Feuille d'exercices 4 : endomorphismes adjoints et orthogonaux

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel euclidien de base $e = (e_1, \cdots, e_n)$ (qu'on ne suppose pas orthonormée). Soit $G = (\langle e_i, e_j \rangle)$ la matrice de Gram des e_i.
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, de matrice A dans la base e.

a) Pourquoi la matrice G est-elle inversible ? (si e n'était pas une base que vaudrait $\operatorname{rg} G$?)

b) Montrer que l'adjoint u^* de u a pour matrice $A^* = G^{-1}{}^tAG$ dans la base e.

c) A quelle condition u est-il auto-adjoint ? orthogonal ?

Exercice 2 Calculer l'adjoint des endomorphismes suivants. Ces endomorphismes sont-ils orthogonaux ? auto-adjoints ?

a) $u(e_1) = e_1 + 2e_2$, $u(e_2) = 3e_1 + 4e_2$, où (e_1, e_2) est une base orthonormée de E.

b) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle \sum a_i X^i, \sum b_i X^i \rangle = \sum a_i b_i$,

$$u_1 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & X \\ X & \longrightarrow & X^2 \\ X^2 & \longrightarrow & 1 \end{array} \right. , \quad u_2 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & X \\ X & \longrightarrow & X^2 \\ X^2 & \longrightarrow & 0 \end{array} \right. , \quad u_3 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & X \\ X & \longrightarrow & 1 \\ X^2 & \longrightarrow & 0 \end{array} \right.$$

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle \sum a_i X^i, \sum b_i X^i \rangle = \sum a_i b_i$, les endomorphismes suivants admettent-ils un adjoint ? Si oui, sont-ils orthogonaux, auto-adjoints ?

a) $X^i \mapsto X^{i+1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

b) $X^i \mapsto 1$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A$ et $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 5 Compléter

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

en une matrice orthogonale. Quelle isométrie de $\mathbb{R}^3$ définit-elle ?

Exercice 6 (Expressions analytiques) Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcl} 3X & = & -2x + 2y - z \\ 3Y & = & 2x + y - 2z \\ 3Z & = & -x - 2y - 2z \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcl} 4X & = & -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4Y & = & x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4Z & = & -x\sqrt{6} + 3y + z \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{rcl} 7X & = & -2x + 6y - 3z \\ 7Y & = & 6x + 3y + 2z \\ 7Z & = & -3x + 2y + 6z \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{rcl} 9X & = & 8x + y - 4z \\ 9Y & = & -4x + 4y - 7z \\ 9Z & = & x + 8y + 4z \end{array} \right. \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{rcl} 4X & = & -x + 3y - z\sqrt{6} \\ 4Y & = & 3x - y - z\sqrt{6} \\ 4Z & = & x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{rcl} 3X & = & 2x - 2y + z \\ 3Y & = & -2x - y + 2z \\ 3Z & = & x + 2y + 2z \end{array} \right.$$

Exercice 7 (Compositions de symétries) Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G.

a) Si $F \perp G$, montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

b) Si $F \subset G$, montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.

c) Montrer que si F et G sont des hyperplans, s_F et s_G commutent ssi $F = G$ ou $F^\perp \subset G$.

Exercice 8 Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f_t de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M_t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} t & -2 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'unique valeur t_0 pour laquelle M_{t_0} est orthogonale.

2) Décrire géométriquement la transformation f_{t_0}.

Contrôle continu du mercredi 18 avril 2012, 8h-9h30

Exercice 1 (Questions de cours)

1) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $v \in E \setminus \{0\}$. Montrer que

   (a) la symétrie orthogonale s rapport à l'hyperplan $v^\perp$ satisfait $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x, v\rangle}{||v||^2} v$.

   (b) la matrice de s dans une base orthonomée est $S = I_n - 2\dfrac{V \cdot V^t}{V^t \cdot V}$, où V est le vecteur colonne représentant v dans cette base.

2) Soit $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ une matrice orthogonale.

   (a) Montrer que A admet au moins un vecteur propre, de valeur propre $\lambda \in \{-1, 1\}$.

   (b) Montrer que si $\lambda = 1$ est valeur propre unique de A, A est la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 Les formes quadratiques suivantes définissent-elles des produits scalaires ?

(a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 14x_2x_3$ sur $\mathbb{R}^3$,

(b) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ sur $\mathbb{R}^3$,

(c) $q(P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2$ sur $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 3 Montrer que la matrice suivante est orthogonale, et déterminer la nature de l'isométrie associée (axe(s) invariant(s), angle si rotation) :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ -4 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{E}$ et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Montrer que si $u^* = u$ et $u(F) \subset F$ alors $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

2) On suppose que F un espace propre de u. Montrer que si $u \circ u^* = u^* \circ u$, alors $u(F^\perp) \subset F^\perp$.