Feuille 2 : dualité, réduction de Gauss, quadriques

Dans la feuille on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

Exercice 1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $l \in (K^n)^*$. Pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, on pose $l(e_i) = a_i$.

Montrer que l est la forme linéaire $x \mapsto x_1 a_1 + \ldots x_n a_n$. Montrer que les coordonnées de l dans la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sont $(a_1, \ldots, a_n)$.

Exercice 2 Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la famille $\mathcal{B} = ((X-1)^2, X-1, 1)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de V et donner les coordonnées du polynôme $a + bX + cX^2$ dans cette base.

(b) Déterminer $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 3 Montrer que les formes linéaires

$$l_1 \colon (x, y, z) \mapsto x + 2y + z\,,\ l_2 \colon (x, y, z) \mapsto 2x + 3y + 3z \ \text{ et } l_3 \colon (x, y, z) \mapsto 3x + 7y + z$$

forment une base $\mathcal{B}'$ du dual de $\mathbb{R}^3$ et trouver la base de $\mathbb{R}^3$ dont $\mathcal{B}'$ est la base duale.

Exercice 4 Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts.

(a) Montrer que les applications $l_i \colon P \mapsto P(a_i)$, $i = 0, \ldots, n$, forment une famille libre de formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer qu'il existe des réels $b_0, \ldots, b_n$ uniques tels que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$ on a

$$\int_0^1 P(t)dt = b_0 P(a_0) + \cdots + b_n P(a_n)\,.$$

Expliciter les b_i dans le cas $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$.

(c) Déterminer la base $(P_0, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ dont $(l_0, \ldots, l_n)$ est la base duale.

Exercice 5 Soient $u \colon E \to F$ et $v \colon F \to G$ deux applications linéaires.

(a) Montrer que l'application duale de $v \circ u$ est $u^* \circ v^*$.

(b) On suppose u bijective. Montrer que sa duale l'est aussi, d'inverse la duale de u^{-1}.

Exercice 6 On considère l'endomorphisme u de $E = \mathbb{R}_3[X]$ donné par $P(X) \mapsto P(X+1)$. On note $\mathcal{B}$ la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E.

(a) Donner la matrice de l'endomorphisme dual u^* dans la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_4^*)$ de $\mathcal{B}$.

(b) Pour $1 \leq i \leq 4$, on note l_i la forme linéaire sur E qui associe à P la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(P)$ dans la base $\mathcal{B}$. La famille $(l_i)_i$ est-elle libre? Donner les coordonnées des l_i dans $\mathcal{B}^*$.

Exercice 7 Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Décomposer q en somme de carrés indépendants suivant la méthode de Gauss. En déduire une base q-orthogonale et la signature de q.

Exercice 8 Mêmes questions avec la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2.$$

Exercice 9 En appliquant la méthode de Gauss, donner la signature des formes quadratiques suivantes :

$$\begin{array}{rrcl}
\forall x \in \mathbb{R}^3, & q_1(x) & = & x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\
\forall x \in \mathbb{R}^3, & q_2(x) & = & 7x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 \\
\forall x \in \mathbb{R}^3, & q_3(x) & = & 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_2x_3 + 4x_3^2 \\
\forall P \in \mathbb{R}_2[X], & q_4(P) & = & P(2)P(1) + P(1)P(0)
\end{array}$$

Exercice 10 Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes, définies sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl}
q_1(x) & = & \displaystyle\sum_{i,j}(i + j - 1)x_ix_j \\
q_2(x) & = & \displaystyle\sum_{i,j}\inf(i,j)x_ix_j \\
q_3(x) & = & \displaystyle\sum_{i,j}\sin(\alpha_i + \alpha_j)x_ix_j, \text{ avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \\
q_4(x) & = & \displaystyle\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2
\end{array}$$

Exercice 11 On considère sur $\mathbb{R}_n[X]$ la forme quadratique

$$q(P) = \int_0^1 P(x)P'(x)\,dx.$$

Déterminer une base q-orthogonale de la forme polaire de q, et en déduire la signature de q.

Exercice 12 (Signature de $A^t \cdot A$) Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $A^t \cdot A$ est la matrice d'une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^p$.

(b) Déterminer sa signature en fonction de $\mathrm{rg}A$.

Exercice 13 Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $\ell_1, \ell_2 \in E^*$ deux formes linéaires non nulles sur E. On considère l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = \ell_1(x)\ell_2(x).$$

(a) Montrer que q est une forme quadratique sur E, de noyau $E^\perp = \ker(\ell_1) \cap \ker(\ell_2)$ (on pourra discuter selon que $\ker(\ell_1) = \ker(\ell_2)$ ou non)

(b) Déterminer les signatures possibles pour q.

Exercice 14 (Rang d'une décomposition en carrés) Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur E, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_p f_p^2.$$

Montrer que $\mathrm{rg}(f_1, \ldots, f_p) \geq \mathrm{rg}(q)$.

Exercice 15 Déterminer et représenter les solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ des équations suivantes :

(a) $x^2 + xy + y^2 = 1$

(b) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

(c) $x^2 + xy + y^2 + 1 = -1$

(d) $x^2 - 2xy + y^2 = 1$

Exercice 16 Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = 3x^2 - 10xy + 19y^2$.

1. Décomposer q en carrés, c'est-à-dire trouver une base de $\mathbb{R}^2$ telle que dans les nouvelles coordonnées (X, Y) on ait $q = X^2 + Y^2$.
2. Grâce à ce changement de coordonnées, calculer l'intégrale double $A = \iint_{q(x,y)\leq 1} dxdy$.
3. Quelle aire est calculée par cette intégrale ?

Exercice 17 (courbe paramétrée)
Montrer que le support de la courbe $x = \cos t,\ y = \cos t + \sin t$ est une ellipse, à déterminer.

Exercice 18 Déterminer la nature des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ des équations suivantes :

(a) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy - 12yz + 4zx + 4 = 0.$

(b) $x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xz - 4yz + 3 = 0.$

(c) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 4x - 2y - z + 3 = 0.$

(d) $xy + xz + yz + 1 = 0.$

(e) $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 5xy - yz + xz = 0.$

(f) $xy + yz = 1.$

(g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0.$

(h) $(x - y)(y - z) + (y - z)(z - x) + (z - x)(x - y) + (x - y) = 0.$

Exercice 19 (Quizz sur les formes quadratiques II) Répondre par OUI ou par NON aux questions suivantes et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple, selon le cas. Dans ce qui suivra, E est un K-espace vectoriel et $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1. Supposons que q n'a pas de vecteur isotrope. Alors q ou $-q$ est définie positive.

2. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et sur d_2. Alors q est définie positive.

3. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites d_1 et d_2 en somme directe telles que q soit définie positive sur d_1 et définie négative sur d_2. Alors q est de signature $(1,1)$.

4. La somme de deux formes quadratiques de signature $(1,1)$ est une forme quadratique de signature $(1,1)$.

5. Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ ayant la même signature. Alors il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}'}(q')$.

6. Soient q et q' deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ telles qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ avec $Mat_{\mathcal{B}}(q) = Mat_{\mathcal{B}'}(q')$. Alors q et q' ont la même signature.

7. La signature de la forme quadratique $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3,0)$.

Exercice 20 (Extrait du CC1 2012) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. Pour $P, Q \in E$, on définit

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\ dt.$$

1) Vérifier que φ définit une forme bilinéaire symétrique positive sur E.
   On note q la forme quadratique associée à φ.

2) Déterminer le cône isotrope $\mathcal{C}_q$ de q.

3) Montrer que le noyau de φ est égal au cône isotrope, i.e. $E^{\perp} = \mathcal{C}_q$, et en déduire le rang de φ.

On définit, pour tout $P \in E$, $f(P) = \int_0^1 P'(t)\ dt$.

4) Montrer que f est une forme linéaire sur E.

On définit une forme quadratique q_1 sur E en posant, pour tout $P \in E$,

$$q_1(P) = q(P) - (f(P))^2.$$

5) Montrer que

$$q_1(P) = \int_0^1 (P'(t) - f(P))^2\ dt,$$

   et en déduire la signature de q_1 (on ne cherchera pas à réduire explicitement en carrés la forme q_1).