\lambda, -(-1)^r\lambda + X\right).$$

Nous noterons

$$\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda) = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q \, \mathrm{L}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda)$$

et

$$\mathcal{K}l_q\,(U,V) = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q \, \mathrm{Kl}_q\,(U,V)$$

les objets de $\mathscr{E}$ associés à ces opérateurs.

Certains des opérateurs considérés dans cette section peuvent être vus comme des q-déformations d'opérateurs différentiels classiques (ceci est exploité par Y. André dans [And01] ; voir aussi l'article de J. Sauloy [Sau00, §3-5]), à savoir les opérateurs hypergéométriques généralisés confluents et ceux de Kloosterman. Ceux-ci ont été étudiés par F. Beukers, W. D. Brownawell et G. Heckman dans [BBH88], N. M. Katz, avec des contributions d'O. Gabber, dans [Kat87 ; Kat90], N. M. Katz et R. Pink dans [KP87], A. Duval et C. Mitschi dans [DM89] et C. Mitschi dans [Mit96].

II.3.1. Conséquences galoisiennes de $(\mathscr{H}1)$ et $(\mathscr{H}2)$. Nous avons démontré le

Théorème 16 ([6, Theorems 20 and 24])**.** *Considérons un objet M de $\mathscr{E}$ de rang n dont le groupe de Galois G est connexe.*

(1) (a) *Si M vérifie $(\mathscr{H}1)$ alors G est l'image de $\prod_{i=1}^{l} \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_i})$ dans $\otimes_{i=1}^{l} std$ où $n_1, \ldots, n_l > 1$ sont des entiers deux à deux premiers entre eux tels que $n = n_1 \cdots n_l$.*

(b) *Si M est de plus $\otimes$-indécomposable*[4] *alors $G = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$.*

(2) *Si M est irréductible et vérifie $(\mathscr{H}2)$ alors $G = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$.*

Remarque 17. *Nous avons montré (cf. [6]) que chacun des groupes apparaissant en conclusion du Théorème 16 est réalisable comme groupe de Galois d'une équation vérifiant $(\mathscr{H}1)$ ou $(\mathscr{H}2)$.*

La démonstration de ce théorème comporte, comme celles du Théorème 1 de F. Beukers et G. Heckman, des résultats principaux de [Kat87] ou encore de notre Théorème 4, deux étapes.

La première étape consiste à exhiber des « éléments spéciaux » de G via le groupe de Galois formel de M en 0. Elle est inspirée par les travaux de N. M. Katz dans [Kat87] ; il y a cependant d'importantes différences, notamment le fait que le tore thêta apporte moins d'informations que son analogue différentiel, le tore exponentiel. Nous utilisons notamment les travaux de M. van der Put et M. F. Singer [PS97], J.-P. Ramis et J. Sauloy [RS07 ; RS09 ; Sau04], M. van der Put et M. Reversat [PR07].

La deuxième étape consiste à faire abstraction du contexte galoisien et à voir G comme un sous-groupe algébrique connexe de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ agissant irréductiblement sur $\mathbb{C}^n$; que pouvons-nous en dire sachant uniquement qu'il contient les « éléments spéciaux » auxquels nous avons fait allusion ci-dessus ? Ce type de question a notamment été abordé par B. Kostant [Kos58], J.-P. Serre [Ser67, §4] et [Ser79, §3], Yu. G. Zarhin [Zar86], O. Gabber et N. M. Katz [Kat90,

4. C'est-à-dire qu'il n'est pas isomorphe au produit tensoriel de deux objets de $\mathscr{E}$ de rangs ≥ 2.

Chapter I], N. M. Katz [Kat87, §III], N. M. Katz et R. Pink [KP87, Part 1]. Certains de ces auteurs étaient motivés par des problèmes « concrets » issus de la théorie des modules de Hodge-Tate, de la théorie de Galois différentielle ou encore de celle des sommes d'exponentielles. Afin de prouver le Théorème 16, nous avons utilisé le [Kat87, Corollary 3.2.8] dû à N. M. Katz, la caractérisation de $\mathfrak{sl}(\mathbb{C}^n)$ donnée par B. Kostant dans [Kos58] et nous avons élaboré et utilisé une nouvelle caractérisation des groupes classiques, à savoir le [6, Theorem 2], dont la démonstration utilise des résultats d'O. Gabber et de J.-P. Serre, ainsi que la classification des algèbres de Lie minuscules.

II.3.2. Applications à des calculs explicites. Pour rendre le Théorème 16 effectif, des critères de connexité et de $\otimes$-indécomposabilité sont nécessaires.

S'agissant de la connexité, mentionnons le résultat suivant.

Proposition 18 ([6, Corollaries 12 and 13])**.** *Le groupe de Galois de M est connexe dès lors que l'une des propriétés suivantes est satisfaite :*

(1) *le groupe de Galois formel de M en 0 ou ∞ est connexe ;*
(2) *M vérifie $(\mathscr{H}1)$, il est singulier régulier en ∞ avec des exposants dans $\{c \in \mathbb{C}^* \mid c^{n'} \in q^{\mathbb{Z}}\}$ pour un certain $n' \in \mathbb{Z}^*$ relativement premier au rang de M.*

Ces critères sont particulièrement efficaces puisqu'ils reposent uniquement sur des propriétés locales en 0 ou ∞ ; ceci est spécifique aux q-différences.

Attardons-nous plus longuement sur la $\otimes$-indécomposabilité. Notons d'abord que

$$\mathcal{K}l_q\left(X^6, -(1+q^{-4}X)(1+q^{-3}X)(1+q^{-2}X)(1+X)^2\right) \cong \mathcal{K}l_q\left(X^2,-(1+X)\right) \otimes \mathcal{K}l_q\left(X^3,-(1+X)\right),$$

si bien que la $\otimes$-indécomposabilité n'est pas impliquée par $(\mathscr{H}1)$. Nous avons établi le critère suivant.

Théorème 19 ([6, Theorem 32])**.** *Supposons que $L = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\boldsymbol{\sigma}_q^k \in \mathcal{D}_q$ avec $a_0a_n \neq 0$ vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $a_n/a_0, \ldots, a_1/a_0$ sont analytiques en chaque point de $q^{\mathbb{Z}}z_0$ et vérifient
- *$(a_n/a_0)(z_0) = 0$;*
- *pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $(a_n/a_0)(q^k z_0) \neq 0$;*

2) L est pur isocline en 0 et ∞.

Alors $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_qL$ est $\otimes$-indécomposable.

Ce critère est en fait de nature « q-monodromique ». L'idée sous-jacente est que la valeur en z_0 d'une « matrice de Birkhoff intrinsèque » associée à un opérateur L vérifiant les hypothèses du théorème précédent ne peut s'écrire comme un produit tensoriel de deux matrices de tailles ≥ 2. Noter le lien de parenté avec les « q-monodromies » de la section II.2.

Le résultat suivant est une application du Théorème 19.

Corollaire 20 ([6]). *Considérons le module de q-Kloosterman $\mathcal{K}l_q(U,V)$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $V(z_0) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $V(q^k z_0) \neq 0$ alors $\mathcal{K}l_q(U,V)$ est $\otimes$-indécomposable. En particulier, $\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a};\emptyset;\lambda)$ est $\otimes$-indécomposable.*

En combinant les résultats précédents, nous avons pu calculer des groupes de Galois ; par exemple :

Théorème 21 ([6, Theorem 26]). *Reprenons les notations du début de la section II.3 pour les opérateurs q-hypergéométriques confluents avec $r > s$. Pour tout $(i,j) \in \{1,...,r\} \times \{1,...,s\}$, soient $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i = q^{\alpha_i}$ et $b_j = q^{\beta_j}$. Supposons que, pour tout $(i,j) \in \{1,...,r\} \times \{1,...,s\}$, $\beta_j - \alpha_i \notin \mathbb{Z}$ (cette condition est vide si $s = 0$) et que le groupe algébrique engendré par $\mathrm{diag}(e^{2\pi i\alpha_1},...,e^{2\pi i\alpha_r})$ est connexe. Alors le groupe de Galois de $\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b};\lambda)$ est $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$.*

Exemple 22 ([6, §1]). *Si $r > s$ alors le groupe de Galois de $(q^{1/2}\boldsymbol{\sigma}_q - 1)^s - z(\boldsymbol{\sigma}_q - 1)^r$ est $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^r)$.*

Théorème 23 ([6, Theorem 35]). *Reprenons les notations du début de la section II.3 pour les opérateurs de q-Kloosterman. On note $c_1,...,c_{\deg U}$ les racines complexes de $X^{\deg U}(U(X^{-1}) + V(0)) \in \mathbb{C}[X]$ et, pour tout $i \in \{1,...,\deg U\}$, on note (u_i,α_i) l'unique élément de $\mathbb{U} \times \mathbb{R}$ tel que $c_i = u_i q^{\alpha_i}$ ($\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ est le cercle unité). Supposons que $\mathrm{pgcd}(\deg U, \deg V) = 1$, que le groupe algébrique engendré par $\mathrm{diag}(u_1,...,u_{\deg U})$ et $\mathrm{diag}(e^{2\pi i\alpha_1},...,e^{2\pi i\alpha_{\deg U}})$ est connexe et qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $V(z_0) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $V(q^k z_0) \neq 0$. Alors le groupe de Galois de $\mathcal{K}l_q(U,V)$ est $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{\deg U})$.*

Exemple 24 ([6, §1]). *Si m et n sont des entiers premiers entre eux alors le groupe de Galois de $(1 - \boldsymbol{\sigma}_q)^n + (1 - z^{-1})^m - 1$ est $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$.*

Le lecteur trouvera dans [6] des résultats supplémentaires.

II.4. Perspectives

La théorie analytique des équations aux q-différences en plusieurs variables mériterait d'être davantage explorée. Cela pourrait notamment ouvrir la voie à une approche analytique de la théorie de Galois, dans la veine des travaux de J. Sauloy [Sau03] et de J.-P. Ramis et J. Sauloy [RS07 ; RS09 ; RS12]. Les équations q-GKZ, extensions en plusieurs variables des équations q-hypergéométriques généralisées, constituent une famille d'exemples importants. Il serait d'ailleurs intéressant de déterminer celles dont le groupe de Galois est fini ; rappelons que l'analogue différentiel de ce problème a été récemment résolu par F. Beukers [Beu10] (via la conjecture des p-courbures de Grothendieck pour les équations d'origine géométrique dont la validité a été démontrée par N. M. Katz).

Il serait intéressant d'exploiter le q-analogue du groupe fondamental sauvage introduit par J.-P. Ramis and J. Sauloy dans [RS07 ; RS09 ; RS12] afin de calculer les groupes de Galois d'équations aux q-différences irrégulières. La nouveauté est la composante (unipotente) de Stokes provenant des propriétés *analytiques* de la filtration par les pentes. Des calculs explicites devraient pouvoir être menés pour les opérateurs q-hypergéométriques confluents de petit ordre.

Notons $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de norme 1 et $\mathbb{U}_\infty$ son sous-groupe formé par les racines de l'unité. Les équations aux q-différences pour $q \in \mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_\infty$ sont peu comprises, hormis en ce qui concerne leur théorie analytique locale en 0 et ∞ (voir le travail de L. Di Vizio [DV09]). Peu d'outils sont à notre disposition pour étudier les groupes de Galois q-hypergéométriques dans ce cas. Peut-on construire des avatars des monodromies différentielles ? La notion de matrice de Birkhoff n'a en général plus d'intérêt : les solutions locales en 0 et ∞ n'ont aucune raison d'être définies sur une partie commune de $\mathbb{C}^*$. Il est probable que, pour la plupart des paramètres $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{U}^n$, les solutions locales en 0 et ∞ de l'opérateur q-hypergéométrique généralisé $\mathrm{L}_q(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; 1)$ soient définies sur $D(0,1)$ et $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$ respectivement et que $\mathbb{U}$ soit une frontière naturelle (voir à ce sujet les travaux de K. A. Driver et D. S. Lubinsky en liaison avec les approximants de Padé). Une étude asymptotique pourrait permettre de « traverser » $\mathbb{U}$ et de construire des avatars des matrices de Birkhoff. Au-delà du cas q-hypergéométrique, on pourrait ôter à $\mathbb{C}^*$ les cercles centrés en 0 et passant par les singularités de l'équation (c'est-à-dire ôter à $\mathbb{C}^*$ l'adhérence du saturé modulo $q^{\mathbb{Z}}$ de l'ensemble des singularités de l'équation) et chercher à construire des solutions sur chacune des composantes connexes (couronnes). Ceci est à mettre en perspective avec la construction par J. Sauloy [Sau09], dans le cas $q \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{U}$, de « solutions locales » sur des couronnes (topologiques) via la théorie des fibrés vectoriels holomorphes sur la courbe elliptique $\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$.

La confluence fournit un autre angle d'attaque : que deviennent les constructions du cas $q \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{U}$ lorsque q tend vers un point de $\mathbb{U}$? Il serait notamment intéressant d'étudier le comportement des matrices de Stokes introduites par J.-P. Ramis, J. Sauloy et C. Zhang [RSZ12 ; RS07 ; RS09 ; RS12] (rappelons que le travail de L. Di Vizio dans [DV09] montre que les classifications formelle et analytique des équations aux q-différences coïncident sous des conditions diophantiennes adéquates lorsque $q \in \mathbb{U}$). Même question pour les matrices de Birkhoff tordues et les résidus de leurs dérivées logarithmiques. Les équations q-hypergéométriques fournissent à nouveau une famille d'exemples intéressants, pour laquelle des calculs explicites sont possibles (au moins pour des paramètres génériques). D. Sauzin et S. Marmi [MS03] ont étudié la confluence d'équations du premier ordre non homogènes : ils ont mis en évidence une intéressante propriété asymptotique de type Gevrey (lorsque q tend vers un point de $\mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_\infty$).

Revenons au cas $|q| \neq 1$. Nous espérons que les dérivées logarithmiques $\breve{P}^{-1}\breve{P}'$, introduites pour pallier l'absence de monodromie, pourront servir à mieux comprendre de groupe tannakien de $\mathscr{F}$. Il s'agirait d'en exhiber un sous-groupe dense « aussi petit que possible » (penser au groupe fondamental topologique dans le cas différentiel singulier régulier). On pourrait commencer par supposer que $\breve{P}^{-1}\breve{P}'$ n'a que des pôles simples sur $\widetilde{\mathbb{C}^*}$ (noter que cette propriété est stable par produit tensoriel) ; remarquons que dans ce cas ses résidus sont à valeurs propres entières.

Une partie des questions précédentes se décline pour les équations aux différences finies.

CHAPITRE III

Matrices de Birkhoff, résidus et rigidité pour les équations aux q-différences

III.1. Introduction

Nous revenons dans ce chapitre sur les « singularités intermédiaires » des équations aux q-différences, celles-là même qui sont au coeur de la section II.2.1. Nous présentons le résultat de notre réflexion dans [11] sur la notion de rigidité pour les équations aux q-différences.

Problème 2. *Qu'est-ce que l'isomorphie locale et la rigidité pour les équations aux q-différences ?*

Notre travail sur cette question repose sur une variante du q-analogue de la correspondance de Riemann-Hilbert évoqué dans la section II.2.1. Introduisons la catégorie des triplets de connexion $\mathscr{C}$ dont les objets sont les triplets

$$(A^{(0)}, C, A^{(\infty)}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

tels que $(\sigma_q C)A^{(0)} = A^{(\infty)}C$; l'entier n est la taille de $(A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$. Ses morphismes, d'un objet $(A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ de taille n vers un objet $(B^{(0)}, D, B^{(\infty)})$ de taille p, sont les couples

$$(S^{(0)}, S^{(\infty)}) \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{C}[z, z^{-1}]) \times \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$$

tels que

$$\begin{cases} (\sigma_q S^{(0)})A^{(0)} = B^{(0)}S^{(0)} \\ (\sigma_q S^{(\infty)})A^{(\infty)} = B^{(\infty)}S^{(\infty)} \\ S^{(\infty)}C = DS^{(0)}. \end{cases}$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 25 (J. Sauloy [Sau03, Proposition 3.1.1.3])**.** *La catégorie des modules aux q-différences singuliers réguliers $\mathscr{F}$ est équivalente à celle des triplets de connexion $\mathscr{C}$.*

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions des notions d'isomorphie locale et de rigidité basées sur le paradigme suivant :

- un objet $\chi = (A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ de $\mathscr{C}$ est le recollement des données locales $A^{(0)}$ et $A^{(\infty)}$ via une « donnée de connexion globale », à savoir la matrice de Birkhoff C ;
- nous voyons les résidus $\mathrm{Res}_s\, C$ ($s \in \mathbb{C}^*$) comme des « données de connexion locales ».

L'emploi des résidus est partiellement motivé par les résultats de la section II.2.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section III.2, nous définissons des notions d'isomorphie locale et de rigidité pour une classe d'équations aux q-différences suffisamment régulières introduite dans la section III.2.1. Dans la section III.3, nous donnons des caractérisations numériques de ces notions de rigidité. La section III.4 a trait à la q-hypergéométrie et à ses liens avec la rigidité ; nous y présentons notamment une caractérisation « monodromique » des modules q-hypergéométriques.

Naturellement, les systèmes locaux rigides, et plus spécialement les travaux de N. M. Katz [Kat96] et de K. Strambach et H. Völklein [SV99], nous ont inspirés.

III.2. Isomorphie locale et rigidité

III.2.1. Les modules aux q-différences et les triplets de connexion complètement singuliers réguliers. Nous ne travaillerons pas dans les catégories $\mathscr{F}$ et $\mathscr{C}$ toutes entières mais dans des ses sous-catégories pleines, dont les objets ont des propriétés de régularité aux « singularités intermédiaires » (pas uniquement en 0 et ∞ comme c'est classiquement le cas).

Définition 26 ([11, Definitions 8 and 10])**.** *Nous notons $\mathscr{C}_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ constituée des objets $(A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ tels que C a au plus des pôles simples sur $\mathbb{C}^*$. Nous notons $\mathscr{F}_c$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}$ correspondant à $\mathscr{C}_c$ par le Théorème 25. Les objets de $\mathscr{C}_c$ et de $\mathscr{F}_c$ seront dits complètement singuliers réguliers.*

III.2.2. Isomorphie locale. Formalisons les idées présentées dans l'introduction de ce chapitre.

Définition 27 (Isomorphie locale pour $\mathscr{C}_c$, [11, Definition 12])**.** *Soient $\chi = (A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ et $\chi' = (B^{(0)}, D, B^{(\infty)})$ des objets de $\mathscr{C}_c$ de taille n.*

Nous dirons que χ et χ' sont localement isomorphes si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $\exists S_0^{(0)}, S_\infty^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ tels que

$$\begin{cases} (\sigma_q S_0^{(0)}) A^{(0)} = B^{(0)} S_0^{(0)} \\ (\sigma_q S_\infty^{(\infty)}) A^{(\infty)} = B^{(\infty)} S_\infty^{(\infty)}; \end{cases}$$

(ii) $\forall u \in \mathbb{C}^*$, $\exists S_u^{(0)}, S_u^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ tels que

$$\begin{cases} (\sigma_q S_u^{(0)}) A^{(0)} = B^{(0)} S_u^{(0)} \\ (\sigma_q S_u^{(\infty)}) A^{(\infty)} = B^{(\infty)} S_u^{(\infty)} \\ S_u^{(\infty)}(u)(\mathrm{Res}_u\, C) = (\mathrm{Res}_u\, D) S_u^{(0)}(u). \end{cases}$$

Nous dirons que χ et χ' sont faiblement localement isomorphes si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i') la propriété (i) ci-dessus est satisfaite ;

(ii') $\forall u \in \mathbb{C}^*$, $\exists S_u^{(0)}, S_u^{(\infty)} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ *tels que*

$$S_u^{(\infty)}(u)(\mathrm{Res}_u\, C) = (\mathrm{Res}_u\, D) S_u^{(0)}(u)$$

i.e. $\mathrm{rg}\,\mathrm{Res}_u\, C = \mathrm{rg}\,\mathrm{Res}_u\, D$.

Définition 28 (Isomorphie locale pour $\mathscr{F}_c$, [11, Definition 19])**.** *Soient M et N des objets de $\mathscr{F}_c$ et considérons des objets χ_M et χ_N de $\mathscr{C}_c$ leur correspondant par le Théorème 25. Nous dirons que M et N sont localement isomorphes (resp. faiblement localement isomorphes) si χ_M et χ_N le sont.*

La définition précédente n'est pas ambiguë (c'est-à-dire est indépendante du choix de χ_M et χ_N). Par ailleurs, les terminologies sont cohérentes ; en effet, d'après [11, Proposition 13], nous avons (aussi bien dans $\mathscr{C}_c$ que dans $\mathscr{F}_c$) « isomorphes $\Rightarrow$ localement isomorphes $\Rightarrow$ faiblement localement isomorphes ». Notons également que les relations binaires « être localement isomorphes » et « être faiblement localement isomorphes » sont des relations d'équivalence.

III.2.3. Rigidité. Nous avons introduit la notion de rigidité suivante.

Définition 29 (Rigidité, [11, Definitions 16 and 20])**.** *Nous dirons qu'un objet χ de $\mathscr{C}_c$ est rigide (resp. fortement rigide) si tout objet de $\mathscr{C}_c$ localement isomorphe (resp. faiblement localement isomorphe) à χ lui est isomorphe. La définition de la rigidité pour les objets de $\mathscr{F}_c$ est similaire.*

Ici aussi, les terminologies sont cohérentes ; en effet, en vertu de [11, Proposition 17], nous avons (aussi bien dans $\mathscr{C}_c$ que dans $\mathscr{F}_c$) « fortement rigide $\Rightarrow$ rigide ».

III.3. Caractérisation numérique de la rigidité

Commençons par introduire quelques notations. Nous dirons qu'un objet $\chi = (A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ de $\mathscr{C}$ est normalisé si les valeurs propres de $A^{(0)}$ et $A^{(\infty)}$ sont dans la couronne $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |q| \leq |z| < 1\}$. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, nous notons $\mathrm{Z}(A)$ le centralisateur de A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Z}(A) = \{X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid XA = AX\}.$$

Pour tout $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, nous considérons le groupe algébrique donné par

$$G(R) = \{(X, Y) \in \mathrm{Z}(A^{(0)}) \times \mathrm{Z}(A^{(\infty)}) \mid YR = RX\}.$$

Nous avons obtenu la caractérisation numérique suivante de la rigidité.

Théorème 30 ([11, Theorem 28])**.** *Soit $\chi = (A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ un objet normalisé et irréductible de $\mathscr{C}_c$ de taille n tel que $q^{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Sp}(A^{(0)}) \cap q^{\mathbb{Z}}\,\mathrm{Sp}(A^{(\infty)}) = \emptyset$. Soient $s_1, ..., s_m$ les pôles de C dans un domaine fondamental de $\mathbb{C}^*$ relativement à l'action par multiplication de $q^{\mathbb{Z}}$ et posons, pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, $\mathrm{Res}_{s_i}\, C = R_i$. Alors :*

i) $\sum_{i=1}^{m} \dim G(R_i) \leq (m-1)(\dim \mathrm{Z}(A^{(0)}) + \dim \mathrm{Z}(A^{(\infty)})) + 1$ *;*

ii) χ est rigide si et seulement si $\sum_{i=1}^{m} \dim G(R_i) = (m-1)(\dim \mathrm{Z}(A^{(0)}) + \dim \mathrm{Z}(A^{(\infty)})) + 1$.

Nous avons également obtenu une caractérisation de la rigidité forte. Pour tout $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, nous considérons le groupe algébrique donné par

$$H(R) = \{(X, Y) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid YR = RX\}.$$

Théorème 31 ([11, Theorem 29])**.** *Nous reprenons les notations et hypothèses du Théorème 30. Alors :*

i) $\sum_{i=1}^{m} \dim H(R_i) \leq 2mn^2 - (\dim \mathrm{Z}(A^{(0)}) + \dim \mathrm{Z}(A^{(\infty)})) + 1$ *;*

ii) χ *est fortement rigide si et seulement si* $\sum_{i=1}^{m} \dim H(R_i) = 2mn^2 - (\dim \mathrm{Z}(A^{(0)}) + \dim \mathrm{Z}(A^{(\infty)})) + 1$.

III.4. Équations q-hypergéométriques généralisées et rigidité

Définition 32 ([11, Definition 33])**.** *Un objet de* $\mathscr{F}$ *est dit* q*-hypergéométrique s'il est isomorphe au module* q*-hypergéométrique* $\mathcal{H}_q(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}; \lambda)$ *(notation de la section II.1) pour certains paramètres* $\boldsymbol{a} \in (\mathbb{C}^*)^n$*,* $\boldsymbol{b} \in (\mathbb{C}^*)^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}^*$*. Un objet de* $\mathscr{C}$ *est dit* q*-hypergéométrique s'il correspond par le Théorème 25 à un objet* q*-hypergéométrique de* $\mathscr{F}$*.*

Les objets q-hypergéométriques sont complètement singuliers réguliers et forment une famille d'objets rigides en vertu du

Théorème 33 ([11, Theorem 37])**.** *Les objets* q*-hypergéométriques irréductibles (de* $\mathscr{C}$ *et de* $\mathscr{F}$*) sont fortement rigides.*

Nous avons déduit de ce théorème la description « q-monodromique » suivante des objets q-hypergéométriques.

Théorème 34 ([11, Theorem 37])**.** *Soit* $\chi = (A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ *un objet irréductible normalisé de* $\mathscr{C}$ *tel que* $q^{\mathbb{Z}} \operatorname{Sp}(A^{(0)}) \cap q^{\mathbb{Z}} \operatorname{Sp}(A^{(\infty)}) = \emptyset$*.*

Alors χ *est* q*-hypergéométrique si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites*

1) les pôles de C *sur* $\mathbb{C}^*$ *sont simples et situés sur une* q*-spirale* $q^{\mathbb{Z}} z_0$ *;*

2) $\operatorname{rg} \operatorname{Res}_{z_0} C = 1$.

Remarque 35. *Il y a une relation simple entre les paramètres* $\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{b}$ *et* λ *d'une part et les valeurs propres de* $A^{(0)}$*,* $A^{(\infty)}$ *et* z_0 *d'autre part ; cf. [11, Theorem 37].*

Nous avons décrit l'ensemble des résidus q-hypergéométriques à la singularité intermédiaire.

Théorème 36 ([11, Theorem 40])**.** *Soit* $\chi = (A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ *un objet* q*-hypergéométrique normalisé irréductible de* $\mathscr{C}$ *de paramètres* $\boldsymbol{a}$*,* $\boldsymbol{b}$ *et* λ*. Notons* $z_0 = (\prod_{j=1}^{n} \frac{b_j}{q})(\lambda \prod_{i=1}^{n} a_i)^{-1}$*. Alors les pôles de* C *sur* $\mathbb{C}^*$ *sont situés sur la* q*-spirale* $q^{\mathbb{Z}} z_0$ *et nous avons décrit l'ensemble des résidus*

$$\{\operatorname{Res}_{z_0} D \mid (A^{(0)}, D, A^{(\infty)}) \text{ } q\text{-hypergéométrique de paramètres } \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ et } \lambda\}.$$

Enfin, nous avons prouvé le résultat suivant :

Proposition 37 ([11, Proposition 38])**.** *Soit $\chi = (A^{(0)}, C, A^{(\infty)})$ un objet irréductible normalisé de $\mathscr{C}_c$ tel que $q^{\mathbb{Z}}\operatorname{Sp}(A^{(0)}) \cap q^{\mathbb{Z}}\operatorname{Sp}(A^{(\infty)}) = \emptyset$. Si $A^{(0)}$ et $A^{(\infty)}$ n'ont que des valeurs propres simples alors χ est fortement rigide si et seulement s'il est q-hypergéométrique.*

III.5. Perspectives

D'autres notions de rigidité semblent mériter une attention particulière ; la section II.2 incite notamment à utiliser les résidus des dérivées logarithmiques $\breve{P}^{-1}\breve{P}'$ (où $\breve{P}$ désigne une matrice de Birkhoff tordue comme dans la section II.2). Rappelons que, d'après [Sau03, §3.2.1], la catégorie $\mathscr{F}$ des modules aux q-différences singuliers réguliers est équivalente à la catégorie $\mathscr{B}$ dont les objets sont les triplets

$$(A^{(0)}, P, A^{(\infty)}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathcal{M}(\mathbb{C}^*)^{\sigma_q}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

(l'entier n est la taille de $(A^{(0)}, P, A^{(\infty)})$) et dont les morphismes, d'un objet $(A^{(0)}, P, A^{(\infty)})$ de taille n vers un objet $(B^{(0)}, Q, B^{(\infty)})$ de taille p, sont les couples

$$(S^{(0)}, S^{(\infty)}) \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_{p,n}(\mathbb{C})$$

tels que

$$\begin{cases} S^{(0)}\overline{A^{(0)}} = \overline{B^{(0)}}S^{(0)} \\ S^{(\infty)}\overline{A^{(\infty)}} = \overline{B^{(\infty)}}S^{(\infty)} \\ S^{(\infty)}P = QS^{(0)}. \end{cases}$$

Nous avons désigné par $\overline{M}$ la matrice obtenue en ramenant les valeurs propres de la matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid |q| \leq |z| < 1\}$. Nous noterons par $\breve{P}$ la matrice de Birkhoff tordue associée à un objet $(A^{(0)}, P, A^{(\infty)})$ de $\mathscr{B}$ suivant [Sau03, §3.2.2.2]. Il serait intéressant d'étudier la notion suivante :

Définition 38. *Deux objets $\chi = (A^{(0)}, P, A^{(\infty)})$ et $\chi' = (B^{(0)}, Q, B^{(\infty)})$ de $\mathscr{B}$ seront dits localement isomorphes si les propriétés suivantes sont satisfaites :*
(i) $\overline{A^{(0)}}$ et $\overline{B^{(0)}}$, ainsi que $\overline{A^{(\infty)}}$ et $\overline{B^{(\infty)}}$, sont conjuguées ;
(ii) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, les coefficients de Taylor d'ordre $-j$ de $\breve{P}^{-1}\breve{P}'$ et de $\breve{Q}^{-1}\breve{Q}'$, en chacune de leurs singularités sur $\widetilde{\mathbb{C}^*}$, sont deux à deux conjugués.

Remarque 39. *En considérant, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la sous-catégorie pleine de $\mathscr{B}$ formée des triplets $(A^{(0)}, P, A^{(\infty)})$ tels que $\breve{P}^{-1}\breve{P}'$ a au plus un pôle d'ordre k, on obtient une filtration de $\mathscr{B}$ par des sous-catégories stables par produit tensoriel.*

Une autre question importante concerne l'opération de convolution moyenne introduite par N. M. Katz [Kat96] (puis reprise par M. Detweiller et S. Reiter dans [DR00]) : admet-elle un q-analogue, adapté à une notion de rigidité pour les q-différences, qui permettrait de générer les systèmes ou les triplets de connexion irréductibles rigides ? En fait, un an et demi après la rédaction de [11], nous avons pris (très partiellement) connaissance de la thèse en cours de M. Yamaguchi sous la direction de H. Sakai. Celle-ci semble basée sur un « indice de rigidité » (résultant du calcul d'un nombre de paramètres accessoires -et non pas d'une propriété du type local/global- dont il serait intéressant d'élucider le lien avec les formules de la section III.3) et semble justement avoir pour ambition de développer une opération de q-convolution moyenne. Malheureusement, les transparents d'un exposé de M. Yamaguchi téléchargeables à l'adresse suivante http ://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/ohyama/RIMS2012/poster/yamaguchi.pdf sont la seule source tangible à l'heure actuelle. Nous avons pour l'instant décidé de laisser de côté la question de la q-convolution moyenne, afin de ne pas interférer avec les travaux en cours de M. Yamaguchi.

Y a-t-il une extension de nos résultats au cas irrégulier ? Pour le cas différentiel, nous renvoyons aux travaux de S. Bloch et H. Esnault [BE04] et de D. Aritkin [Ari10].

La question du comportement de la rigidité par confluence est naturelle. Un module différentiel limite (lorsque $q \to 1$) de modules aux q-différences rigides est-il nécessairement rigide ?

Une question de nature plus arithmétique : l'approche de M. Huttner pour la résolution de certains problèmes de Padé via la rigidité admet-elle un q-analogue ?

CHAPITRE IV

Deux résultats galoisiens supplémentaires

IV.1. Lie-irréductibilité et p-courbures

Une conjecture formulée par A. Grothendieck prédit qu'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$ a une base de solutions algébriques si et seulement si ses p-courbures sont nulles pour presque tout premier p. Parmi les travaux en direction de cette conjecture, mentionnons ceux de D. V. et G. V. Chudnovsky [CC85a ; CC85b], de N. M. Katz [Kat72 ; Kat82], d'Y. André [And04] et de J.-B. Bost [Bos01]. Un q-analogue a été démontré par L. Di Vizio [DV02].

Dans [5] nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème 40 ([5, Theorem 1])**.** *Soit L un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$, irréductible sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Supposons que l'ordre de L est premier et que, pour une infinité de nombres premiers p, L a une réduction modulo p nilpotente mais une p-courbure non nulle. Alors L est Lie-irréductible.*

Ce théorème généralise un résultat de J. F. Voloch pour les opérateurs d'ordre 2. En effet, dans ce cas le Théorème 40 est équivalent au résultat suivant.

Théorème 41 (J. F. Voloch [Vol00])**.** *Soit L un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$, irréductible sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$. Supposons que, pour une infinité de nombres premiers p, L a une réduction modulo p nilpotente mais une p-courbure non nulle. Alors le groupe de Galois de L sur $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ contient $\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}})$.*

IV.2. Variation des groupes de Galois d'équations aux différences finies

Considérons un système aux différences finies paramétré

$$(\mathcal{S}) \quad Y(z-1) = A(z,h)Y(z), \; A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z,h)).$$

Soit Σ un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$ tel que $(\mathcal{S})$ est spécialisable en tout $h \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$; notons G_h le groupe de Galois sur $\mathbb{C}(z)$ de la spécialisation $(\mathcal{S}_h)$ de $(\mathcal{S})$ en $h \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$. Nous avons abordé dans [3] la question de la variation de la dimension de G_h par le biais de méthodes transcendantes. Nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 42 ([3, Theorem 5.1])**.** *Supposons que, pour tout $h \in \mathbb{C}\setminus\Sigma$, $(\mathcal{S}_h)$ est fuchsien non résonnant en ∞ et que les hypothèses techniques [3, Assumption 1, §4] sont satisfaites. Notons $\kappa = \max_{h\in\mathbb{C}\setminus\Sigma} \dim(G_h)$. Alors $\dim(G_h) = \kappa$*

pour tout h dans le complémentaire (dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$) d'une partie discrète de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.

On a par exemple le corollaire suivant :

Corollaire 43 ([3, Corollary 5.2]). *Nous reprenons les hypothèses du Théorème 42. Si $G_h = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour un certain $h \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ alors $G_h = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ pour tout h dans le complémentaire (dans $\mathbb{C} \setminus \Sigma$) d'une partie discrète de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$.*

Nous utilisons notamment les séries de factorielles (qui permettent de resommer les séries formelles intervenant dans la résolution des équations aux différences finies fuchsiennes) et une description de l'algèbre de Lie de G_h à l'aide des matrices de Birkhoff due à P. Etingof (communication privée).

La confluence des groupes de Galois est une motivation des travaux d'A. Duval dans [Duv03 ; Duv04], de l'auteur dans [Roq06], et d'A. Duval et de l'auteur dans [DR08] ; voir aussi l'article de L. Di Vizio et C. Zhang [DVZ09]. Pour un point de vue analytique sur la confluence des systèmes aux q-différences vers les systèmes différentiels nous renvoyons aux travaux de J. Sauloy [Sau00 ; Sau03]. Pour une étude algébrique très générale de la confluence des groupes de Galois d'équations fonctionnelles, nous renvoyons au travail d'Y. André [And01].

CHAPITRE V

Intégrabilité des systèmes dynamiques discrets

V.1. Introduction

Ce chapitre rend compte de nos travaux en collaboration avec G. Casale [2 ; 7] au sujet de l'intégrabilité des systèmes dynamiques discrets. Il y est question d'intégrabilité

- au sens de Liouville (« existence de suffisamment d'intégrales premières indépendantes et en involution ») dans un contexte symplectique dans la section V.2 ;
- par des quadratures discrètes (« existence d'une solution générale obtenue en résolvant une succession d'équations élémentaires ») dans la section V.3.

Dans les deux cas, il s'agit de formuler des conditions nécessaires à l'intégrabilité exploitables dans la pratique.

Dans le contexte différentiel, la problématique de l'intégrabilité remonte au moins au XVIII-ème siècle, avec en particulier la question de la stabilité du système solaire en mécanique céleste. On doit notamment à S. Kowalevski [Kow89], H. Poincaré [Poi57] et S. L. Ziglin [Zig80] des conditions nécessaires à l'intégrabilité. La théorie de Galois différentielle, en liaison avec les travaux de S. L. Ziglin, fut indépendamment introduite dans [MR89 ; MS94] et dans [CR91] (voir aussi [CRS95 ; Bai+96]) avant que J. J. Morales et J.-P. Ramis [MRR01] ne montrent que *le groupe de Galois différentiel de l'équation variationnelle (normale) le long d'une solution particulière d'un système hamiltonien intégrable est virtuellement abélien*. Ce résultat a depuis connu de nombreuses variantes et d'innombrables applications (voir par exemple [MRRS07 ; MRR10 ; MP09]). Cette philosophie galoisienne est à la base de notre travail. Rappelons que l'intégrabilité par quadratures discrètes des équations aux différences linéaires a été étudiée d'un point de vue galoisien par C. H. Franke [Fra66 ; Fra74].

L'activité scientifique bouillonante autour des équations de Painlevé discrètes a joué un rôle moteur dans notre travail ; l'application de nos critères à ces équations est l'objet de la section V.4.

Terminons avec un bref interlude bibliographique. Le lecteur intéressé par la question « Qu'est-ce qu'un système dynamique discret intégrable ? » pourra consulter les articles de A. P. Veselov [Ves91b ; Ves91a] (il n'y a pas *une* notion d'intégrabilité plus intéressante que les autres en toutes circonstances ; G. D. Birkhoff [Bir66] écrivit à ce sujet « It is a well-known fact that for certain problems, auxiliary analytic relations can be deduced by means of which the solutions of the system of differential equations can be satisfactorily treated, in which case the system may be said integrable. When, however, one attempts to formulate a precise definition of integrability, many possibility appear, each with a certain intrinsic interest. »). Nous renvoyons également aux survols, orientés vers les équations de Painlevé discrètes, de B. Grammaticos et A. Ramani [GR00 ; GR04b] et de R. G. Halburd et R. J. Korhonen [HK07] ; à notre connaissance, la seule approche systématique des équations de Painlevé discrètes est celle de H. Sakai [Sak01] basée sur les travaux de M.-H. Saito et H. Umemura [SU01]. Mentionnons enfin l'importante notion d'entropie algébrique telle que définie par M. P. Bellon et C.-M. Viallet [BV99] (voir aussi l'article de J. Diller et C. Favre [DF01]) ; T. Takenawa [Tak01] a d'ailleurs prouvé que l'entropie algébrique des équations de Painlevé discrètes de H. Sakai est nulle.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section V.2, nous énonçons un critère de non intégrabilité au sens de Liouville. Dans la section V.3, nous nous intéressons à l'intégrabilité par des quadratures discrètes. Dans la section V.4, nous donnons des applications aux équations de Painlevé discrètes.

V.2. Intégrabilité Liouvillienne

Notons V la variété algébrique complexe $\mathbb{A}^m_{\mathbb{C}}$ de dimension paire $m = 2n$ munie d'une forme symplectique ω. Nous nous intéressons dans cette section à l'intégrabilité Liouvillienne d'une application rationnelle symplectique dominante

$$\Phi : V \dashrightarrow V.$$

Définition 44. *L'application symplectique Φ est intégrable au sens de Liouville si elle admet n intégrales premières rationnelles $H_1,\dots,H_n$ fonctionnellement indépendantes et en involution.*

Rappellons que :

- une intégrale première rationnelle de Φ est une fonction rationnelle $H \in \mathbb{C}(V)$ telle que $H \circ \Phi = H$;
- $H_1,\dots,H_n$ sont fonctionnellement indépendantes si leurs différentielles sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes en au moins un point de V (et donc sur un ouvert Zariski-dense de V) ;
- $H_1,\dots,H_n$ sont en involution si, pour tout $i, j \in [[1, n]]$, le crochet de Poisson de H_i et H_j est nul.

Remarque 45. *En fait, les résultats de cette section sont valables dans le cadre de l'intégrabilité « non commutative » de Fomenko-Mischenko [MF78] (voir aussi [MW74 ; Bog96]) ; c'est le cadre de [2].*

Décrivons à présent la condition nécessaire à l'intégrabilité Liouvillienne dégagée dans [2].

Hypothèse 46. *On suppose qu'il existe une application rationnelle*

$$\iota : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \dashrightarrow V$$

composable avec Φ *telle que* $\det \iota^* D\Phi \neq 0$ *et qu'il existe une transformation de Moebius* ϕ *de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *d'ordre infini telles que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\Phi"] & V \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[u, dashed, "\iota"] \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}). \arrow[u, dashed, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

On définit l'« équation variationnelle discrète » de Φ le long de ι par

$$\phi Y = (\iota^* D\Phi) Y. \tag{2}$$

Notre résultat principal s'énonce de la manière suivante :

Théorème 47 ([2])**.** *Si* Φ *est intégrable au sens de Liouville alors le groupe de Galois du système (2) (relativement au corps aux différences de base des fonctions rationnelles sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *muni de* ϕ*) est virtuellement abélien*[1].

Remarque 48. *Nos méthodes ont été reprises par W. Li et S. Shi dans [LS12].*

V.3. Intégrabilité par quadratures discrètes

Passons à présent à l'intégrabilité par des *quadratures discrètes* de systèmes rationnels d'équations aux différences finies ou aux q-différences non linéaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma y_1 & = & E_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma y_m & = & E_m(t, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{array} \right. \tag{3}$$

(où σ désigne la translation $t \mapsto t+1$ ou la q-dilatation $t \mapsto qt$). On suppose que $\det \left(\frac{\partial E_i}{\partial y_j}\right)_{1 \leq i,j \leq m} \neq 0$.

Remarque 49. *Si l'on préfère, on s'intéresse à l'application rationnelle associée*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{A}^{m+1}_{\mathbb{C}} & \dashrightarrow & \mathbb{A}^{m+1}_{\mathbb{C}} \\ & (t, y_1, \ldots, y_m) & \mapsto & (\sigma(t), E_1(t, y_1, ..., y_m), \ldots, E_m(t, y_1, ..., y_m)) \end{array}.$$

C. H. Franke a introduit une notion d'extension σ-Liouvillienne et a étudié la signification galoisienne de la notion d'intégrabilité correspondante pour les systèmes aux σ-différences *linéaires.*

Définition 50 (C. H. Franke [Fra66 ; Fra74])**.** *Une extension aux différences* (K, σ) *de* $(\mathbb{C}(t), \sigma)$ *est dite* σ*-Liouvillienne s'il existe une tour d'extensions aux différences*

$$(\mathbb{C}(t), \sigma) = (K_0, \sigma) \subset (K_1, \sigma) \subset \ldots \subset (K_n, \sigma) = (K, \sigma)$$

telle que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$*, l'une des propriétés suivantes est satisfaite :*

---

1. Un groupe algébrique est dit virtuellement abélien si sa composante neutre est abélienne.

– K_i/K_{i-1} *est algébrique,*
– $\exists n_i \in \mathbb{N}$, $\exists z_i \in K_i$, $\sigma^{n_i} z_i - z_i \in K_{i-1}$ *et* $K_i = K_{i-1}(z_i, \sigma z_i \dots, \sigma^{n_i - 1} z_i)$,
– $\exists n_i \in \mathbb{N}$, $\exists z_i \in K_i$, $\frac{\sigma^{n_i} z_i}{z_i} \in K_{i-1}$ *et* $K_i = K_{i-1}(z_i, \sigma z_i \dots, \sigma^{n_i - 1} z_i)$.

Remarque 51. *Il s'agit bien entendu d'une discrétisation de la notion d'extension Liouvillienne de la théorie différentielle.*

On définit alors l'intégrabilité par des σ-quadratures de la manière suivante.

Définition 52. *Une solution* $(f_1, \dots, f_m)$ *de (3) est dite σ-Liouvillienne si ses composantes appartiennent à une extension σ-Liouvillienne de* $(\mathbb{C}(t), \sigma)$. *Le système (3) est dit intégrable par σ-quadratures s'il possède une solution σ-Liouvillienne* $(f_1, \dots, f_m)$ *telle que* $\mathbb{C}(t, f_1, \dots, f_m)$ *est σ-isomorphe à* $\mathbb{C}(t, y_1, \dots, y_m)$ *muni de la structure aux σ-différences induite par les équations (3).*

Venons-en au critère de non-intégrabilité proposé dans [7]. Nous supposons satisfaite l'Hypothèse 46 énoncée dans la section V.2 ; nous en reprenons les notations (ι, ϕ, etc). On considère l'équation variationnelle discrète associée

$$\phi Y = \iota^*(D\Phi)Y. \tag{4}$$

Théorème 53 ([7])**.** *Si (3) est intégrable par σ-quadratures alors le groupe de Galois du système (4) (relativement au corps aux différences de base des fonctions rationnelles sur* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *muni de ϕ) est virtuellement résoluble*[2].

La démonstration utilise le groupoïde de Malgrange associé à Φ. Il s'agit de prouver que le groupoïde de Φ contrôle le groupe de Galois de sa linéarisation (4). Le résultat découle ensuite du fait que le groupoïde de Φ est infinitésimalement résoluble.

V.4. Applications à des équations de Painlevé discrètes

Dans ce qui suit, q désigne un nombre complexe non nul de norme $\neq 1$.

Théorème 54 ([7])**.** *Le q-analogue suivant de l'équation de Painlevé I (qPA'_7 dans la classification de H. Sakai [Sak01]) n'est pas intégrable par σ_q-quadratures :*

$$\begin{cases} y(qx) &= \dfrac{1 - xz(x)}{xy(x)(z(x)-1)} z(x) \\[2ex] z(qx) &= \left(\dfrac{1 - xz(x)}{xy(x)(z(x)-1)}\right)^2 z(x). \end{cases}$$

La preuve donnée dans [7] est une application du Théorème 53 en prenant $\iota(t) = (t^2, q_4/t, 1/t)$ et $\phi(t) = q_2 t$ avec $q_2 = q_4^2$ où q_4 est une racine 4ème de q dans $\mathbb{C}$. L'équation variationnelle discrète correspondante est de la forme

$$Y_1(q_2 t) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ * & A(t) \end{pmatrix} Y_1(t) \text{ avec } A(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{q_2} & \frac{-2t}{q_4(1-t)} \\ \frac{-2}{q_4^3} & \frac{-3t-1}{q_2(1-t)} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

2. Un groupe algébrique est dit virtuellement résoluble si sa composante neutre est résoluble.

Afin de prouver que le groupe de Galois de (5) n'est pas virtuellement résoluble, il suffit de prouver que celui de son sous-système

$$Y(q_2 t) = A(t)Y(t) \tag{6}$$

ne l'est pas. On peut démontrer cette dernière propriété en remarquant que derrière (6) se cache l'équation q_2-hypergéométrique de paramètres $(a, b; c, d) = (1, 1; -q_2, -1)$ dont le groupe de Galois est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ suivant nos travaux dans [1].

Remarque 55. *S. Nishioka [Nis10 ; Nis11] a récemment prouvé l'irréductibilité de certaines équations de Painlevé dont qPA_7'. Notre approche de la non intégrabilité est plus systématique.*

Nous avons également montré le

Théorème 56 ([7]). *Considérons $a_0, a_1 \in \mathbb{C}^*$ tels que $a_0 a_1 \notin -q^{-\mathbb{N}}$. Le q-analogue suivant de l'équation de Painlevé III n'est pas intégrable par σ_q-quadratures :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(qx) & = & \dfrac{1}{y(x)z(x)}\dfrac{1+a_0xz(x)}{a_0x+z(x)} \\[2ex] z(q^{-1}x) & = & \dfrac{1}{y(x)z(x)}\dfrac{qa_1x^{-1}+y(x)}{1+qa_1x^{-1}y(x)}. \end{array}\right. \tag{7}$$

V.5. Perspectives

Il serait intéressant d'appliquer nos critères de non intégrabilité dans d'autres situations ; notamment à des systèmes dynamiques discrets laissant invariants des courbes elliptiques. Cela incite à étudier les équations aux différences linéaires sur les courbes elliptiques. Du point de vue galoisien, une première étape serait d'élaborer un analogue de l'algorithme de Kovacic. L'étape suivante, visant à calculer les groupes de Galois d'équations d'ordre plus élevé, pourrait être de développer des algorithmes du type de ceux récemment proposés par J.-A. Weil et A. Aparicio Monforte dans le cadre de la théorie de Morales-Ramis usuelle ; cf. [AMW11 ; AMCW].

Les propriétés de non intégrabilité des équations de Painlevé discrètes peuvent-elles se déduire de celles des équations de Painlevé classiques ? Le théorème de spécialisation d'Y. André [And01] dans le cas linéaire va dans ce sens. D'ailleurs, la question peut se poser à l'intérieur même de la famille des équations de Painlevé usuelles (via les confluences classiques des équations de Painlevé ; l'équation de Painlevé I étant la plus dégénérée de toutes).

CHAPITRE VI

Applications miroir et équations hypergéométriques généralisées

VI.1. Introduction

L'intérêt des mathématiciens pour la théorie de la symétrie miroir fut attisé par la prédiction par P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green and L. Parkes [Can+91] du nombre (dans un sens convenable) de courbes rationnelles de degré fixé sur une hypersurface quintique générique de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Leur travail met en jeu la « coordonnée canonique » donnée par

$$q(z) = \exp\left(\frac{G(z) + F(z)\log(z)}{F(z)}\right) = z\exp\left(\frac{G(z)}{F(z)}\right)$$

avec

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(5k)!}{k!^5} z^k, \qquad G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5k)!}{k!^5} \left(5H_{5k} - 5H_k\right) z^k$$

où H_n désigne le n-ième nombre harmonique. L'origine de $F(z)$ et $G(z) + F(z)\log(z)$ dans ce contexte est géométrique ; ce sont des solutions d'une équation de Picard-Fuchs, explicitement donnée par l'équation hypergéométrique généralisée

$$\Big(\delta^4 - 5z(5\delta+1)(5\delta+2)(5\delta+3)(5\delta+4)\Big)\, y = 0, \quad \delta = zd/dz.$$

Il est remarquable que les coefficients du développement de Taylor en 0 de $q(z)$ sont entiers :

$$q(z) \in \mathbb{Z}[[z]]. \tag{8}$$

Il en va donc de même de ceux de son inverse (au sens de la composition), l'« application miroir » $z(q)$.

Remarque 57. *Le lien de cette propriété d'intégralité avec les considérations géométriques mentionnées plus haut passe par l'accouplement de Yukawa $K(q)$ donné par*

$$K(q) = \frac{5}{1 - 5^2 z(q)} \frac{1}{F(z(q))^2} \left(\frac{qz'(q)}{z(q)}\right)^3 \in \mathbb{Q}[[q]].$$

Considérons son développement en série de Lambert

$$K(q) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{q^n}{1 - q^n}.$$

Puisque $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ et $z(q) \in q(1 + q\mathbb{Z}[[q]])$, on a $K(q) \in \mathbb{Z}[[q]]$ et donc les coefficients k_n sont des entiers. Ce sont ces coefficients qui ont une interprétation géométrique.

De nombreux auteurs ont cherché à étendre la propriété d'intégralité (8) à des coordonnées canoniques et des applications miroir associées à d'autres équations hypergéométriques généralisées. Introduisons la série hypergéométrique généralisée

$$F_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\boldsymbol{\alpha})_k}{(\boldsymbol{\beta})_k} z^k \in \mathbb{C}\{z\}$$

de paramètres $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Q}^n$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n) \in (\mathbb{Q} \setminus -\mathbb{N})^n$. Rappelons que, pour tout $\boldsymbol{t} = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n$, les symboles de Pochhammer $(\boldsymbol{t})_k := (t_1)_k \cdots (t_n)_k$ sont donnés par $(t_i)_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(t_i)_k = t_i(t_i+1)\cdots(t_i+k-1)$. Introduisons également la série

$$G_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\boldsymbol{\alpha})_k}{(\boldsymbol{\beta})_k} \left(\sum_{i=1}^{n} H_k(\beta_i) - \sum_{i=1}^{n} H_k(\alpha_i) \right) z^k \in z\mathbb{C}\{z\}$$

avec $H_k(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t+k}$.

Si une des coordonnées de $\boldsymbol{\beta}$ vaut 1 alors $F_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z)$ et $G_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z) + F_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z)\log(z)$ sont des solutions de l'opérateur hypergéométrique généralisé

$$\mathrm{L}_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}} = \prod_{k=1}^{n} (\delta + \beta_k - 1) - z \prod_{k=1}^{n} (\delta + \alpha_k), \qquad \delta = z\frac{d}{dz}.$$

Définition 58. *Définissons la coordonnée canonique $q_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z)$ par*

$$q_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z) = z \exp\left(\frac{G_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z)}{F_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z)} \right).$$

L'application miroir $z_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(q)$ est par définition l'inverse (pour la composition) de $q_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(z)$.

Nous identifierons ces applications à leurs développements de Taylor en 0.

Enonçons un résultat dû à C. Krattenthaler and T. Rivoal, faisant suite aux travaux de B. H. Lian et S.-T. Yau [LY96 ; LY98 ; LY03] et de W. Zudilin [Zud02] notamment, et répondant à une conjecture formulée par ce dernier.

Définition 59. *Nous dirons que $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné si, à permutation près des ses coordonnées, il est égal à la concaténation de $\varphi(m)$-uplets de la forme $\left(\frac{b}{m}\right)_{b \in [[1,m]], \gcd(b,m)=1}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ (φ désigne l'indicatrice d'Euler).*

Théorème 60 (C. Krattenthaler et T. Rivoal [KR10, §1.2, Theorem 1])**.** *Supposons que $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné et que $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_n := (1, ..., 1)$. Alors*

$$C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}^{-1} q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z) \in \mathbb{Z}[[q]] \tag{9}$$

pour une constante $C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} \in \mathbb{N}^*$ explicite[1] *telle que $F_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z) \in \mathbb{Z}[[z]]$.*

Remarque 61. *Pour tout $C \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$C^{-1} q_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(Cz) \in \mathbb{Z}[[z]] \Leftrightarrow C^{-1} z_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}(Cq) \in \mathbb{Z}[[q]].$$

1. Nous sommes volontairement peu précis au sujet de cette constante, pourtant importante, sur laquelle nous reviendrons en détail dans la section VI.3.

Mettons en exergue le fait que les travaux précédemment mentionnés s'appuient tous sur les méthodes p-adiques introduites par B. Dwork dans [Dwo69 ; Dwo73]. Nous y reviendrons dans la section VI.3.

Décrivons à présent le contenu de ce chapitre ; par soucis de clarté, nous nous limitons au cas $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{1}_n$ [2] (pour le cas général, nous renvoyons directement à [12], et aux travaux antérieurs d'E. Delaygue [Del12 ; Del11]). Dans la section VI.2 nous achevons la classification des coordonnées canoniques $q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(z)$ vérifiant une propriété d'intégralité du type (9). Dans la section VI.3, nous raffinons et complétons une partie des travaux de B. Dwork dans [Dwo69 ; Dwo73] (nous étendons notamment les résultats de B. Dwork aux « mauvais premiers ») ; nous en déduisons une nouvelle propriété d'intégralité des coordonnées canoniques $q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(z)$, sans hypothèse sur $\boldsymbol{\alpha}$.

VI.2. Coordonnées canoniques $q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(z)$ et intégralité : classification

Le résultat suivant, que nous avons obtenu dans [10], clôt la classification des coordonnées canoniques $q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(z)$, ou de façon équivalente des applications miroir $z_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(q)$, dont les coefficients de Taylor en 0 sont entiers (à renormalisation près) lorsque $n \geq 3$.

Théorème 62 ([10, Corollary 5])**.** *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{Q}\cap]0,1[)^n$ avec $n \geq 3$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $C \in \mathbb{N}^*$ tel que $C^{-1}q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(Cz) \in \mathbb{Z}[[z]]$;

(ii) $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné.

Remarque 63. *Notons qu'une condition d'intégralité plus faible (du type intégralité p-adique pour une infinité de nombres premiers dans certaines progressions arithmétiques) que celle requise par le (i) du Théorème 62 suffit ; cf. [10, Theorem 4].*

Ce résultat se traduit en termes monodromiques de la façon suivante.

Théorème 64. *Soit $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{Q}\cap]0,1[)^n$ avec $n \geq 3$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) il existe $C \in \mathbb{N}^*$ tel que $C^{-1}q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(Cz) \in \mathbb{Z}[[z]]$;

(ii) le groupe de monodromie de $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Compte tenu du Théorème 62, il s'agit de vérifier que $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{Q}\cap]0,1[)^n$ et $\boldsymbol{\beta} \in (\mathbb{Q}\cap]0,1[)^n$ sont R-partitionnés si et seulement si le groupe de monodromie Γ de l'opérateur hypergéométrique généralisé $\mathrm{L}_{\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{\beta}}$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

2. La littérature parle du cas MUM en 0, c'est-à-dire à Monodromie Unipotente Maximale en 0.

D'après un théorème de Levelt [BH89, Theorem 3.5], Γ est engendré (relativement à une base de solutions convenable) par

$$M_0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -A_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -A_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & A_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_\infty := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -B_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -B_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & B_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $X^n+A_{n-1}X^{n-1}+\cdots+A_0 = \prod_{k=1}^n(X-e^{2\pi i\alpha_k})$ et $X^n+B_{n-1}X^{n-1}+\cdots+B_0 = \prod_{k=1}^n(X-e^{2\pi i\beta_k})$.

Si Γ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors les polynômes caractéristiques $\chi_{M_0} = \prod_{k=1}^n(X-e^{2\pi i\alpha_k})$ de M_0 et $\chi_{M_\infty} = \prod_{k=1}^n(X-e^{2\pi i\beta_k})$ de M_∞ sont à coefficients dans $\mathbb{Q}$; ce sont donc des produits de polynômes cyclotomiques, ce qui revient à dire que $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont R-partitionnés.

Réciproquement, si $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont R-partitionnés alors χ_{M_0} et χ_{M_∞} sont des produits de polynômes cyclotomiques. Ainsi les coefficients $A_0,\dots,A_{n-1}$ et $B_0,\dots,B_{n-1}$ sont entiers et $A_0, B_0 \in \{\pm 1\}$ et donc M_0 et M_∞ sont des éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. $\square$

Les ingrédients principaux de la démonstration du Théorème 62 sont :

- Le lemme de Dieudonné-Dwork ;
- Les travaux de B. Dwork [Dwo69 ; Dwo73] ;
- La théorie de Galois différentielle, et l'étude détaillée des équations hypergéométriques généralisées par F. Beukers et G. Heckman [BH89] puis par N. M. Katz [Kat90] (l'utilisation de la théorie de Galois différentielle suit une suggestion de F. Beukers).

Les théorèmes précédents sont faux pour $n = 2$. Nous avons étudié en détail ce cas dans [9] ; le résultat principal est :

Théorème 65 ([9, Theorem 3 et Section 4.2])**.** *Considérons $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}^2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) il existe $C \in \mathbb{N}^*$ tel que $C^{-1}q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_2}(Cz) \in \mathbb{Z}[[z]]$;
(ii) quitte à permutter les coordonnées de $\boldsymbol{\alpha}$, on a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} \in \{&(1/2,1/2),(1/2,1/3),(1/2,2/3),(1/2,1/4),(1/2,3/4),\\ &(1/2,1/6),(1/2,5/6),(1/3,1/3),(1/3,2/3),(1/3,1/6),(1/3,5/6),\\ &(2/3,2/3),(2/3,1/6),(2/3,5/6),(1/4,1/4),(1/4,3/4),(3/4,3/4),\\ &(1/6,1/6),(1/6,5/6),(5/6,5/6),(1/8,3/8),(1/8,5/8),(3/8,7/8),\\ &\quad(5/8,7/8),(1/12,5/12),(1/12,7/12),(5/12,11/12),(7/12,11/12)\}.\end{aligned}$$

Ces cas sont d'origine modulaire.

VI.3. Congruences hypergéométriques et applications

Le point de départ du travail présenté dans cette section fut la recherche d'une propriété d'intégralité des coordonnées canoniques au-delà du cas R-partitionné ; nous y reviendrons en fin de section.

Considérons à nouveau $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{Q} \cap]0,1[)^n$. Notons $d_i \in \mathbb{N}^*$ le dénominateur de α_i et $d = \mathrm{ppcm}(d_1, ..., d_n)$.

Nous avons déjà signalé que la plupart des démonstrations des résultats d'intégralité des applications miroir $z_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(q)$ sont basées sur les méthodes p-adiques de B. Dwork [Dwo69 ; Dwo73]. Leur point de départ est le lemme de Dieudonné-Dwork selon lequel, pour tout nombre premier p, la propriété

$$C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}^{-1} q_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z) = z \exp\left(\frac{G_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)}{F_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)}\right) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

est équivalente à

$$\frac{G_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)}{F_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)} - p\frac{G_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)}{F_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)} \in p\mathbb{Z}_p[[z]]. \tag{10}$$

Lorsque $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné et que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_p^n$, la propriété (10) est un cas particulier du [Dwo73, Theorem 4.1] dû à B. Dwork. La nouveauté du Théorème 60 obtenu par C. Krattenthaler et T. Rivoal est donc l'extension de cette propriété, lorsque $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné, aux premiers p tels que $\boldsymbol{\alpha} \notin \mathbb{Z}_p^n$.

Dans [12], nous avons étendu ces congruences au-delà du cas R-partitionné, en collaboration avec E. Delaygue et T. Rivoal. Il faut en premier lieu définir la constante $C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}$ en toute généralité.

Définition 66 ([12])**.** *On définit la constante $C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}$ par*

$$C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} := \min\{C \in \mathbb{N}^* \mid F_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(Cz) \in \mathbb{Z}[[z]]\}.$$

Théorème 67 ([12])**.** *On a*

$$C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} d_i\right)\left(\prod_{p \mid d} p^{-\left\lfloor \frac{\lambda_p(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{1}_n)}{p-1} \right\rfloor}\right)$$

où $\lambda(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{1}_n) = \sharp\{1 \leq i \leq n \mid \alpha_i \in \mathbb{Z}_p\} - n$.

Remarque 68. *Lorsque $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné, on retrouve la constante $C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}$ intervenant dans l'énoncé du Théorème 60.*

Afin d'énoncer notre résultat principal, nous introduisons quelques notations.

Soient p un nombre premier, ν la valuation p-adique de d et $D := dp^{-\nu} \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \{1, ..., d\}$ premier avec d, on note $t^{(1)}$ l'unique élément de $\{1, ..., d\}$ relativement premier à d tel que

$$t^{(1)} \equiv t \mod p^\nu \text{ et } pt^{(1)} \equiv t \mod D.$$

Soit $b \in \{1, ..., D\}$ relativement premier à D. Introduisons l'ensemble

$$\Omega_b = \{t \in \{1, ..., d\} \mid \gcd(t, d) = 1 \text{ et } t \equiv b \mod D\},$$

ainsi que les $\mathbb{Z}_p$-algèbres

$$\mathcal{A}_b = \{f : \Omega_b \to \mathbb{Z}_p \mid \forall m \geq 0, \forall t_1, t_2 \in \Omega_b,$$
$$(t_1 \equiv t_2 \mod p^m \Rightarrow f(t_1) \equiv f(t_2) \mod p^m\mathbb{Z}_p)\}$$

et

$$\mathcal{A}_b^* = \{f : \Omega_b \to \mathbb{Z}_p \mid \forall m \geq 0, \forall t_1, t_2 \in \Omega_b,$$
$$(t_1 \equiv t_2 \mod p^m \Rightarrow f(t_1) \equiv f(t_2) \mod p^{m-1}\mathbb{Z}_p)\}.$$

Nous noterons $\{x\}$ la partie factionnaire de $x \in \mathbb{R}$ et, pour $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, nous noterons $\{\boldsymbol{x}\} = (\{x_1\}, ..., \{x_n\})$.

Théorème 69 ([12])**.** *Il existe une suite $(R_{k,b})_{k\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}_b^*$ telle que, pour tout $t \in \Omega_b$,*

$$\frac{G_{\left\{t^{(1)}\boldsymbol{\alpha}\right\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)}{F_{\left\{t^{(1)}\boldsymbol{\alpha}\right\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)} - p\frac{G_{\{t\boldsymbol{\alpha}\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)}{F_{\{t\boldsymbol{\alpha}\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)} = p\sum_{k=0}^{\infty} R_{k,b}(t) z^k. \tag{11}$$

De plus, si p divise d alors $R_{k,b} \in p^{-1-\lfloor\lambda(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{1}_n)/(p-1)\rfloor}\mathcal{A}_b$ (notons que $\lambda(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{1}_n) \leq -1$ si bien que $p^{-1-\lfloor\lambda(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{1}_n)/(p-1)\rfloor}\mathcal{A}_b \subset \mathcal{A}_b$).

La démonstration de ce résultat est trop longue et technique pour être abordée dans ce mémoire ; donnons plutôt quelques conséquences du Théorème 69.

Notons que si $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné alors $\left\{t^{(1)}\boldsymbol{\alpha}\right\}$, $\{t\boldsymbol{\alpha}\}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ coïncident à permutation de leurs coordonnées près ; on déduit donc du Théorème 69 le

Corollaire 70. *Si $\boldsymbol{\alpha}$ est R-partitionné alors*

$$\frac{G_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)}{F_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)} - p\frac{G_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)}{F_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)} \in p\mathbb{Z}_p[[z]].$$

On retrouve ainsi le résultat principal de C. Krattenthaler and T. Rivoal [KR10, §1.2, Theorem 1] déjà mentionné.

Plus généralement, on a le

Corollaire 71. *Pour tout $t \in \{1, ..., d\}$ premier avec d, nous avons*

$$\frac{G_{\left\{t^{(1)}\boldsymbol{\alpha}\right\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)}{F_{\left\{t^{(1)}\boldsymbol{\alpha}\right\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z^p)} - p\frac{G_{\{t\boldsymbol{\alpha}\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)}{F_{\{t\boldsymbol{\alpha}\};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z)} \in p\mathbb{Z}_p[[z]] \tag{12}$$

Ce résultat complète ceux de B. Dwork [Dwo69 ; Dwo73], qui a traité le cas $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_p^n$.

En guise de dernier corollaire, nous donnons la nouvelle propriété d'intégralité des applications miroir évoquée en début de section. Nous introduisons

$$\tilde{q}_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(z) = z\left(\prod_{\substack{1\leq r\leq d\\ \mathrm{pgcd}(r,d)=1}} z^{-1} q_{\{r\boldsymbol{\alpha}\};\mathbf{1}_n}(z)\right)^{1/d^*}$$

où $d^* = d\prod_{p|d} p^{-2-\left\lfloor\frac{\lambda_p(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{1}_n)}{p-1}\right\rfloor} \in \mathbb{N}^*$. Le Théorème 69 combiné au lemme de Dieudonné-Dwork implique :

Corollaire 72 ([12])**.** *Pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{Q} \cap]0,1[)^n$, on a*

$$C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}^{-1}\tilde{q}_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n}(C_{\boldsymbol{\alpha};\mathbf{1}_n} z) \in \mathbb{Z}[[z]].$$

VI.4. Perspectives

De nombreuses questions arithmétiques se posent naturellement. Considérons par exemple $y(z) \in z\mathbb{Q}[[z]]$ solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$ telle que $e^{y(z)} \in \mathbb{Z}[[z]]$. Que peut-on dire de l'opérateur différentiel minimal L de $y(z)$? Cette question s'inspire naturellement de la théorie des G- et E-fonctions (ou plus généralement des séries Gevrey arithmétiques d'Y. André). Notons que si $y(z)$ a un rayon de convergence non nul alors L est un G-opérateur (prendre la dérivée logarithmique de $e^{y(z)}$).

Même question en remplaçant $y(z)$ par un quotient de solutions (compte-tenu de la nature projective de la question, on peut au mieux s'attendre à des propriétés de régularité d'un certain $L \otimes s$).

Nous nous sommes intéressés au quotient des « deux premières » solutions des équations hypergéométriques généralisées ; que peut-on dire des autres ?

Nous avons rencontré des coefficients de Taylor entiers. Ont-ils une interprétation combinatoire, géométrique ?

Enfin, y a-t-il un lien entre intégralité et modularité (dans un sens convenable) lorsque $n > 3$?

CHAPITRE VII

Modularité et convergence de la série $\Phi(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin(2\pi m^2\alpha)\cot(\pi m\alpha)$

VII.1. Introduction

Ce chapitre est un rapport concis de mon travail [8] en collaboration avec T. Rivoal au sujet de la série

$$\Phi(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sin(2\pi m^2\alpha)\cot(\pi m\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{13}$$

(dont le terme général doit être compris comme l'évaluation en α de la fonction entière $\sin(2\pi m^2 z)\cot(\pi m z)/m^2$). Cette série est une brique de base dans l'étude de la répartition des parties fractionnaires $(\{k\alpha\})_{k\in\mathbb{N}}$ entreprise dans [Riv11] [1].

La question de la *convergence* de $\Phi(\alpha)$ est à l'origine de notre travail ; nous partions des faits suivants :

i) $\Phi(\alpha)$ diverge pour tout rationnel $\alpha \in]0,1[$;

ii) $\Phi(\alpha)$ converge absolument si $\alpha \in]0,1[$ est un irrationnel vérifiant la condition de Brjuno, dont on rappelle la définition :

Définition 73. *Soit α un nombre réel irrationnel dont on note par $q_j \in \mathbb{N}^*$ le dénominateur de la j-ème réduite. On dit que α vérifie la condition de Brjuno si*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\log(q_{j+1})}{q_j} < \infty. \tag{14}$$

Seuls les nombres de Liouville sont susceptibles de ne pas jouir de la condition de Brjuno, qui est donc une condition presque sûre.

La démonstration de i) est donnée dans [8], celle de ii) l'est dans [Riv11] [2] (et repose sur l'inégalité $|\sin(2\pi m^2\alpha)\cot(\pi m\alpha)| \ll \frac{||m^2\alpha||}{||m\alpha||}$, où $||\cdot||$ désigne la fonction « distance à $\mathbb{Z}$ », jointe à des estimations des sommes $\sum_{m=1}^{N} \frac{||m^2\alpha||}{m^2||m\alpha||}$ en

1. La série intervenant dans [Riv11] est en fait celle de terme général $\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\cos(2\pi k m\alpha)$. Son lien avec $\Phi(\alpha)$ est donné par

$$\frac{1}{m^2}\sum_{k=1}^{m}\cos(2\pi k m\alpha) = \frac{\sin(2\pi m^2\alpha)\cot(\pi m\alpha)}{2m^2} - \frac{\sin(\pi m^2\alpha)^2}{m^2}.$$

Tout résultat de convergence pour l'une vaut donc pour l'autre.

2. Dans [Riv10] la condition de convergence absolue est énoncée de la manière suivante : $\sum_j \frac{\log(\max(q_{j+1}/q_j, q_j))}{q_j} < \infty$. Elle est en fait équivalente à celle de Brujno ; cela résulte de l'encadrement $q_{j+1}/q_j \leq \max(q_{j+1}/q_j, q_j) \leq 2q_{j+1}$ et du fait que $\sum_j \log(q_j)/q_j$ converge.

fonction du développement en fraction continue de α inspirées par les travaux de A. H. Kruse [Kru66] ; voir aussi [Riv10]).

Reste la question suivante : quelle est la nature de $\Phi(\alpha)$ pour des irrationnels α ne satisfaisant pas la condition de Brujno ? Nous avons apporté une réponse complète à cette question dans [8]. Notre solution passe par une propriété de *quasi-modularité* de Φ, qui présente un intérêt en soi et qui est à rapprocher de l'idée sous-jacente aux quantum modular forms de D. Zagier [Zag10].

VII.2. Quasi-modularité de Φ

Nous allons formaliser l'idée que Φ possède la propriété de quasi-modularité suivante (énoncée en termes des générateurs classiques du groupe modulaire) : « les fonctions $\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha+1)$ et $\Phi(\alpha) - \alpha\Phi(-1/\alpha)$ se comportent mieux que $\Phi(\alpha)$ ». La première propriété est évidente compte tenu de la 1-périodicité de $\Phi(\alpha)$. Attardons-nous sur la seconde.

Considérons la suite de fonctions $(\Omega_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{N\geq 0}$ définie par

$$\Omega_N(\alpha) = \Phi_N(\alpha) - \alpha\Phi_{\lfloor \alpha N\rfloor}(-1/\alpha)$$

où

$$\Phi_k(\alpha) = \sum_{m=1}^{k} \frac{\sin(2\pi m^2\alpha)\cot(\pi m\alpha)}{m^2}$$

est la k-ème somme partielle de $\Phi(\alpha)$. Nous avons noté $\lfloor\cdot\rfloor$ la fonction « partie entière ».

La propriété ii) énoncée dans la section VII.1 montre que $(\Omega_N)_{N\geq 0}$ converge simplement sur un sous-ensemble de mesure pleine de $]0,1]$, mais rien n'indique *a priori* sa convergence sur $]0,1]$ tout entier (rappelons que $\Phi(\alpha)$ diverge si α est rationnel). La propriété de quasi-modularité suivante est donc remarquable :

Théorème 74 ([8, Theorem 1])**.** *La suite de fonctions $(\Omega_N)_{N\geq 0}$ converge simplement sur $]0,1]$; on note Ω sa limite. Plus précisément,*

$$\Omega_N(\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha}\sum_{m=1}^{N}\frac{\sin(2\pi m^2\alpha)}{m^3} + G_N(\alpha) \tag{15}$$

où $(G_N)_{N\geq 0}$ a une limite simple G sur $[0,1]$ et $|G_N(\alpha)|$ est borné par une constante absolue (i.e. indépendante de $\alpha \in [0,1]$ et de $N \geq 1$).

La démonstration de ce résultat repose sur une expression alternative de $\Omega_N(\alpha)$ et conduit à des « formules explicites » pour $G(\alpha)$ and $\Omega(\alpha)$, mais leur étude est difficile. Nous conjecturons la propriété suivante :

Conjecture 75 ([8, Conjecture 1])**.** *La fonction G est continue sur $[0,1]$.*

Ainsi Ω est plus régulière que Φ : c'est la philosophie des quantum modular forms de D. Zagier [Zag10]. Pour d'autres phénomènes de quasi-modularité, nous invitons le lecteur à consulter [BD+05 ; BM10 ; BC ; Riv12 ; Zag10].

VII.3. Convergence de Φ et condition de Brjuno

Nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème 76 ([8, Theorem 2]). *Pour $\alpha \in]0,1[$, la série $\Phi(\alpha)$ converge si et seulement si α est un irrationnel vérifiant la condition de Brjuno. De plus, si $\Phi(\alpha)$ converge alors on a*

$$\Phi(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha T(\alpha) \cdots T^{j-1}(\alpha) \Omega(T^j(\alpha)) \tag{16}$$

où T désigne l'application de Gauss définie par $T(\alpha) = \{1/\alpha\}$.

Indiquons succinctement la façon dont intervient le Théorème 74 dans la preuve du Théorème 76. Par définition de Ω_N, on a :

$$\Phi_N(\alpha) \quad = \quad \alpha \Phi_{\lfloor \alpha N \rfloor}(T(\alpha)) + \Omega_N(\alpha). \tag{17}$$

En itérant cette égalité, on obtient

$$\Phi_N(\alpha) \quad = \quad \sum_{j=0}^{\ell_N(\alpha)} \alpha T(\alpha) \cdots T^{j-1}(\alpha) \Omega_{\lfloor \cdots \lfloor \lfloor N\alpha \rfloor T(\alpha) \rfloor \cdots T^{j-1}(\alpha) \rfloor}(T^j(\alpha)) \tag{18}$$

où l'entier $\ell_N(\alpha)$ est défini par

$$\ell_N(\alpha) = \min\{j \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \cdots \lfloor \lfloor N\alpha \rfloor T(\alpha) \rfloor \cdots T^j(\alpha) \right\rfloor = 0\}$$

(par convention, $\alpha T(\alpha) \cdots T^{j-1}(\alpha) = 1$ et $\lfloor \cdots \lfloor \lfloor N\alpha \rfloor T(\alpha) \rfloor \cdots T^{j-1}(\alpha) \rfloor = N$ lorsque $j = 0$). La démonstration du Théorème 76, basée sur l'égalité (18) et sur le Théorème 74, étant très technique, nous n'en dirons pas plus et renvoyons à [8] pour les détails.

Mentionnons enfin le

Corollaire 77 ([8, Corollary 1]). *La série $\Phi(\alpha)$ converge si et seulement si elle converge absolument.*

VII.4. Perspectives

Notons $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré constitué des nombres complexes de partie imaginaire > 0. Les intégrales de Mordell données, pour $z \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathcal{H}$, par

$$h(z, \tau) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pi i \tau x^2 - 2\pi z x}}{\cosh \pi x} dx$$

entretiennent un lien étroit avec les sommes de Lerch données, pour $\tau \in \mathcal{H}$, $u \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}))$ et $v \in \mathbb{C}$, par

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{\pi i (n^2+n)\tau + 2\pi i n v}}{1 - e^{2\pi i n \tau + 2\pi i u}}.$$

En effet, notons $\vartheta(z;\tau)$ la fonction thêta de Jacobi définie, pour $z \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathcal{H}$, par

$$\vartheta(z;\tau) = \sum_{\nu \in 1/2 + \mathbb{Z}} e^{\pi i \nu^2 \tau + 2\pi i \nu (z + 1/2)}$$

et introduisons la fonction $\mu(u,v;\tau)$ définie, pour $u,v\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z})$ et $\tau\in\mathcal{H}$, par

$$\mu(u,v;\tau)=\frac{e^{\pi iu}}{\vartheta(v,\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n e^{\pi i(n^2+n)\tau+2\pi inv}}{1-e^{2\pi in\tau+2\pi iu}}.$$

Alors, on a

$$\frac{1}{\sqrt{-i\tau}}e^{\pi i(u-v)^2/\tau}\mu(u/\tau,v/\tau;-1/\tau)+\mu(u,v;\tau)=\frac{1}{2i}h(u-v;\tau);$$

voir [Mor20 ; Mor33 ; Zwe02]. Or $\Phi(\alpha)$ s'exprime formellement comme une combinaison linéaire des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{e^{2\pi i(\pm n^2\pm n)\alpha}}{1-e^{2\pi in\alpha}}.$$

Les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(\pm n^2\pm n)\alpha}}{1-e^{2\pi in\alpha}}.$$

(ou des combinaisons linéaires de celles-ci) font penser à de « fausses sommes de Lerch » par analogie avec les « fausses fonctions thêta ». Ces séries possèdent-elles d'intéressantes propriétés, notamment modulaires ? Sont-elles liées à des variantes des intégrales de Mordell ?

Passons à un problème concernant le développement en série de Fourier formel de $\Phi(\alpha)$; celui-ci est donné par

$$S(\Phi)(\alpha)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\phi_n}{n^2}\cos(2\pi n\alpha)$$

où

$$\phi_n=\sum_{\substack{d|n\\1\le d\le\sqrt{n}}}d^2-\frac{n}{2}\quad\text{si } n \text{ est un carré,}\qquad \phi_n=\sum_{\substack{d|n\\1\le d\le\sqrt{n}}}d^2\quad\text{sinon.}$$

Dans l'esprit des problèmes « de type Davenport » (cf. [BT04 ; Mar07]), il est naturel d'étudier la convergence de $S(\Phi)(\alpha)$ [3] et de la comparer à $\Phi(\alpha)$. Il est prouvé dans [Riv11] que $S(\Phi)(\alpha)$ et $\Phi(\alpha)$ convergent et coïncident si $\sum_{j=0}^{\infty}q_{j+1}/q_j^2<\infty$, ce qui est une condition presque sûre mais plus forte que celle de Brjuno.

Mentionnons que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi m^2\alpha)\cot(\pi m\alpha)}{m^s}$$

pour $s\in]1,2[$ est en cours d'étude par I. Petrykiewicz.

On peut également s'intéresser à des séries entières dont le comportement dépend de la nature diophantienne d'un paramètre réel α. Il est par exemple

3. Puisque $\Phi\in L^2(0,1)$, $S(\Phi)$ converge vers Φ presque partout d'après le théorème de Carleson.

possible de donner une expression alternative de la série entière (liée aux polylogarithmes)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cot(\pi m\alpha)\frac{z^m}{m^s} \tag{19}$$

en termes du développement en fraction continue de α, ceci pour tout $z \geq 0$ à l'intérieur du disque de convergence de (19) ; c'est un travail en commun avec T. Rivoal inspiré par [Riv12 ; 8]. Cela peut-il être exploité pour étudier le comportement de (19) lorsque $z > 0$ tend vers le bord du disque de convergence ?

CHAPITRE VIII

Bibliographie

Travaux présentés

[1] J. Roques. "Galois groups of the basic hypergeometric equations". Dans : *Pacific J. Math.* 235.2 (2008), p. 303–322.

[2] G. Casale et J. Roques. "Dynamics of rational symplectic mappings and difference Galois theory". Dans : *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), Art. ID rnn 103, 23.

[3] J. Roques. "On the Galois groups of families of regular singular difference systems". Dans : *Séminaires et Congrès* 23 (2011), p. 367–383.

[4] J. Roques. "Generalized basic hypergeometric equations". Dans : *Invent. Math.* 184.3 (2011), p. 499–528.

[5] J. Roques. "A note on p-curvatures". Dans : *Manuscripta Math.* 140.1 (2013), p. 115–118.

[6] J. Roques. "On classical irregular q-difference equations". Dans : *Compositio Math.* 148.5 (2012), p. 1624–1644.

[7] G. Casale et J. Roques. "Nonintegrability by discrete quadratures". Dans : *J. reine angew. Math.* (A paraître).

[8] T. Rivoal et J. Roques. "Convergence and modular type properties of a twisted Riemann series". Dans : *Unif. Distrib. Theory* (A paraître).

[9] J. Roques. "Arithmetic properties of mirror maps associated with Gauss hypergeometric equations". Dans : *Monatshefte für Math.* (A paraître).

[10] J. Roques. "On generalized hypergeometric equations and mirror maps". Dans : *Proc. Amer. Math. Soc.* (A paraître).

[11] J. Roques. "Birkhoff matrices, residues and rigidity for q-difference equations". Dans : *J. reine angew. Math.* (A paraître).

[12] E. Delaygue, T. Rivoal et J. Roques. "Integrality of the Taylor coefficients of hypergeometric functions and of their associated mirror maps". Prépublication.

Références

[AMCW] A. Aparicio Monforte, E. Compoint et J.-A. Weil. "A Characterization of Reduced Forms of Linear Differential Systems". arXiv:1206.6661.

[AMW11] A. Aparicio Monforte et J.-A. Weil. “A reduction method for higher order variational equations of Hamiltonian systems”. Dans : *Symmetries and related topics in differential and difference equations.* T. 549. Contemp. Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2011, p. 1–15.

[And01] Y. André. “Différentielles non commutatives et théorie de Galois différentielle ou aux différences”. Dans : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 34.5 (2001), p. 685–739.

[And04] Y. André. “Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz et un problème de Dwork”. Dans : *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II.* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 55–112.

[And09] Y. André. “Slope filtrations”. Dans : *Confluentes Math.* 1.1 (2009), p. 1–85.

[Ari10] D. Arinkin. “Rigid irregular connections on $\mathbb{P}^1$”. Dans : *Compositio Math.* 146 (2010), p. 1323—1338.

[Bai+96] A. Baider et al. “On the infinitesimal geometry of integrable systems”. Dans : *Mechanics day (Waterloo, ON, 1992).* T. 7. Fields Inst. Commun. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1996, p. 5–56.

[BBH88] F. Beukers, W. D. Brownawell et G. Heckman. “Siegel normality”. Dans : *Ann. of Math. (2)* 127.2 (1988), p. 279–308.

[BC] S. Bettin et B. Conrey. “Period functions and cotangent sums”. arXiv:1111.0931.

[BD+05] L. Báez-Duarte et al. “Étude de l’autocorrélation multiplicative de la fonction ‘partie fractionnaire”’. Dans : *Ramanujan J.* 9.1-2 (2005), p. 215–240.

[BE04] S. Bloch et H. Esnault. “Local Fourier transforms and rigidity for D-modules”. Dans : *Asian Journal of Mathematics* 8.4 (2004), p. 587–606.

[Beu07] F. Beukers. “Gauss’ hypergeometric function”. Dans : *Arithmetic and geometry around hypergeometric functions.* T. 260. Progr. Math. Basel : Birkhäuser, 2007, p. 23–42.

[Beu10] F. Beukers. “Algebraic A-hypergeometric functions”. Dans : *Invent. Math.* 180.3 (2010), p. 589–610.

[BH89] F. Beukers et G. Heckman. “Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$”. Dans : *Invent. Math.* 95.2 (1989), p. 325–354.

[Bir13] G. D. Birkhoff. “The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations”. Dans : *Proc. Amer. Acad.* 49 (1913), p. 521–568.

[Bir66] G. D. Birkhoff. *Dynamical systems.* With an addendum by Jurgen Moser. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. IX. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1966, p. xii+305.

[BM10] M. Balazard et B. Martin. “Comportement local moyen de la fonction de Brjuno”. Dans : *preprint* (2010).

[Bog96] O. I. Bogoyavlenskij. “A concept of integrability of dynamical systems”. Dans : *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* 18.4 (1996), p. 163–168.

[Bos01] Jean-Benoît Bost. “Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields”. Dans : *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 93 (2001), p. 161–221.

[BT04] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. “Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques”. Dans : *J. Anal. Math.* 92 (2004), p. 1–79.

[BV99] M. P. Bellon et C.-M. Viallet. “Algebraic entropy”. Dans : *Comm. Math. Phys.* 204.2 (1999), p. 425–437.

[Can+91] P. Candelas et al. “A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory”. Dans : *Nuclear Phys. B* 359.1 (1991), p. 21–74.

[CC85a] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky. “Applications of Padé approximations to the Grothendieck conjecture on linear differential equations”. Dans : *Number theory (New York, 1983–84)*. T. 1135. Lecture Notes in Math. Berlin : Springer, 1985, p. 52–100.

[CC85b] D. V. Chudnovsky et G. V. Chudnovsky. “The Grothendieck conjecture and Padé approximations”. Dans : *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 61.3 (1985), p. 87–90.

[CR91] R. C. Churchill et D. L. Rod. “On the determination of Ziglin monodromy groups”. Dans : *SIAM J. Math. Anal.* 22.6 (1991), p. 1790–1802.

[CRS95] R. C. Churchill, D. L. Rod et M. F. Singer. “Group-theoretic obstructions to integrability”. Dans : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 15.1 (1995), p. 15–48.

[Del11] E. Delaygue. “Intégralité des coefficients de Taylor de racines d'applications miroir”. Dans : *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* (2011).

[Del12] E. Delaygue. “Critère pour l'intégralité des coefficients de Taylor des applications miroir”. Dans : *J. Reine Angew. Math.* 662 (2012), p. 205–252.

[DF01] J. Diller et C. Favre. “Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces”. Dans : *Amer. J. Math.* 123.6 (2001), p. 1135–1169.

[DM89] A. Duval et C. Mitschi. “Matrices de Stokes et groupe de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées”. Dans : *Pacific J. Math.* 138.1 (1989), p. 25–56.

[DR00] M. Detweiller et S. Reiter. “An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem”. Dans : *Journal of Symb. Comp.* 30.6 (2000), p. 761–798.

[DR08] A. Duval et J. Roques. “Familles fuchsiennes d’équations aux (q-)différences et confluence”. Dans : *Bull. Soc. Math. France* 136.1 (2008), p. 67–96.

[Duv03] A. Duval. “Séries de q-factorielles, opérateurs aux q-différences et confluence”. Dans : *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 12.3 (2003), p. 335–374.

[Duv04] A. Duval. “Confluence q-différence vers différence pour un système fuchsien”. Dans : *Pacific J. Math.* 217.2 (2004), p. 221–245.

[DV02] L. Di Vizio. “Arithmetic theory of q-difference equations: the q-analogue of Grothendieck-Katz’s conjecture on p-curvatures”. Dans : *Invent. Math.* 150.3 (2002), p. 517–578.

[DV09] L. Di Vizio. “Local analytic classification of q-difference equations with $|q| = 1$”. Dans : *J. Noncommut. Geom.* 3.1 (2009), p. 125–149.

[DVZ09] L. Di Vizio et C. Zhang. “On q-summation and confluence”. Dans : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 59.1 (2009), p. 347–392.

[Dwo69] B. Dwork. “p-adic cycles”. Dans : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 37 (1969), p. 27–115.

[Dwo73] B. Dwork. “On p-adic differential equations. IV. Generalized hypergeometric functions as p-adic analytic functions in one variable”. Dans : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 6 (1973), p. 295–315.

[Eti95] P. I. Etingof. “Galois groups and connection matrices of q-difference equations”. Dans : *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 1.1 (1995), 1–9 (electronic).

[Fra66] C. H. Franke. “Solvability of linear homogeneous difference equations by elementary operations”. Dans : *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966), p. 240–246.

[Fra74] C. H. Franke. “A characterization of linear difference equations which are solvable by elementary operations”. Dans : *Aequationes Math.* 10 (1974), p. 97–104.

[Gou36] É. Goursat. Cambridge Paris : Hermann, 1936.

[GR00] B. Grammaticos et A. Ramani. “The hunting for the discrete Painlevé equations”. Dans : *Regul. Chaotic Dyn.* 5.1 (2000). Sophia Kovalevskaya to the 150th anniversary, p. 53–66.

[GR04a] G. Gasper et M. Rahman. *Basic hypergeometric series.* Second. T. 96. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. With a foreword by Richard Askey. Cambridge : Cambridge University Press, 2004, p. xxvi+428. isbn : 0-521-83357-4.

[GR04b] B. Grammaticos et A. Ramani. “Discrete Painlevé equations: a review”. Dans : *Discrete integrable systems.* T. 644. Lecture Notes in Phys. Berlin : Springer, 2004, p. 245–321.

[Hei46] E. Heine. “Über die reihe $1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\cdots$”. Dans : *J. Reine Angew. Math.* 32 (1846), p. 210–212.

[Hen97] P. A. Hendriks. “An algorithm for computing a standard form for second-order linear q-difference equations”. Dans : *J. Pure Appl. Algebra* 117/118 (1997). Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996), p. 331–352.

[HK07] R. G. Halburd et R. J. Korhonen. “Meromorphic solutions of difference equations, integrability and the discrete Painlevé equations”. Dans : *J. Phys. A* 40.6 (2007), R1–R38.

[HS08] C. Hardouin et M. F. Singer. “Differential Galois theory of linear difference equations”. Dans : *Math. Ann.* 342.2 (2008), p. 333–377.

[Kat72] N. M. Katz. “Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration)”. Dans : *Invent. Math.* 18 (1972), p. 1–118.

[Kat82] N. M. Katz. “A conjecture in the arithmetic theory of differential equations”. Dans : *Bull. Soc. Math. France* 110.2 (1982), p. 203–239.

[Kat87] N. M. Katz. “On the calculation of some differential Galois groups”. Dans : *Invent. Math.* 87.1 (1987), p. 13–61.

[Kat90] N. M. Katz. *Exponential sums and differential equations*. T. 124. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1990, p. xii+430.

[Kat96] N. M. Katz. *Rigid local systems*. T. 139. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1996, p. viii+223. isbn : 0-691-01118-4.

[Kos58] B. Kostant. “A characterization of the classical groups”. Dans : *Duke Math. J.* 25 (1958), p. 107–123.

[Kow89] S. Kowalevski. “Sur le probleme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe”. Dans : *Acta Math.* 12.1 (1889), p. 177–232.

[KP87] N. M. Katz et R. Pink. “A note on pseudo-CM representations and differential Galois groups”. Dans : *Duke Math. J.* 54.1 (1987), p. 57–65.

[KR10] C. Krattenthaler et T. Rivoal. “On the integrality of the Taylor coefficients of mirror maps”. Dans : *Duke Math. J.* 151.2 (2010), p. 175–218.

[Kru66] A. H. Kruse. “Estimates of $\sum_{k=1}^{N} k^{-s} \langle kx \rangle^{-t}$”. Dans : *Acta Arith* 12 (1966/1967), p. 229–261.

[LS12] W. Li et S. Shi. “Galoisian obstruction to the integrability of general dynamical systems”. Dans : *J. Differential Equations* 252.10 (2012), p. 5518–5534.

[LY03] B. H. Lian et S.-T. Yau. “The nth root of the mirror map”. Dans : *Calabi-Yau varieties and mirror symmetry (Toronto, ON, 2001)*. T. 38. Fields Inst. Commun. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2003, p. 195–199.

[LY96] B. H. Lian et S.-T. Yau. “Arithmetic properties of mirror map and quantum coupling”. Dans : *Comm. Math. Phys.* 176.1 (1996), p. 163–191.

[LY98] B. H. Lian et S.-T. Yau. “Integrality of certain exponential series”. Dans : *Algebra and geometry (Taipei, 1995).* T. 2. Lect. Algebra Geom. Int. Press, Cambridge, MA, 1998, p. 215–227.

[Mar07] B. Martin. “Nouvelles identités de Davenport”. Dans : *Funct. Approx. Comment. Math.* 37.part 2 (2007), p. 293–327.

[MF78] A. S. Miščenko et A. T. Fomenko. “A generalized Liouville method for the integration of Hamiltonian systems”. Dans : *Funkcional. Anal. i Priložen.* 12.2 (1978). Traduction anglaise : Functional Anal. Appl. 12 (1978), no. 2, 113?121, p. 46–56, 96.

[Mit96] C. Mitschi. “Differential Galois groups of confluent generalized hypergeometric equations: an approach using Stokes multipliers”. Dans : *Pacific J. Math.* 176.2 (1996), p. 365–405.

[Mor20] L. J. Mordell. “The value of the definite integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at^2+bt}}{e^{ct}+d} dt$”. Dans : *Quat. Jour. of Math* 68 (1920), p. 329–342.

[Mor33] L. J. Mordell. “The definite integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax^2+bx}}{e^{ax}+d} da$ and the analytic theory of numbers”. Dans : *Acta Math.* 61.1 (1933), p. 323–360.

[MP09] A. J. Maciejewski et M. Przybylska. “Differential Galois theory and integrability”. Dans : *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 6.8 (2009), p. 1357–1390.

[MR89] J. J. Morales-Ruiz. “Técnicas algébricas para el estudio de la integrbilidad de sistemas hamiltonianos”. Dans : *Ph. D. Thesis, University of Barcelona* 176 (1989).

[MRR01] J. J. Morales-Ruiz et J.-P. Ramis. “Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems. I, II”. Dans : *Methods Appl. Anal.* 8.1 (2001), p. 33–95, 97–111.

[MRR10] J. J. Morales-Ruiz et J.-P. Ramis. “Integrability of dynamical systems through differential Galois theory: a practical guide”. Dans : *Differential algebra, complex analysis and orthogonal polynomials.* T. 509. Contemp. Math. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2010, p. 143–220.

[MRRS07] J. J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis et C. Simo. “Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations”. Dans : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 40.6 (2007), p. 845–884.

[MS03] S. Marmi et D. Sauzin. “Quasianalytic monogenic solutions of a cohomological equation”. Dans : *Mem. Amer. Math. Soc.* 164.780 (2003), p. vi+83.

[MS94] J. J. Morales et C. Simó. “Picard-Vessiot theory and Ziglin’s theorem”. Dans : *J. Differential Equations* 107.1 (1994), p. 140–162.

[MW74] J. Marsden et A. Weinstein. "Reduction of symplectic manifolds with symmetry". Dans : *Rep. Mathematical Phys.* 5.1 (1974), p. 121–130.

[Nis10] S. Nishioka. "Transcendence of solutions of q-Painlevé equation of type $A_7^{(1)}$". Dans : *Aequationes Math.* 79.1-2 (2010), p. 1–12.

[Nis11] S. Nishioka. "Transcendence of solutions of q-Painlevé equation of type $A_6^{(1)}$". Dans : *Aequationes Math.* 81.1-2 (2011), p. 121–134.

[Poi57] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques.* New York, N.Y. : Dover Publications Inc., 1957, p. v+382.

[PR07] M. van der Put et M. Reversat. "Galois theory of q-difference equations". Dans : *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* 16.3 (2007), p. 665–718.

[PS97] M. Van der Put et M. F. Singer. *Galois theory of difference equations.* T. 1666. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 1997, p. viii+180. isbn : 3-540-63243-3.

[Riv10] T. Rivoal. "Extremality properties of some Diophantine series". Dans : *Experiment. Math.* 19.4 (2010), p. 481–494.

[Riv11] T. Rivoal. "On the distribution of multiples of real numbers". Dans : *Monatsh. Math.* 164.3 (2011), p. 325–360.

[Riv12] T. Rivoal. "On the convergence of Diophantine Dirichlet series". Dans : *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* 55.2 (2012), p. 513–541.

[Roq06] J. Roques. "Classification rationnelle et confluence des systèmes aux différences singuliers réguliers". Dans : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 56.6 (2006), p. 1663–1699.

[RS07] J.-P. Ramis et J. Sauloy. "The q-analogue of the wild fundamental group. I". Dans : *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies.* RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, p. 167–193.

[RS09] J.-P. Ramis et J. Sauloy. "The q-analogue of the wild fundamental group. II". Dans : *Astérisque* 323 (2009), p. 301–324.

[RS12] J.-P. Ramis et J Sauloy. "The q-analogue of the wild fundamental group and the inverse problem of the Galois theory of q-difference equations". arXiv:1207.0107. 2012.

[RSZ12] J.-P. Ramis, J. Sauloy et C. Zhang. "Local analytic classification of q-difference equations". Dans : *Astérisque (A paraître, arXiv:0903.0853)* (2012).

[Sak01] H. Sakai. "Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations". Dans : *Comm. Math. Phys.* 220.1 (2001), p. 165–229.

[Sau00] J. Sauloy. "Systèmes aux q-différences singuliers réguliers: classification, matrice de connexion et monodromie". Dans : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 50.4 (2000), p. 1021–1071.

[Sau03] J. Sauloy. “Galois theory of Fuchsian q-difference equations”. Dans : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 36.6 (2003), 925–968 (2004).

[Sau04] J. Sauloy. “La filtration canonique par les pentes d’un module aux q-différences et le gradué associé”. Dans : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 54.1 (2004), p. 181–210.

[Sau09] J. Sauloy. “Équations aux q-différences et fibrés vectoriels holomorphes sur la courbe elliptique $\mathbf{C}^*/q^{\mathbf{Z}}$”. Dans : *Astérisque* 323 (2009), p. 397–429.

[Sch73] H. A. Schwarz. “Über diejenigen Fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reiheeiner algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt”. Dans : *Crelle J* 75 (1873), p. 292–335.

[Ser67] J.-P. Serre. “Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles”. Dans : *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966).* Berlin : Springer, 1967, p. 118–131.

[Ser79] J.-P. Serre. “Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate”. Dans : *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III.* T. 65. Astérisque. Paris : Soc. Math. France, 1979, p. 155–188.

[Sla66] L. J. Slater. *Generalized hypergeometric functions.* Cambridge : Cambridge University Press, 1966, p. xiii+273.

[SU01] M.-H. Saito et H. Umemura. “Painlevé equations and deformations of rational surfaces with rational double points”. Dans : *Physics and combinatorics 1999 (Nagoya).* World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, p. 320–365.

[SV99] K. Strambach et H. Völklein. “On linearly rigid tuples”. Dans : *J. Reine Angew. Math.* 510 (1999), p. 57–62.

[Tak01] T. Takenawa. “Algebraic entropy and the space of initial values for discrete dynamical systems”. Dans : *J. Phys. A* 34.48 (2001). Symmetries and integrability of difference equations (Tokyo, 2000), p. 10533–10545.

[TV97] V. Tarasov et A. Varchenko. “Geometry of q-hypergeometric functions, quantum affine algebras and elliptic quantum groups”. Dans : *Astérisque* 246 (1997), p. vi+135.

[Ves91a] A. P. Veselov. “Integrable mappings”. Dans : *Uspekhi Mat. Nauk* 46.5(281) (1991), p. 3–45, 190.

[Ves91b] A. P. Veselov. “What is an integrable mapping?” Dans : *What is integrability?* Springer Ser. Nonlinear Dynam. Berlin : Springer, 1991, p. 251–272.

[Vol00] J. P. Voloch. “A note on the arithmetic of differential equations”. Dans : *Indag. Math.* 11.4 (2000), p. 617–621.

[Zag10] D. Zagier. “Quantum modular forms”. Dans : *Quanta of maths.* T. 11. Clay Math. Proc. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2010, p. 659–675.

[Zar86] Yu. G. Zarhin. “Linear semisimple Lie algebras containing an operator with small number of eigenvalues”. Dans : *Arch. Math. (Basel)* 46.6 (1986), p. 522–532.

[Zig80] S. L. Ziglin. “Branching of solutions and the nonexistence of an additional first integral in the problem of an asymmetric heavy rigid body in motion relative to a fixed point”. Dans : *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 251.4 (1980), p. 786–790.

[Zud02] V. V. Zudilin. “On the integrality of power expansions related to hypergeometric series”. Dans : *Mat. Zametki* 71.5 (2002), p. 662–676.

[Zwe02] S. Zwegers. “Mock Theta Functions”. arXiv:0807.4834. 2002.