TP : Statistique Metropolis-Hasting pour simulation du modèle Ising

January 5, 2017

1 Algorithme de Metropolis-Hasting pour le modèle d'Ising

L'objectif ici est de simuler une variable aléatoire Z à valeur dans $\{-1,1\}^{N^2}$ (avec $N = 100$), avec une loi de probabilité donnée par :

$$\mathbb{P}(Z = z) = \frac{1}{M_T} e^{-\frac{H(z)}{T}}, \tag{1}$$

avec

$$H(z) = -\sum_{i,j,k,l \in [1,N],(i,j)\sim(k,l)} z(i,j)z(k,l),$$

où $T > 0$ désigne la température et M_T est la constante de normalisation. On prendra dans un premier temps $T = 1$. Du point de vue physique, $Z(i,j)$ représente l'orientation du spin en (i,j) (modèle de magnétisation des matériaux).

Remarque : Pour simplifier la programmation et éviter les effets de bords, on définira le modèle d'Ising sur $\{2, \cdots, N+1\}^2$ et on fixera $z(i,j) = 0$ au bord, c'est-à-dire si i ou j égal 1 ou $N+2$.

1. Mettre en place l'algorithme de Metropolis-Hasting (sur Scilab ou matlab) pour simuler des réalisations de Z. On choisira la loi de proposition suivante : on tire un point (i,j) au hasard sur $\{2, \ldots, N+1\}^2$ et on propose de changer le spin $Z(i,j)$ en $-Z(i,j)$.

   Montrer que Metropolis-Hasting donne l'algorithme suivant : si on se trouve en la configuration Z au temps n, on tire un point (i,j) au hasard sur $\{2, \ldots, N+1\}^2$ et on modifie $Z(i,j)$ en $-Z(i,j)$ avec une probabilité $\rho = \min(1, A)$ où

   $$A = \exp(-\frac{2}{T}Z(i,j)(Z(i+1,j) + Z(i,j+1) + Z(i-1,j) + Z(i,j-1))).$$

   Justifier en particulier la symétrie du noyau de transition de référence.

2. A quoi correspondrait l'algorithme de Gibbs (avec choix de marginal aléatoire)?

3. Observer l'évolution de la chaîne de Markov ainsi définie en utilisant la fonction drawnow et image en matlab (ou drawnow,drawlater et Matplot en scilab). Partir d'une condition initiale aléatoire (on tire chaque spin au hasard).

4. Modifier le paramètre T. Comment semble influer la température ? Faite un recherche sur internet avec "Ising 2D".

2 Influence de la magnétisation

On considère maintenant le même modèle mais on change la fonction H en

$$H(z) = \frac{C}{2} \sum_{i,j \in [1,N]} r(i,j)z(i,j) - \sum_{i,j,k,l \in [1,N], (i,j) \sim (k,l)} z(i,j)z(k,l),$$

où $r(i,j)$ est une fonction donnée a priori et $C \geq 0$ est un paramètre

1. Modifier l'algorithme pour simuler cette nouvelle loi en prenant $r(i,j) = \mathbf{1}_{i \leq \frac{N}{2}} - \mathbf{1}_{i > \frac{N}{2}}$ et $C = 1$.

2. Qu'observe-t'on? Modifier le paramètre C, T. Expliquer intuitivement le phénomène.

3 Application à un modèle de débruitage d'image.

On propose dans cette section un modèle élémentaire de débruitage pour une image noir/blanc, basée sur les idées de statistique Bayesienne.

On suppose maintenant que $Z(i,j)$ représente une image à deux couleurs noir/blanc ($Z(i,j)$ joue le rôle du paramètre inconnu à retrouver). On observe une image bruitée : on suppose que l'image observée est $X(i,j)$ où chaque pixel de $Z(i,j)$ est modifiée avec probabilité p (p connu, on prendra $p = 1/10$ dans un premier temps).

On propose maintenant la loi a priori suivante sur $(Z(i,j))$: on suppose que $(Z(i,j))$ est distribuée suivant la loi du modèle d'Ising sans magnétisation ($C = 0$). (On choisira $T = 1$ dans un premier temps).

1. Ecrire la fonction de vraisemblance $f(X|Z)$ de X sachant Z. En déduire que la loi a posteriori de Z est un modèle d'Ising avec magnétisation avec $r(i,j) = X(i,j)$ et $C = \log(\frac{1-p}{p})$.

2. En déduire une méthode pour faire une simulation de Z sous la loi a posteriori.

3. Implémenter l'algorithme de la façon suivante
   - Prendre $N = 200$ et pour $Z(i,j)$ un damier de 10×10
   - Simuler l'image bruitée $X(i,j)$ à partir de Z.
   - implémenter l'algorithme de la section 1 pour simuler Z sous la loi a posteriori.

4. Expliquer le phénomène de débruitage de l'image. Quelle est l'influence de la température? Essayer avec d'autres valeurs de p (0.2 par exemple) et d'autres valeurs de la température.