TD4/TP4: Marches aléatoires en environnement aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Exercice 1 On se donne une suite de réels $(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $]0,1[$. On note alors pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\rho_i = \frac{1-\omega_i}{\omega_i}.$$

On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de probabilités de transition données par

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \begin{cases} \omega_{X_n}, & \text{si y=x+1} \\ 1-\omega_{X_n}, & \text{si y=x-1} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère la fonction $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ donnée par

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1,$$

$$f(k) = 1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \cdots + \rho_1 \cdots \rho_{k-1}, \quad k > 1,$$

$$f(k) = -\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0\rho_{-1}} + \cdots + \frac{1}{\rho_0\rho_{-1}\cdots\rho_{k+1}}\right), \quad k < 0.$$

1. Montrer que $f(k+1) - f(k) = \rho_k(f(k) - f(k-1))$.
2. En déduire que $M_n = f(X_n)$ est une martingale.
3. Montrer que
$$f(+\infty) := \lim_{k\to\infty} f(k), \quad \text{et} \quad f(-\infty) := \lim_{k\to-\infty} f(k)$$
existent dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
4. En utilisant le théorème de convergence p.s. des martingales, en déduire que
   - $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ p.s. si $f(-\infty) = -\infty$ et $f(+\infty) < +\infty$
   - $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ p.s. si $f(-\infty) > -\infty$ et $f(+\infty) = +\infty$
   - $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty) > 0$ et $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty) > 0$ si $f(-\infty) > -\infty$ et $f(+\infty) < +\infty$. Calculer ces probabilités.
   - la chaîne est récurrente si $f(-\infty) = -\infty$ et $f(+\infty) = +\infty$.

On suppose maintenant que les $(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont aussi aléatoires et i.i.d. de loi μ sur $]0,1[$. On suppose toujours que $\log\rho$ est intégrable sous la loi μ. Une fois la réalisation de $(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ fixée, le processus (X_n) est la chaîne de Markov décrite ci-dessus.

5. Simuler la chaîne dans le cas où les (ω_i) sont des v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $]0,1[$. Que constate-on? Simuler avec une loi non centrée (par exemple une loi beta).
6. Montrer que si $\mathbb{E}_\mu(\log\rho) < 0$ (resp. > 0) alors $X_n \to \infty$ p.s. (resp. $X_n \to -\infty$ p.s.).
7. Montrer que la chaîne est récurrente si $\mathbb{E}_\mu(\log\rho) = 0$.