TD N$^{\text{o}}$ 7 - **Groupes Symétriques**

Exo 1. Soient $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathfrak{S}_n$. Montrer les propriétés suivantes :

1) $\mathrm{supp}(\sigma) = \emptyset \iff \sigma = \mathrm{Id}$.

2) $\mathrm{supp}(\sigma) = \mathrm{supp}(\sigma^{-1})$.

3) $\mathrm{supp}(\sigma_1 \cdots \sigma_r) \subset \mathrm{supp}(\sigma_1) \cup \cdots \cup \mathrm{supp}(\sigma_r)$, avec égalité lorsque $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont à supports deux à deux disjoints.

4) Pour tout $k \in \mathbb{Z}, \mathrm{supp}(\sigma^k) \subset \mathrm{supp}(\sigma)$.

Exo 2. 1) Montrer que si deux permutations sont à supports disjoints, alors elles commutent.

2) Dans $\mathfrak{S}_{11}$, on considère

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 11 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 & 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

2.a) Montrer sans calcul que σ et τ commutent.

2.b) Retrouver ce résultat par un calcul direct.

Exo 3. Décomposer en produit de cycles à supports deux à deux disjoints les permutations de $\mathfrak{S}_{10}$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 5\ 9)(2\ 4\ 9)\ ,\ (1\ 8\ 6\ 7)(8\ 6\ 7\ 5)(6\ 7\ 5\ 1)$$

$$(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(6\ 7)(7\ 1)\ ,\ (1\ 8)(1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2).$$

Exo 4. Calculer l'ordre d'une permutation en fonction des longueurs des cycles à supports deux à deux disjoints qui la compose.

Exo 5. 1) 1.a) Soit $(a_1\ a_2 \cdots a_p) \in \mathfrak{S}_n$ un p-cycle. Montrer que pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\tau(a_1\ a_2 \cdots a_p)\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2) \cdots \tau(a_p)).$$

1.b) En déduire que deux cycles σ, σ' de $\mathfrak{S}_n$ sont conjugués si et seulement s'ils ont même longueur. Comment obtenir dans ce cas $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$?

2) Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ des cycles à supports deux à deux disjoints.

2.a) Montrer que pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_n$, les permutations $\tau\sigma_1\tau^{-1}, \dots, \tau\sigma_r\tau^{-1}$ sont des cycles à supports deux à deux disjoints.

2.b) Si $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$ est la décomposition de σ en cycles à supports deux à deux disjoints, quelle est la décomposition de $\tau\sigma\tau^{-1}$?

3) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux permutations $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ soient conjuguées, et expliquer comment obtenir dans ce cas $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1}$.

4) Application numérique pour les permutations suivantes :

4.a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

4.b) $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 5\ 9)(2\ 4\ 9)$ et $(1\ 8\ 6\ 7)(8\ 6\ 7\ 5)(6\ 7\ 5\ 1)$

4.c) $(1\,2)(2\,3)(3\,4)(4\,5)(5\,6)(6\,7)(7\,1)$ et $(1\,8)(1\,7)(1\,6)(1\,5)(1\,4)(1\,3)(1\,2)$.

Exo 6. 1) Trouver la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, la signature, l'ordre et une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes de $\mathfrak{S}_{10}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

et $\phi = (10, 3, 4, 1)(8, 7)(4, 7)(5, 6)(2, 6)(2, 9)$.

2) Les permutations σ et ϕ sont-elles conjuguées ?

3) Calculer σ^{2015} et ϕ^{2015}.

Exo 7. 1) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par chacune des familles suivantes :

i) Les transpositions $(1\ i), i = 2, \dots, n$.

ii) Les transpositions $(i\ i+1), i = 1, \dots, n-1$.

iii) La transposition $(1\ 2)$ et le n-cycle $(1\ 2 \cdots n)$.

2) Trouver un 4-cycle σ tel que $(1\ 2)$ et σ n'engendrent pas $\mathfrak{S}_4$ (penser aux isométries du carré).

Exo 8. Un joueur professionnel mélange un paquet de 2^n cartes plusieurs fois par la méthode suivante : il sépare le paquet en deux moitiés égales, puis intercale une carte sur deux de chaque paquet, en gardant la première carte de la première moitié sur le dessus.

Montrer qu'au bout de n battages le jeu de carte est revenu à sa position initiale.

Que se passe-t-il si on change la façon de mélanger en gardant la première carte de la seconde moitié sur le dessus ?

Exo 9. 1) Trouver toutes les formes (nombre et longueur des cycles) possibles de décomposition en cycles à supports deux à deux disjoints des éléments de $\mathfrak{A}_4$.

2) En déduire qu'un élément de $\mathfrak{A}_4$ est d'ordre $1, 2$ ou 3, et déterminer le nombre d'éléments de $\mathfrak{A}_4$ d'un ordre donné.

3) On veut montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6. On rappelle qu'un groupe d'ordre 6 est soit cyclique, soit isomorphe à D_3.

3.a) Pourquoi $\mathfrak{A}_4$ n'a-t-il pas de sous-groupe cyclique d'ordre 6 ?

3.b) Combien d'éléments d'ordre 2 un groupe isomorphe à D_3 possède-t-il ? En déduire qu'un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathfrak{A}_4$ isomorphe à D_3 contiendrait toutes les doubles transpositions. Conclure.

4) Le groupe $\mathfrak{A}_4$ possède-t-il un sous-groupe d'ordre 4 ? Si oui, quelle est sa structure ?

Exo 10. Soit p un nombre premier. On veut démontrer qu'une transposition et un p-cycle (n'importe lesquels) engendrent à eux deux $\mathfrak{S}_p$.

Soit σ un p-cycle, et soit τ une transposition.

1) Soit $\rho \in \mathfrak{S}_p$. Montrer que σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_p$ si et seulement si $\rho\sigma\rho^{-1}$ et $\rho\tau\rho^{-1}$ engendrent $\mathfrak{S}_p$. En déduire que l'on peut supposer $\tau = (1\ 2)$.

2) Montrer qu'il existe $1 \leq d \leq p-1$ tel que $\sigma^d(1) = 2$. Justifier que σ^d est encore un p-cycle.

3) Montrer que σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_p$ si et seulement si σ^d et τ engendrent $\mathfrak{S}_p$. En déduire que l'on peut supposer que $\sigma(1) = 2$.

On suppose donc que $\sigma = (1\ 2\ a_3 \cdots a_p)$ et $\tau = (1\ 2)$.

4) Montrer qu'il existe $\rho \in \mathfrak{S}_p$ tel que $\rho\sigma\rho^{-1} = (1\ 2 \cdots p)$ et $\rho\tau\rho^{-1} = (1\ 2)$ et conclure.

Exo 11. Sam Loyd aurait promis 1000 dollars à celui qui viendrait à bout du casse-tête suivant (jeu du taquin)...

Le matériel - On dispose d'un damier 4×4 sur lequel reposent quinze carreaux numérotés de 1 à 15, comme suit :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Objectif - Parvenir à la configuration suivante :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Mouvements autorisés - Faire glisser dans la case vide un carreau voisin, se situant au-dessus, à gauche, en-dessous ou à droite de la case vide (par exemple, les carreaux 12 et 14 sont les seuls déplaçables pour le premier coup).

Saurez-vous expliquer pourquoi Sam Loyd ne prenait aucun risque ?