Feuille d'exercices 1 : formes bilinéaires et formes quadratiques

Exercice 1 Les applications suivantes sont-elles bilinéaires ? Symétriques ?

(a) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1x_2 + y_1y_2$,

(b) Sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$,

(c) Sur $\mathbb{R}^3$, $\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$,

(d) Sur $\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,Q) = P'(1)Q(0) + P'(0)Q(1)$,

(e) Sur $C([0,1],\mathbb{R})$, $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)\,dx$,

(f) Sur $M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$.

Exercice 2 Soit la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 - x_2y_2$$

(a) Ecrire la représentation matricielle de φ dans la base canonique. φ est-elle symétrique? Décomposer φ en somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire anti-symétrique.

(b) Ecrire la forme quadratique q_φ associée à φ. Est-elle positive ? Définie ? Dessiner son cône isotrope.

(c) Ecrire la forme polaire de q. L'a t'on déjà vu ? Quel est son rang ? Est-elle dégénérée ?

Exercice 3 On considère sur $E = \mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x) = (x_1 + x_2)^2$. On note e la base canonique et on pose $u_1 = e_1, u_2 = e_1 + e_2$.

(a) Donner la forme polaire φ de q et calculer la représentation matricielle de φ dans les bases e et u. On note M et M' les matrices obtenues.

(b) Soit f (resp. f') l'endomorphisme de E défini par la matrice M dans la base e (resp. M' dans u). Les endomorphismes f et f' sont-ils les mêmes ? Comparer leurs images, leurs noyaux. Que constatez-vous ?

Exercice 4 On considère sur $E = \mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x) = 4x_1x_2$.

(a) Est-elle positive ? Définie ? Quel est son cône isotrope ?

(b) Déterminer la forme polaire $\varphi = \varphi_{pol(q)}$ de φ et donner la représentation matricielle de φ dans la base canonique. Quel est le rang de φ ? Son noyau ? Est-elle dégénérée ?

(c) On fait le changement de variables $x'_1 = x_1 + x_2, x'_2 = x_1 - x_2$. Exprimer q et φ dans les nouvelles coordonnées,

- par substitution des coordonnées,
- en utilisant la formule du changement de base.

Qu'a de particulier la nouvelle base ?

Exercice 5 On considère sur $E = \mathbb{R}^3$ la forme quadratique $q(x) = (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2-x_3^2$.

(a) Est-elle positive ? Définie ?

(b) Déterminer la forme polaire $\varphi = \varphi_{pol(q)}$ de φ et donner la représentation matricielle de φ dans la base canonique. Quel est son rang ? Son noyau ? Est-elle dégénérée ?

(c) Déterminer un changement de variables tel que la matrice de φ soit diagonale dans la base associée. Effectuer le changement de bases de 2 manières différentes.

Exercice 6 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On considère la forme bilinéaire sur E définie par $\varphi(P, Q) = P(1)Q(1)$.

(a) φ est-elle symétrique ? Positive ? Définie ? Déterminer le noyau et le rang de φ.

(b) Donner la représentation matricielle de φ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, puis dans la base $(1, X-1, (X-1)^2, \cdots, (X-1)^n)$ (on vérifiera que ce sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$). Vérifier le rang et le noyau.

(c) Soit q la forme quadratique de φ. Quel est le cône isotrope de q ? Cela s'explique t'il ?

Exercice 7 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $w : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)w^2(t)\ dt$$

(a) Vérifier que φ est bilinéaire. Est-elle positive ? Définie?

(b) Montrer que φ est définie, si on suppose que w s'annulle en un nombre au plus fini de points. Le condition est-elle nécessaire ?

(c) Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes. φ est-elle définie sur F, si on suppose w n'est pas identiquement nulle (mais peut avoir une infinité de zeros) ?

Exercice 8 Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on considère

$$q(P) = \int_0^1 P(t)P'(t)\ dt$$

(a) Montrer que q est une forme quadratique, qui peut s'écrire comme une différence de carrés de formes linéaires indépendantes.

(b) Calculer le noyau, le rang et le cône isotrope de q.

(c) Déterminer une base orthogonale pour la forme polaire de q.

Exercice 9 Sur $E = M_n(\mathbb{R})$ on considère la forme bilinéaire $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$.

(a) Quel est le noyau de φ ?

(b) On note I_n la matrice identité. Quel est son orthogonal pour φ ?

Exercice 10 Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ on considère la forme quadratique $q(A) = \det(A)$.

(a) Montrer que q est une forme quadratique sur E et donner sa forme polaire φ.

(b) Déterminer le rang et le cône isotrope de q

(c) Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ pour φ de $F = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$. A t'on $E = F \oplus F^\perp$?

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel , F, G des sous-espaces vectoriels de E. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Montrer que l'orthogonal pour φ satisfait les relations suivantes :

(a) $(F + G)^\perp = (F^\perp) \cap (G^\perp)$.

(b) $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp \supset F^\perp \cap G^\perp$.

Donner un exemple où l'égalité n'est pas réalisée dans (b).

Exercice 12 (Quizz sur les formes quadratiques I) Répondre par OUI ou par NON aux questions suivantes et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple, selon le cas. Dans ce qui suivra, E est un K-espace vectoriel et $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. Le noyau d'une forme quadratique est un espace vectoriel.

2. La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.

3. Si $q(v_1) > 0$ et $q(v_2) > 0$ alors $q(v_1 + v_2) > 0$.

4. La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.

5. Une forme quadratique bornée est nulle.

6. Si f et g sont deux formes linéaires, alors $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.

7. Le produit de deux formes bilinéaires est une forme bilinéaire.

8. Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors $(x, y) \mapsto f(x)f(y)$ est définie positive.

9. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le déterminant de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

10. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le rang de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.

11. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors la trace de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.