L2 MAT401

CC1, 08/03/2017

Exercice A (Questions de cours)

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur un espace E.

A.1. Etant donnée une partie non vide A de E, rappeler la définition de son orthogonal $A^{\perp}$ relativement à ϕ.

A.2. Montrer que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

A.3. Etant donnés A, B des sous-espace vectoriels de E, montrer que $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

Exercice B

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$q(x, y, z) = 3y^2 + 8z^2 + 4xy + 6xz + 12yz.$$

B.1. Déterminer la forme polaire φ de q.

B.2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

B.3. Décomposer q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes, en appliquant scrupuleusement la méthode de Gauss.

B.4. Calculer la signature de q.

B.5. Quel est le rang de q ?

B.6. La forme quadratique q est-elle dégénérée ?

B.7. Trouver une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour φ.

Exercice C

Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, et soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

C.1. Donner un exemple simple où

$$W^{\perp} \cap W \neq \{0\}.$$

C.2. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$;
2. $\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$;
3. La restriction de q à W est non dégénérée.

Exercice D

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que $q(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

D.1. Montrer que la signature de q vaut $(1, 1)$.

D.2. Montrer que le cône isotrope $C(q)$ de q est l'union de deux droites vectorielles.