TD N° 1 - **Un peu de géométrie**

Exo 1. Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$.

1) Montrer que les propriétés suivantes, relatives à une application $\mathbb{R}$-linéaire $f : E \longrightarrow E$, sont équivalentes :
(1) pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$;
(2) pour tous $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
Une application vérifiant ces propriétés est appelée une isométrie (vectorielle) de E. On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E.

2) Montrer que $\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, c'est-à-dire que :
– $\mathrm{O}(E)$ est un sous-ensemble non vide de $\mathrm{GL}(E)$;
– pour tous $f, g \in \mathrm{O}(E)$, $f \circ g \in \mathrm{O}(E)$;
– pour tout $f \in \mathrm{O}(E)$, $f^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

3) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application $\mathbb{R}$-linéaire, dont on note A la matrice dans une base orthonormée $e_1, ..., e_n$.

3.a) Montrer que f est une isométrie de E si et seulement si $f(e_1), ..., f(e_n)$ est une base orthonormée de E.

3.b) Montrer que f est une isométrie de E si et seulement si ${}^tAA = I_n$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tMM = I_n$. Montrer que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, isomorphe à $\mathrm{O}(E)$.

4) Montrer que si $f \in \mathrm{O}(E)$ alors $\det f \in \{\pm 1\}$.

Une isométrie de déterminant 1 (resp. -1) est dite positive (resp. négative). On note $\mathrm{O}^+(E)$ ou $\mathrm{SO}(E)$ (resp. $\mathrm{O}^-(E)$) l'ensemble des isométries positives (resp. négatives) de E.

5) Montrer que $\mathrm{O}^+(E)$ est sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$. Qu'en est-il de $\mathrm{O}^-(E)$?

On suppose à partir d'ici, et jusqu'à la fin de l'exercice, que $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. On note $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ la base (orthonormée) usuelle.

6) Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et soit A sa matrice dans la base e_1, e_2.

6.a) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \{\pm 1\}$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\lambda \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \lambda \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

6.b) Montrer que $\det f = \det A = \lambda$.

6.c) Montrer que si f est une isométrie positive alors f est la rotation d'angle θ et de centre $(0, 0)$.

6.d) Montrer que si f est une isométrie négative alors f est la symétrie orthogonale d'axe la droite engendrée par le vecteur $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$.

7) Etudier la composée de deux isométries vectorielles, selon les cas (deux rotations, deux symétries, une rotation et une symétrie). Montrer en particulier que toute rotation est le produit de deux symétries orthogonales (ainsi, le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les symétries orthogonales).

8) Soit $v \in E$. A quelle condition sur v existe-t-il une isométrie de E envoyant e_1 sur v ? Supposons qu'il existe au moins une telle isométrie. Combien y en a-t-il en tout ? L'ensemble de ces isométries est-il un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ (on distinguera deux cas) ?

9) Considérons un triangle équilatéral T centré en $(0,0)$. Montrer que l'ensemble des isométries de E laissant T globalement invariant est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, et le décrire explicitement.

Exo 2. Soit E un espace vectoriel sur un corps K de caractéristique $\neq 2$, et soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.

1) Considérons la symétrie (vectorielle) $s : E \longrightarrow E$ par rapport à F parallèlement à G.

1.a) Vérifier que $s^2 = \mathrm{Id}_E$ (on dit que s est une involution).

1.b) Montrer que s est un endomorphisme diagonalisable de E dont l'ensemble des valeurs propres est inclus dans $\{\pm 1\}$. Déterminer les sous-espaces propres, la trace et le déterminant de s.

2) Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que f est une symétrie vectorielle, et préciser les sous-espaces F et G correspondants.

On suppose à présent que E est un espace euclidien.

3) Soit F un sous-espace de E. On rappelle que la symétrie orthogonale de E par rapport à F est la symétrie (vectorielle) de E par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$. On la note s_F. Montrer que c'est une isométrie.

4) Montrons à présent que toute isométrie qui est aussi une symétrie est une symétrie orthogonale

4.a) Montrer que l'ensemble des valeurs propres d'une isométrie de E est inclus dans $\{\pm 1\}$, et que les sous-espaces propres correspondants sont orthogonaux.

4.b) Conclure.

Exo 3. Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$. Une réflexion orthogonale est une symétrie orthogonale $s : E \longrightarrow E$ telle que $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ est un hyperplan de E.

1) Soit $x \in E$ non nul. Montrer que l'application

$$\tau_x : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ v \longmapsto v - 2\dfrac{\langle x, v\rangle}{\langle x, x\rangle}x \end{array}$$

soit une réflexion orthogonale.

2) Montrer que toute réflexion orthogonale de E est de la forme τ_x.

3) Soient $x, y \in E$ distincts tels que $||x|| = ||y||$. Montrer que τ_{x-y} est l'unique réflexion orthogonale de E envoyant x sur y.