TD N$^{\text{o}}$ 8 - **Actions de groupes**

Exo 1. Dans les cas suivants, l'application $\begin{array}{rcl} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$ est-elle une action de G sur E ?

1) $G = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{R}$, $n \cdot x = x + n$;
2) $G = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{R}$, $n \cdot x = nx$;
3) $G = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{R}$, $n \cdot x = 2^n x$;
4) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $E = \mathbb{R}$, $\overline{m} \cdot x = (-1)^m x$;
5) $G = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $E = \mathbb{C}$, $\overline{m} \cdot z = j^m z$ où $j = e^{2i\pi/3}$;
6) $G = \mathfrak{S}(X)$, $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, $\sigma \cdot f = f \circ \sigma$;
7) $G = \mathfrak{S}(X)$, $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, $\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$.

Exo 2. On considère l'application $\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (f, x) & \longmapsto & f(x). \end{array}$

1) Montrer que l'on définit ainsi une action de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^n$.
2) Cette action est-elle transitive ?
3) Décrire les orbites.
4) Pour $n = 2$, décrire le stabilisateur de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exo 3. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit T l'ensemble des sommets d'un tétraèdre régulier centré en l'origine. Soit G l'ensemble des isométries vectorielles qui laissent T globalement invariant.

1) Montrer que G agit transitivement sur T et étudier le stabilisateur d'un sommet.
2) En déduire que G est fini, et donner son cardinal.
3) Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.
4) Retrouver ce résultat en utilisant le fait que $\mathfrak{S}_4$ est engendré par ses transpositions.

Exo 4. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E.

1) On suppose que $|G| = 156$, et qu'il existe un $x \in E$ avec un stabilisateur d'ordre 12. Quel est le cardinal de l'orbite de x ?
2) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 108$ et $|G| = 143$. Montrer que G fixe au moins un point de E.
3) On suppose que $\mathrm{card}(E) = 17$ et $|G| = 15$. On suppose que G agit sans point fixe. Déterminer le nombre d'orbites et leurs cardinaux.

4) On suppose que $\text{card}(E) = 27$ et $|G| = 63$. L'action de G peut-elle être transitive ?

Exo 5. Soit p un nombre premier, et soit G un groupe fini d'ordre p^2.

1) Montrer que $Z(G)$ est d'ordre p ou p^2.

2) On suppose que $|Z(G)| = p$. Soit $x \in G \setminus Z(G)$.

2.a) On fait agir G sur lui-même par conjugaison. Montrer que $x \in \text{Stab}_G(x)$, puis que $Z(G) \subsetneq \text{Stab}_G(x)$.

2.b) En déduire que $\text{Stab}_G(x) = G$, puis une contradiction.

On a donc $|Z(G)| = p^2$.

3) Montrer que G est commutatif.

4) Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exo 6. Soit p un nombre premier fixé, et soit $n \geq 1$ un entier. Soit G un groupe d'ordre n, et soit

$$E = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1_G\}.$$

1) Quel est le cardinal de E ?

2) Montrer que tout sous-groupe H de $\mathfrak{S}_p$ agit sur G^p par

$$\begin{aligned} H \times G^p &\longrightarrow G^p \\ (\tau, (g_1, \ldots, g_p)) &\longmapsto (g_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, g_{\tau^{-1}(p)}). \end{aligned}$$

Soit $\sigma = (1\ p\ p-1 \cdots 2)$, et soit $H = \langle \sigma \rangle$.

3) Vérifier que l'action de H sur G^p se restreint en une action de H sur E.

4) Quels sont les cardinaux possibles d'une orbite de E sous l'action de H ? Décrire toutes les orbites à 1 élément. Montrer qu'il existe au moins une orbite à 1 élément.

5) On suppose que $p \nmid n$. Montrer que G n'a pas d'élément d'ordre p, et en déduire qu'il n'y a qu'une seule orbite à un élément. En déduire que $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

6) On suppose que $p \mid n$. Montrer qu'il y a au moins deux orbites à un élément. En déduire que G possède au moins un élément d'ordre p.