Feuille d'exercices 3 : produit scalaire, projection, orthonormalisation

Exercice 1 Les formes quadratiques suivantes sont-elles positives ? Leur formes polaires sont-elles des produits scalaires ?

(a) $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4yz$,

(b) $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy - 4xz + 6yz$,

(c) $q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$.

(d) $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos\alpha + y \sin\alpha)$.

(e) $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

Exercice 2 A quelles conditions les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?

(a) $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi((x, x'), (y, y')) = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ (étudier $\varphi((1, t), (1, t))$, $t \in \mathbb{R}$).

(b) $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = a \sum\limits_i x_i y_i + b \sum\limits_{i \neq j} x_i y_j$ [montrer que $(\sum x_i)^2 \leq n \sum x_i^2$].

(c) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$.

Exercice 3 Pour chaque espace euclidien E muni d'un produit scalaire φ, appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille libre F afin de produire une base orthonomée pour $\langle F \rangle$. Calculer la projection orthogonale de $v \in E$ sur $\langle F \rangle$. Donner les équations de $\langle F \rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi =$ produit scalaire usuel, $F = ((1, 0, -1), (1, -1, 0))$ et $v = (1, 1, 1)$.
2. $E = \mathbb{R}^4$, $\varphi =$ produit scalaire usuel, $F = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 1))$ $v = (1, 1, 1, 1)$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3$, $F = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $v = (0, 0, 1)$.
4. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(X)Q(X)dX$, $F = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.
5. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(X)Q(X)dX$, $F = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.

Exercice 4 Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_{t=-1}^1 P(t)Q(t)\, dt$.

Exercice 5 Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^4 P(i)Q(i)$.

Exercice 6 (Calcul de distance) On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : Pour $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_i b_i X^i$, $\langle P, Q \rangle = \sum_i a_i b_i$. Soit $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

1) Trouver une base orthonormée de H.

2) Calculer $d(X, H)$.

Exercice 7 (Expression analytique) Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ une base orthonormée de E, et F le sev d'équations dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} x + y + z + t &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4t &= 0 \end{cases}$$

1) Trouver une base orthonormée de F.

2) Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.

3) Calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 8 (Projection sur un hyperplan) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 9 (Polynômes orthogonaux) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\langle P, Q\rangle = \int_{t=0}^1 P(t)Q(t)\,dt$.

(a) Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(b) Démontrer qu'il existe une unique famille $(P_0, P_1, \dots, P_n, \dots)$ de polynômes vérifiant :

- $\deg P_i = i$
- le coefficient dominant de P_i est strictement positif
- la famille (P_i) est orthonormée.

Exercice 10 (Projection sur un sev de dimension finie) Soit E un ev (de dimension éventuellement infinie) muni d'un produit scalaire et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille orthonormée de E. On note $F = \operatorname{vect}(u_1, \dots, u_n)$.

(a) Démontrer que $F \oplus F^\perp = E$ et $F^{\perp\perp} = F$ (on utilisera la projection associée aux u_i).

(b) Soit $x \in E$. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \langle x, u_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 11 (Composition de projecteurs) Soient F, G deux sev d'un ev euclidien E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = id_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

Exercice 12 ($F + F^\perp \neq E$) Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire : $\langle f, g\rangle = \int_{t=0}^1 f(t)g(t)\,dt$, et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 13 Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $\varphi(f, g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire.

2) Soit $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f'' = f\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux et exprimer la projection orthogonale sur W.

3) Soit $E_{\alpha\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\inf\limits_{f \in E_{\alpha\beta}} \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t))dt$.

Exercice 14 (Décomposition QR) 1. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs T, uniques telles que $M = PT$.

2. Application : inégalité de Hadamard. Soit E un espace vectoriel euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée, et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs quelconques.

   Démontrer que $|\det_{(e_i)}(u_j)| \leq \prod_j \|u_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 15 (Extrait du CC1 2012) On munit $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3, du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 P(X)Q(X)\,dX$.
(on ne demande pas de vérifier que c'est un produit scalaire).

1) Calculer la matrice représentative de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dans la base $(e_0, e_1, e_2, e_3) = (1, X, X^2, X^3)$.

2) Soit $H = \mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}_3[X]$. Calculer une base orthonormée de $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. (on pourra appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.)

3) Soit $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3$. Calculer le projeté orthogonal de P sur H et en déduire la distance $d(P, H)$.

Exercice 16 (Extrait du CC1 2013) Soit un entier $n \geq 2$ fixé. On note $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq 2n-1$ que l'on munit de la base canonique $\mathcal{B}=(e_0, \dots, e_{2n-1})$ (celle où $e_k(X)=X^k$).

Pour $P, Q \in E$, on définit

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} t(PQ)'(t)\,dt.$$

Le but de cet exercice est de montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique dont la forme quadratique q associée a pour signature $(2, 2n-2)$ et que donc φ est non-dégénérée.

-A-

1) Vérifier que φ définit une forme bilinéaire symétrique sur E.

2) Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.

3) En déduire dans le cas $n = 2$ le rang de φ.

On note

$$\mathcal{P}=\{P \in E |\, P(-X)=P(X)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}=\{P \in E |\, P(-X)=-P(X)\}$$

respectivement les sous-espaces des *polynômes pairs* et des *polynômes impairs*.

4) Vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{J}$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension n et qu'ils sont supplémentaires orthogonaux pour φ.

-B-

Dans cette partie on ne s'intéresse à la forme φ qu'<u>en restriction au sous-espace</u> $\mathcal{P}$ et on considère la forme linéaire

$$f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$$

définie par $f(P) = P(1)$. On pose $F=\operatorname{Ker} f$ et on note $F^{\perp}$ le φ-orthogonal de F (dans $\mathcal{P}$).

1) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\forall\, P, Q \in \mathcal{P}, \quad \varphi(P,Q) = 2f(P)f(Q) - \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

En déduire que q est de signe défini sur le sous-espace vectoriel F. Quel est ce signe ?

2) Que vaut $\dim F$?

3) En utilisant que $<P,Q>= \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{P}$, établir la décomposition

$$\mathcal{P} = F \oplus F^{\perp}.$$

4) Du signe de $q(e_2)$ et de 1), en déduire que q est de signe positif sur $F^{\perp}$ puis que la signature de q est égale à $(1, n-1)$ sur $\mathcal{P}$ [considérer pour commencer une base φ-orthogonale adaptée].

5) Qu'y aurait-il à changer au début de cette partie B pour montrer de manière analogue que la signature de q est égale à $(1, n-1)$ sur $\mathcal{J}$?

6) Conclure.