Feuille d'exercices 0 : "révisions" d'algèbre linéaire

Exercice 1 (Quizz d'algèbre linéaire) [1]

Répondre par OUI ou par NON aux questions suivantes et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple, selon le cas. Dans ce qui suivra, E est un K-espace vectoriel et $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors $Vect(u, v) = Vect(u + v, u - v)$.

2. Les nombres complexes $1 + i$ et $1 - i$ engendrent $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $Vect(u) = \mathbb{R}^2$.

4. Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $F + H = G + H$. Alors $F = G$.

5. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $(F + G) \cup F$ est un sous-espace vectoriel de E.

6. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, alors $F + (-F) = \{0\}$, où $-F := \{-x \,|\, x \in F\}$.

7. Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs deux à deux non-colinéaires. Alors ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

8. Soit A une partie non-vide de E. Il existe un sous-espace vectoriel de E contenant A.

9. L'ensemble des solutions (x, y, z, t) du système linéaire $\begin{cases} x - y - z + t &= 1 \\ 2x - 3y + z + t &= 0 \end{cases}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

10. L'ensemble des solutions (x, y, z, t) du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 9 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 1, et la matrice est de rang 4.

11. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, non tous nuls. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ est un sous-espace vectoriel engendré par $n - 1$ vecteurs.

12. L'application $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$, de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

[1] Pour d'autres questions du même type, voir le site EXEMAALT http://matexo.smai.emath.fr/exemaalt/exos_individuels/pdf_imprimable/quizzes_alglin.pdf

13. Soit $f : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P + P'$. Alors f est linéaire et sa matrice dans la base $(1, X, X^2)$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Soit $e = \{e_1, e_2\}$ une base de E et f un endomorphisme de E défini par

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2, \qquad f(e_2) = 3e_1 + 4e_2$$

(a) La matrice de f dans la base e est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) On pose $u_1 = f(e_1)$, $u_2 = f(e_2)$. La matrice de passage de e à $u = \{u_1, u_2\}$, c'est-à-dire la matrice représentative de l'application identité de (E, u) dans (E, e), est $P_e^u = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

15. On suppose E de dimension finie. Soit $P = P_e^u$ la matrice de passage d'une base e à une base u.

(a) la première colonne de P^{-1} est formée des coordonnées de e_1 dans la base u.

(b) Si X est un vecteur colonne représentant les coordonnées d'un élément $x \in E$ dans la base e, le vecteur colonne X' représentant les coordonnés de x dans la base u satisfait $X = PX'$.

(c) Si M est la matrice représentative d'un endomorphisme f de E dans la base e, la matrice de f dans la base u est $M' = PM$.

16. Les relations suivantes définissent un changement de coordonnées (précisez la nouvelle base lorsque c'est le cas) :

(a) $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 + x_2 \\ x_2' & = & x_1 - x_2 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' & = & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' & = & x_2 + 4x_2 - x_3 \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' & = & x_2 + x_3 \\ x_3' & = & x_3 \end{array} \right.$ (d) $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 - x_2 \\ x_2' & = & x_2 - x_3 \\ x_3' & = & x_1 - x_3 \end{array} \right.$

Exercice 2 On rappelle que si $M = (m_{ij})$ est une matrice $p \times q$ alors M^t est la matrice $q \times p$ dont le coefficient (i, j) est m_{ji}.

(a) Soit A une matrice $p \times q$ et B une matrice $q \times r$. Montrer que $(AB)^t = B^t A^t$.

Soit M une matrice $n \times n$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ (qui sont deux matrices $n \times 1$)

(b) Donner la nature des produits matriciels suivants, lorsqu'ils sont définis : XM, X^tM, MY, X^tY, XY, YX^t, X^tMY, MX^t, Y^tMX,

(c) Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Calculer les produits matriciels suivants, lorsqu'ils sont définis : XM, X^tM, MY, X^tY, YX^t, X^tMY, MX^t, Y^tMX.