TD N$^{\text{o}}$ 4 - **Anneaux et sous-anneaux.**

Exo 1. Lesquels sont des anneaux ?

$$(\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathbb{Q},-,\cdot),(\mathbb{Q},+,\div),(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},+,\cdot),(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot),(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\circ),$$
$$(C^0(I,\mathbb{R}),+,\cdot) \text{ avec } I \text{ intervalle de } \mathbb{R},$$
$$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),+,\cdot),(\mathrm{M}_n(\mathbb{C}),+,\cdot),(\mathbb{C}[X],+,\cdot),(\mathbb{C}[X],-,\cdot),(\mathbb{C}[X],+,\circ).$$

Exo 2. Soit $(G,+)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de groupes de G. On note $+$ la loi de composition interne sur $\mathrm{End}(G)$ définie par $f+g : G \to G,\ x \longmapsto f(x)+g(x)$, pour tout $f,g \in \mathrm{End}(G)$. Montrer que $(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est un anneau.

Exo 3. Lesquels sont des sous-anneaux de $\mathbb{Z}[X]$?

1) $\{P \in \mathbb{Z}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$

2) $\{P \in \mathbb{Z}[X] \mid \deg(P) \equiv 0 \mod 2\}$

3) $\{XQ \mid Q \in \mathbb{Z}[X]\}$

4) $\{Q(X^2) \mid Q \in \mathbb{Z}[X]\}$

Exo 4. Parmi les anneaux suivants, lesquels sont intègres ?

$$\mathbb{Q}\ ,\ A \times A\ ,\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Exo 5. Déterminer les éléments inversibles et les diviseurs de zéro de l'anneau $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cet anneau est-il intègre ?

Exo 6. Soit A un anneau.

1) On suppose que A est intègre. Montrer que $A[X]^\times = A^\times$.

2) En considérant $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, montrer que le résultat est faux si A n'est pas intègre.

Exo 7. Soit A un anneau fini.

1) Montrer qu'un élément $a \in A$ est soit nul, soit inversible, soit diviseur de zéro.

Indication. Considérer l'application de multiplication à gauche par a.

2) Est-ce vrai si A est infini ?

Exo 8. Soient B un anneau, $\omega \in B$, et A un sous-anneau de B. On note $A[\omega] = \{a_n\omega^n + \cdots + a_1\omega + a_0 \mid n \geq 0, a_i \in A\}$.

1) Montrer que $A[\omega]$ est le plus petit sous-anneau de B contenant A et ω.

2) On suppose que $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\omega]$ est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant ω.

3) On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré $d \geq 1$ tel que $P(\omega) = 0$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{Z}[\omega] = \{a_{d-1}\omega^{d-1} + \cdots + a_1\omega + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Est-ce vrai en toute généralité ?

4) On suppose que $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Q}[\omega]$ est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant ω.

5) On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $d \geq 1$ tel que $P(\omega) = 0$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{Q}[\omega] = \{a_{d-1}\omega^{d-1} + \cdots + a_1\omega + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Q}\}.$$

Montrer que $\mathbb{Q}[\omega]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exo 9. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[j]$ où $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$.

1) Montrer que $A = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que l'écriture d'un élément de A sous la forme $a + bj$ est unique.

On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|^2$.

2) 2.a) Montrer que si $z \in A$ alors $N(z) \in \mathbb{Z}$.

2.b) Soit $z \in A$. Montrer que $z \in A^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$.

3) Décrire le groupe $A^\times$ et en déterminer les éléments d'ordre 3.