TD N$^{\text{o}}$ 3 - **Relations d'équivalence.**

Exo 1. La relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?

1) $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si

1.a) $x - y \in 3\mathbb{Z}$; 1.b) $x + y \in \mathbb{Z}$; 1.c) $|x - y| \leq 2$; 1.d) $x \leq y$;

2) $E = \mathbb{R}^\times$ et $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}$;

3) E est l'ensemble des droites du plan, et $d_1\mathcal{R}d_2$ si et seulement si d_1 est parallèle à d_2 ;

4) E est l'ensemble des droites du plan, et $d_1\mathcal{R}d_2$ si et seulement si d_1 est perpendiculaire à d_2 ;

5) $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ et $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff ad - bc = 0$;

6) E est l'ensemble des couples de points du plan, et $(A, B)\mathcal{R}(C, D) \iff$ les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont même milieu ;

7) $E = \mathbb{R}^\mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $f\mathcal{R}g$ si et seulement si f et g coïncident, sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

8) $E = \mathbb{R}^\mathbb{R} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $f\mathcal{R}g$ si et seulement si f et g coïncident, sauf éventuellement en un point.

Exo 2. Une relation d'équivalence est par définition une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. L'exercice précédent montre qu'aucune de ces trois propriétés n'est impliquée par les deux autres en général. Mais où se cache l'erreur dans le raisonnement suivant : « Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire symétrique et transitive sur un ensemble E. Par symétrie de $\mathcal{R}$, on a, pour tout $(x, y) \in E \times E$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. Par transitivité, on a $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive. » ?

Exo 3. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $\mathcal{R}_F$ une relation d'équivalence sur F.

1) Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}_{E;f}$ sur E définie par

$$x\mathcal{R}_{E;f}y \iff f(x)\mathcal{R}_F f(y)$$

est une relation d'équivalence.

2) Décrire la classe d'équivalence d'un élément x de E pour la relation $\mathcal{R}_{E;f}$ dans le cas où $\mathcal{R}_F$ est l'égalité.

Exo 4. 1) Soit $E = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0, ..., 0)\}$ et soit $\sim$ la relation binaire sur E défnie par

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^*, y = \lambda x.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $E/\sim$ est l'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

2) Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ centrée en l'origine et soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{S}^n$ définie par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que l'ensemble quotient $\mathbb{S}^n/\mathcal{R}$ est en bijection avec $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

3) Déterminer une bijection entre $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Exo 5. Soit $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E définie par

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff a + d = b + c.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Montrer que toute classe d'équivalence est représentée de manière unique par un élément de la forme $(n, 0)$ avec $n \geq 0$ ou $(0, m)$ avec $m \geq 1$.

3) Montrer que la loi interne

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$$

est bien définie, et fait de $E/\mathcal{R}$ un groupe commuatif.

4) Reconnaitre le quotient $E/\mathcal{R}$.

Exo 6. On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{R}$ par

$$t \sim t' \iff t' - t \in \mathbb{Z}.$$

1) Vérifier que c'est une relation d'équivalence.

2) Montrer que $\mathbb{R}/\sim$ est en bijection avec $\mathbb{U}$, en utilisant l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{U} \\ t &\longmapsto e^{2\pi i t}. \end{aligned}$$

3) Dans les cas suivants, l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ passe-t-elle au quotient en une application $\overline{g} : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{U}$? Si oui, cette application est-elle surjective ? injective ?

3.a) $g(t) = e^{\pi i t}$; 3.b) $g(t) = e^{4\pi i t}$.