TD N° 5 - **Anneaux, morphismes, idéaux, anneaux quotients.**

Les anneaux seront supposés commutatifs.

Exo 1. Soit A un anneau. Déterminer les morphismes d'anneaux $\mathbb{Z} \longrightarrow A$.

Exo 2. 1) Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux, et soit $\omega \in B$. Montrer que l'application

$$\varphi_{f,\omega} : \begin{array}{rcl} A[X] & \longrightarrow & B \\ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i & \longmapsto & \sum_{i=0}^{d} f(a_i)\omega^i \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux.

2) Montrer que, pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A[X] \longrightarrow B$, il existe un unique morphisme d'anneaux $f : A \longrightarrow B$ et un unique $\omega \in B$ tel que $\varphi = \varphi_{f,\omega}$.

Exo 3. Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux. On suppose que A est un corps. Montrer que f est injectif.

Exo 4. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et en déterminer les automorphismes.

Exo 5. Soit f un automorphisme de corps de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.

2) Montrer que f est strictement croissante.

3) En déduire que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exo 6. Vrai ou faux ? Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

1) L'image d'un idéal de A par f est un idéal de B.

2) L'image réciproque d'un idéal de B par f est un idéal de A.

Exo 7. Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}$? de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Exo 8. Lesquels sont des sous-anneaux de $\mathbb{Z}[X]$? des idéaux de $\mathbb{Z}[X]$?

1) $\{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(1) = 1\}$ 2) $\{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(1) = 0\}$

3) $\{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P(1) \in 3\mathbb{Z}\}$ 4) $\{P \in \mathbb{Z}[X] \mid P'(0) = 0\}$

Exo 9. Soit A un anneau. Un élément $a \in A$ est dit idempotent si $a^2 = a$. Il est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1) On suppose que A est intègre. Montrer que 0 est le seul élément nilpotent de A et que 0 et 1 sont les seuls éléments idempotents de A.

2) Montrer qu'aucun inversible de A n'est nilpotent et que 1 est le seul élément idempotent inversible de A.

3) Montrer que si a est un élément nilpotent de A alors $1-a$ est inversible. Montrer que si a est un élément idempotent de A alors $1-a$ est idempotent.

4) Montrer que si A est commutatif alors l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.

Exo 10. Soit A un anneau, et soit I un idéal de A. On introduit $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, x^n \in I\}$.

1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I, et que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

2) Calculer $\sqrt{I}$ pour $A = \mathbb{Z}$ et $I = 0, \mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, 8\mathbb{Z}, 45\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}$.

3) Montrer que $A/\sqrt{I}$ n'a pas d'élément nilpotent non nul.

Exo 11. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Déterminer le noyau du morphisme d'évaluation $ev_\omega : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ dans les cas suivants : $\omega = i, \sqrt{2}$ ou $e^{i\pi/4}$. Que donne le théorème de factorisation ? Et si on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}$?

Exo 12. L'idéal I est-il premier ? maximal ? principal ? Exprimer A/I à l'aide d'anneaux « plus familiers ».

1) $A = \mathbb{R}[X], I = (X)$
2) $A = \mathbb{Z}[X], I = (X)$
3) $A = \mathbb{Q}[X], I = (X^2 - 2)$
4) $A = \mathbb{Z}[X], I = (X^2 - 2)$
5) $A = \mathbb{R}[X], I = (X^2 - 2)$
6) $A = \mathbb{R}[X], I = (X^2 - 1)$
7) $A = \mathbb{R}[X], I = (X^2 + 1)$
8) $A = \mathbb{C}[X], I = (X^2 + 1)$
9) $A = \mathbb{Z}[X], I = (2, X)$
10) $A = \mathbb{Z}[X], I = (m, X), m \geq 1$ fixé
11) $A = \mathbb{R}[X, Y], I = (X + Y)$
12) $A = \mathbb{R}[X, Y], I = (X, Y)$.

Exo 13. Vrai ou faux ?

1) Soit B un anneau, et soit A un sous-anneau.

1.a) Si I est un idéal premier de B, $I \cap A$ est un idéal premier de A.

1.b) Si I est un maximal de B, $I \cap A$ est un idéal maximal de A.

2) Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.

2.a) Si J est un idéal premier de B, $f^{-1}(J)$ est un idéal premier de A.

2.b) Si J est un idéal maximal de B, $f^{-1}(J)$ est un idéal maximal de A.

Exo 14. Soit A un anneau. On considère le morphisme d'anneaux $\Theta_A : \mathbb{Z} \to A$ qui à m associe $m \cdot 1_A$.

1) Justifier qu'il existe un unique entier $c \geq 0$ tel que $\ker(\Theta_A) = c\mathbb{Z}$. L'entier c est appelé la caractéristique de A.

2) On suppose que $c = 0$. Montrer que A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$.

3) On suppose que $c > 0$. Montrer que A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$.

4) Montrer que la caractéristique d'un anneau intègre est soit nulle, soit un nombre premier. Que pensez-vous de la réciproque ?

5) Calculer la caractéristique des anneaux suivants :

$$\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ , \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n, A_i \text{ anneau.}$$

Exo 15. Soit $A = \mathbb{Z}[i]/(2+i)$.

1) Soit $m \in \mathbb{Z}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur m pour que l'équation $(2+i)z = m$ ait une solution $z \in \mathbb{Z}[i]$.

2) En déduire la caractéristique de A.

3) Montrer que le morphisme $\Theta_A : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ est surjectif.

4) L'idéal $(2+i)$ est-il premier ? maximal ?

Exo 16. 1) On note $\mathcal{C}([-1,1])$ l'anneau des fonctions continues $[-1,1] \to \mathbb{R}$.

1.a) Montrer que, pour tout $x_0 \in [-1,1]$, $\mathfrak{m}_{x_0} = \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) \mid f(x_0) = 0\}$ est un idéal maximal de $\mathcal{C}([-1,1])$ et que le quotient $\mathcal{C}([-1,1])/\mathfrak{m}_{x_0}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

1.b) Montrer que les idéaux maximaux de $\mathcal{C}([-1,1])$ sont de la forme $\mathfrak{m}_{x_0}$ pour un certain $x_0 \in [-1,1]$.

1.c) Montrer que l'intervalle $[-1,1]$ est en bijection avec l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{C}([-1,1])$.

2) On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ a un idéal maximal qui n'est pas de la forme $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid f(x_0) = 0\}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.