Chapitre I : Matrices

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Premières définitions :

Déf : Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- A est dite de taille $n \times p$ si le tableau a n lignes et p colonnes
- Les éléments du tableau sont appelés les coeff. de la matrice
- L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ou $A = (a_{ij})$ si pas d'ambiguïté sur n et p.

Le coefficient à la i-ème ligne et j-ème colonne de A est a_{ij}.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rightarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j\text{-ème colonne} & \end{array}$$

Exemples :

Vocabulaire : Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$

* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ on dit que A est une matrice réelle

* La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coeff sont nuls est appelée la matrice nulle. On la note $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ ou 0.

* Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Si $p = 1$ on dit que A est une matrice colonne ou un vecteur colonne : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Si $n = 1$ on dit que A est une matrice ou un vecteur ligne

$A = (a_{11} \; a_{12} \quad a_{1p}) \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Si $n = p$ on dit que A est une matrice carrée. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices à n lignes et n colonnes.

Déf : (Somme de matrices)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle somme de la matrice A et de la matrice B et on note $A+B = (c_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$$

⚠ On ne peut sommer deux matrices que si elles sont de même taille.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

L'addition est une opération interne de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

<u>Propriétés</u> : Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- L'addition est associative :

$$A + (B+C) = (A+B) + C$$

- La matrice nulle est un élément neutre de l'addition

$$A + 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} + A = A$$

- Toute matrice $A = (a_{ij})$ a un inverse noté $-A$ par l'addition et cet "inverse pour l'addition" est la matrice :

$$-A = (-a_{ij})$$

On a alors $A + (-A) = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\cdot)}$

- L'addition est commutative : $A + B = B + A$

<u>Déf</u> (Multiplication par un scalaire)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle produit de la matrice A par le scalaire α la matrice $\alpha . A = (\alpha a_{ij})$.

<u>Exemple</u> :

<u>Remarque</u> : On remarque que $-A = (-1).A$

On définit la différence entre deux matrices : $A - B = A + (-1).B$

Proposition : Pour toutes matrices $A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tous $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$:

i) $(\alpha+\beta).A = \alpha.A+\beta.A$

(ii) $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$

(iii) $(\alpha\times\beta).A = \alpha.(\beta.A) = \beta.(\alpha.A)$

(iv) $1.A = A$

Preuve : Démontrons ii). Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Le terme général de $A+B$ est $a_{ij}+b_{ij}$. Donc le terme général de $\alpha.(A+B)$ est $\alpha(a_{ij}+b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}$. Or $\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}$ est le terme général de la matrice $\alpha.A+\alpha.B$. Donc les matrices $\alpha.(A+B)$ et $\alpha.A+\alpha.B$ ont mêmes coefficients. Elles sont donc égales.

Dans la suite on écrira αA au lieu de $\alpha.A$.

Déf (Matrices élémentaires)

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$

On définit la matrice E_{ij} comme étant la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec 1 à la i-ème ligne et à la j-ième et des zéros ailleurs :

$$E_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \to i\text{-ième ligne} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j\text{-ième colonne} & \end{array}$$

Les matrices $E_{ij} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ sont appelées les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

II) Multiplication de matrices :

1) Définitions :

Le produit AB de deux matrices A et B n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B :

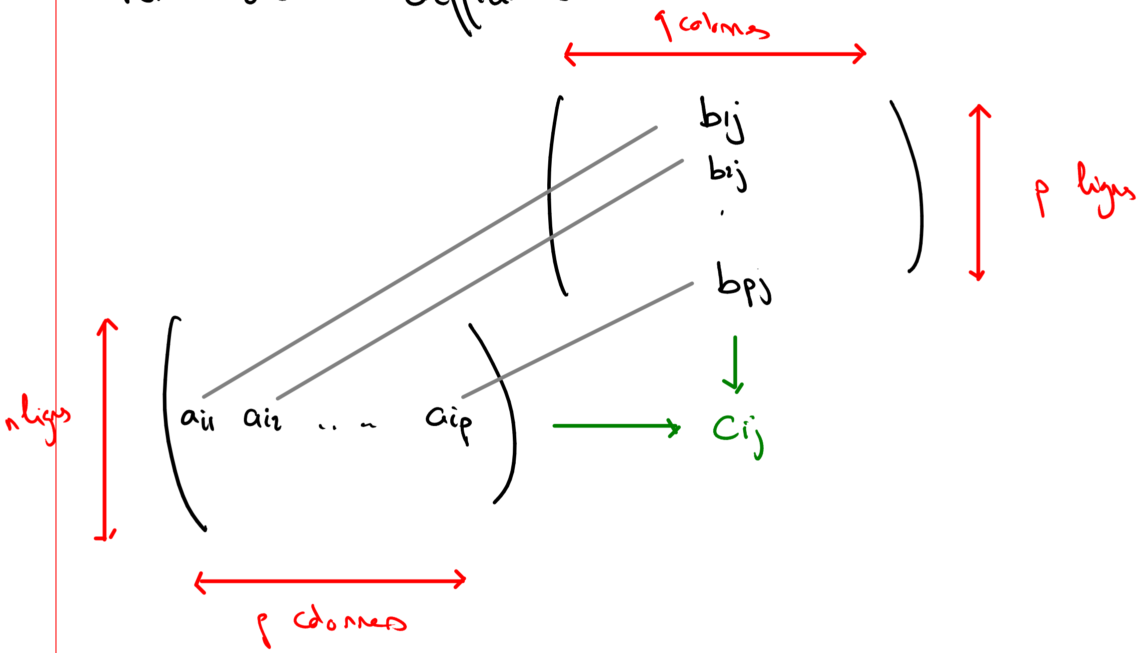
Déf : Soit $n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Alors le produit $C = AB$ est la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$$

Concrètement : pour calculer le coefficient de AB qui se trouve à la i-ème ligne et à la j-ème colonne, on prend la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B et calcul la somme des produits terme à terme de leur coefficients :



$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

2) Exemple :

3) Propriétés :

Proposition :

i) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors :

$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{(distributivité)}$$

ii) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ alors :

$$(AB)C = A(BC) \qquad \text{(associativité)}$$

Preuve :

4) Produit par blocs :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où $\begin{cases} n = n_1 + n_2 \\ p = p_1 + p_2 \end{cases}$. On peut écrire A sous forme de blocs :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow n_1 \text{ lignes} \\ \updownarrow n_2 \text{ lignes} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\leftrightarrow}{p_1 \text{ colonnes}} & \overset{\leftrightarrow}{p_2 \text{ colonnes}} \end{array} & \end{array}$$

Ici $A_{11} \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $A_{12} \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$, $A_{21} \in \mathcal{M}_{n_2,p_1}(\mathbb{K})$ et $A_{22} \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$ sont des matrices.

Soit $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ avec $q = q_1 + q_2$. On peut aussi écrire B par blocs :

$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \updownarrow p_1 \text{ lignes} \\ \updownarrow p_2 \text{ lignes} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \overset{\leftrightarrow}{q_1 \text{ colonnes}} & \overset{\leftrightarrow}{q_2 \text{ colonnes}} \end{array} & \end{array}$$

On veut calculer le produit $AB = (c_{ik})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le q}}$.

Pour $(i,k) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, q_1]\!]$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} = \underbrace{\sum_{j=1}^{p_1} a_{ij} b_{jk}}_{\substack{\text{coeff } (i,k) \text{ de} \\ \text{la matrice} \\ A_{11} B_{11}}} + \underbrace{\sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} a_{ij} b_{jk}}_{\substack{\text{coeff } (i,k) \text{ de} \\ \text{la matrice} \\ A_{12} B_{21}}}$$

Pour $(i,k) \in [\![n_1+1, n_2]\!] \times [\![1, q_1]\!]$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} = \underbrace{\sum_{j=1}^{p_1} a_{ij} b_{jk}}_{\text{coeff } (i,k) \text{ de la matrice } A_{21}B_{11}} + \underbrace{\sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2} a_{ij} b_{jk}}_{\text{coeff } (i,k) \text{ de la matrice } A_{22}B_{21}}$$

Même calcul quelque soit la position de i par rapport à n_1 et de k par rapport à q_1. On peut donc écrire

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

On peut donc faire le calcul du produit avec les blocs comme si A et B étaient des matrices de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$.

Ce principe se généralise à un nombre quelconque de blocs dès lors que la partition des colonnes de A coïncide avec celle des lignes de B.

II) Anneau des matrices carrées d'ordre n :

1) La matrice identité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice identité de taille n est la matrice carrée :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ...

Soit δ_{ij} le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Alors $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\underbrace{I_n}_{n\times n} \underbrace{A}_{n\times p} = A \quad \text{et} \quad \underbrace{A}_{n\times p} \underbrace{I_p}_{p\times p} = A$$

Preuve : On note $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et $C = AI_p = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,\delta_{kj}$$

$$= a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + \dots + a_{ip}\delta_{pj}$$

$$= a_{ij}\,\delta_{jj} = a_{ij}$$

Donc $C = A$ c-a-d $AI_p = A$.

Exemple :

2) Puissance de matrices carrées :

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la multiplication de matrices est une opération interne :

$$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

En particulier on peut multiplier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par elle-même : $A \times A$

<u>Déf :</u> Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit les puissances successives de A :

* Si $p = 0$, $A^0 = I_n$
* Si $p \geq 1$, $A^p = A^{p-1} \times A$

Donc $A^0 = I_n$, $A^1 = A^0 \times A = I_n A = A$, $A^2 = A^1 \times A = A \times A$.

$A^3 = A^2 \times A = A \times A \times A$ ...

<u>Exemples :</u>

1) On veut calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) Puissances d'une matrice diagonale :

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Matrices nilpotentes :

Il existe des matrices carrées dont toutes les puissances à partir d'un certain rang sont nulles.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N^4 = N^3 . N = 0, \quad N^5 = 0, \ldots$$

3) Identités remarquables :

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$) :

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, $\quad (a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$

Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (A+B)A + (A+B)B$$
$$= A^2 + BA + AB + B^2$$

En général $AB \neq BA$ donc on peut pas écrire $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Proposition : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\boxed{AB = BA}$ et soit $p \in \mathbb{N}$. Alors :

i) $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ (Formule du binôme de Newton)

ii) $A^p - B^p = (A-B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$

Exemple pour ii) : $A^2 - B^2 = (A-B)\sum_{k=0}^{1} A^k B^{1-k} = (A-B)(B+A)$

$$A^3 - B^3 = (A-B)\sum_{k=0}^{2} A^k B^{2-k} = (A-B)(B^2 + AB + A^2)$$

Preuve :

i) Comme pour les scalaires : par récurrence sur p en utilisant l'hypothèse $AB = BA$.

ii)

Remarque : Sommes télescopiques :

$$\sum_{k=0}^{N} (u_{k+1} - u_k) = (\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + (\cancel{u_3} - \cancel{u_2}) + \dots + (\cancel{u_{N-1}} - \cancel{u_{N-2}}) + (\cancel{u_N} - \cancel{u_{N-1}}) + (u_{N+1} - \cancel{u_N})$$
$$= u_{N+1} - u_0$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} (u_{k+1} - u_k) = u_N - u_2$$

$$\sum_{k=3}^{N+1} (u_k - u_{k-1}) = u_{N+1} - u_2$$

Application : La formule du binôme de Newton s'utilise souvent pour calculer des puissances de matrices de la forme $A = I_n + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exemple : On veut calculer A^p pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$.

On a donc : $A^p = (I_3 + N)^p$. Comme $\boxed{I_3 N = N I_3}$ on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

4) Inverse d'une matrice carrée :

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = I_n \text{ et } BA = I_n$$

Cette matrice est alors unique. On la note A^{-1} et on l'appelle l'inverse de la matrice A.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque : on verra plus tard que $AB = I_n \iff BA = I_n$

Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible on peut définir A^p pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Si $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ alors $-p \in \mathbb{N}^*$ et on pose :

$$A^p = (A^{-1})^{(-p)} = \underbrace{(A^{-1}) \cdots (A^{-1})}_{-p \text{ fois}}$$

Exemple :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$

Donc $AB = I_2 \iff \begin{cases} a+2c = 1 \\ b+2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2/3 \\ c = 0 \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}$

Donc pour $B = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ on a que $AB = I_2$.

Et on vérifie que $BA = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet :

Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3b & 0 \\ 2c-3d & 0 \end{pmatrix}$.

donc BA peut pas être égale à I_2.

<u>Remarque :</u> Si dans une matrice l'une des lignes ou l'une des colonnes est nulle alors la matrice n'est pas inversible. Voir plus tard.

<u>Proposition :</u> (Propriétés de l'inverse)

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$.

1) L'inverse de A est unique.

$$\left.\begin{array}{l} AB_1 = I_n \text{ et } B_1A = I_n \\ AB_2 = I_n \text{ et } B_2A = I_n \end{array}\right\} \Rightarrow B_1 = B_2$$

2) L'inverse de A^{-1} est A ; $(A^{-1})^{-1} = A$

3) Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

<u>Preuve :</u> ♥

1) On calcule B_2AB_1 de deux façons :

$$\left.\begin{array}{l} B_2AB_1 = B_2(AB_1) = B_2 I_n = B_2 \\ B_2AB_1 = (B_2A)B_1 = I_n B_1 = B_1 \end{array}\right\} \text{Donc } B_1 = B_2$$

2) Evident. En effet $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$.

3) Calculons $AB \times B^{-1}A^{-1}$ et $B^{-1}A^{-1} \times AB$;

$$AB \times B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$B^{-1}A^{-1} \times AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

Donc $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ∎

Généralisation de 3) : Si $A_1, \dots A_p \in Gl_n(\mathbb{K})$ alors $A_1A_2\dots A_p \in Gl_n(\mathbb{K})$ et :
$(A_1A_2\dots A_p)^{-1} = A_p^{-1}A_{p-1}^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Proposition (simplification par une matrice inversible)

1) Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = AC$.
Si A est inversible alors $B = C$

2) Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = CA$
Si A est inversible alors $B = C$

Preuve : ♥

1) On a $AB = AC$. On multiplie cette égalité par A^{-1} à gauche :
$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$.

2) On multiplie $BA = CA$ par A^{-1} à droite :
$BA = CA \Rightarrow (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = C(AA^{-1}) \Rightarrow B = C$

IV) Opérations élémentaires et méthode du pivot de Gauss :

1) Opérations élémentaires :

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A.

On appelle opération élémentaire (OE) sur les lignes (respectivement sur les colonnes) de A toute transformation de la matrice A de l'un des 3 types suivants :

Type I : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$
" à la ligne i on ajoute $\lambda \times$ la ligne j "
(resp $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$)

Type II : $L_i \leftarrow \varrho L_i$ avec $\varrho \in \mathbb{K}$, $\varrho \neq 0$.
" on multiplie la ligne i par $\varrho \neq 0$"
(resp $C_i \leftarrow \varrho C_i$)

Type III : $L_i \leftrightarrow L_j$ avec $i \neq j$.
" on échange les i et j ".
(resp $C_i \leftrightarrow C_j$)

Remarques :

1) on peut généraliser I : ajouter à L_i une combinaison linéaire d'autres lignes :
$L_i \leftarrow L_i + \lambda_1 L_{j_1} + \lambda_2 L_{j_2} + \dots \lambda_q L_{j_q}$ avec $j_1 \neq i$, $j_2 \neq i$ … $j_q \neq i$.

2) ⚠ $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ $(i \neq j)$ n'est pas une OE. On ne mélange pas types I et II dans la même opération.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Interprétation matricielle des OE :

Type I :

Pour $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ posons $T_{ij}(\alpha)$ la matrice carrée définie par :

$$T_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 \quad \alpha & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow i\text{-ème ligne} \\ \downarrow \\ j\text{-ème colonne} \end{array} = I + \alpha E_{ij}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;

- Soit $T_{ij}(\alpha)$ de taille $n \times n$. La matrice $T_{ij}(\alpha) A$ est déduite de A par l'OE : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- Soit $T_{ij}(\alpha)$ de taille $p \times p$. La matrice $A\,T_{ij}(\alpha)$ est déduite de A par l'OE : $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$

La matrice $T_{ij}(\alpha)$ est inversible et son inverse est $T_{ij}(-\alpha)$.

Exemple :

$$T_{12}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{12}(2)A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Donc $T_{12}(2)A \Leftarrow L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

Type II :

Par i fixé et $e \neq 0$ posons $\Delta_i(e)$ la matrice carrée :

$$\Delta_i(e) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & e & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \end{array} \\ \downarrow i\text{ème colonne} & \end{array}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

* Soit $\Delta_i(e)$ de taille $n \times n$. La matrice $\Delta_i(e)A$ se déduit de A par l'OE : $L_i \leftarrow eL_i$

* Soit $\Delta_i(e)$ de taille $p \times p$. La matrice $A\Delta_i(e)$ se déduit de A par l'OE : $C_i \leftarrow eC_i$

La matrice $\Delta_i(e)$ est inversible et son inverse $\Delta_i(e^{-1})$

Exemple : $$\Delta_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $$\Delta_3(2)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Type III :

Pour $i \neq j$ on définit la matrice carrée P_{ij} :

$$P_{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&& 0\\
&\ddots&&&&&&&&\\
&&0&&&&1&&&\\
&&&1&&&&&&\\
&&&&\ddots&&&&&\\
&&&&&1&&&&\\
&&1&&&&0&&&\\
&&&&&&&1&&\\
&&&&&&&&\ddots&\\
0&&&&&&&&&1
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix} \\ \\ \to i \\ \\ \\ \\ \to j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\\
\begin{matrix} \quad\quad\quad \downarrow & \quad\quad\quad\quad \downarrow \\ \quad\quad\quad i & \quad\quad\quad\quad j \end{matrix} &
\end{array}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

* Soit P_{ij} de taille $n \times n$. $P_{ij}A$ se déduit de A par l'OE
  $L_i \leftrightarrow L_j$
* Soit P_{ij} de taille $p \times p$. AP_{ij} se déduit de A par l'OE
  $C_i \leftrightarrow C_j$

Remarque : La matrice P_{ij} est inversible et son inverse est P_{ij} :

$$P_{ij} \, P_{ij} = I$$

Exemple : $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_{13}A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Matrices échelonnées et matrices réduites :

Déf : 1) Une matrice est dite échelonnée en lignes si le nombre de zéros commençant une ligne (de gauche à droite) croît strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

2) Une matrice est dite échelonnée en lignes et réduite si de plus :

- le premier terme non nul d'une ligne non nulle vaut 1
- c'est le seul terme non nul de sa colonne

Exemples :

Matrices échelonnées en lignes :

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Matrices échelonnées et réduites :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\ }$: pivot

Théorème : (Pivot de Gauss)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice échelonnée réduite U obtenue à partir de A par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

Preuve :

On admet l'unicité. On prouve l'existence.

Etape 1 (passage à une forme échelonnée)

1er cas : $\exists i$ tq $a_{i1} \neq 0$

* On fait $L_1 \leftrightarrow L_i$ pour se ramener au cas où $a_{11} \neq 0$
* Dans la matrice obtenue on fait

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1 \quad \text{pour} \quad i = 2, \dots, n.$$

On obtient une matrice de la forme :

$$A' = \left(\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & * & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & & & \\ \vdots & & & N & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right)$$

* On recommence avec N. Dans A' les GE sur les lignes d'indice ≥ 2 ne modifient pas la 1ère colonne.

2ème cas : $C_1(A) = C_2(A) = \dots = C_k(A) = 0$ et $C_{k+1}(A) \neq 0$ c-a-d

$$A = (\underbrace{0}_{k \text{ colonnes nulles}} \mid A_1)$$

Dans ce cas on travaille sur A_1 comme dans le 1er cas.

Étape 2 : (passage à une matrice échelée réduite)

À l'issue de l'étape I on obtient une matrice échelonnée en lignes. On repère alors le premier terme non nul de chaque ligne non nulle et (le pivot) et on divise la ligne par le terme grâce à une OE de type II.

On obtient une matrice de ce type :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$*$ coeffs. quelconques

$\boxed{}$ pivots égaux à 1.

Il reste à "éliminer" les termes au dessus des pivots.

Si la matrice est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ on travaille sur A_1.

On se ramène donc au cas où $a_{np} = 1$:

$$\left(\begin{array}{c|c} & a_{1p} \\ * & a_{2p} \\ & \vdots \\ & a_{n-1\,p} \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pour $i = 1, \dots, n-1$ on fait $L_i \leftarrow L_i - a_{ip} L_n$.

On obtient $\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ N & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & 1 \end{array}\right)$ où N est une matrice échelonnée avec des pivots égaux à 1.

Puis on recommence avec N et ainsi de suite jusqu'à obtenir une matrice échelonnée réduite.

<u>Exemple :</u>

Etape 1 : passage à une matrice échelonnée en lignes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$ $$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{12} A$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1$ $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = T_{31}\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{12} A$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = T_{32}(-1)\, T_{31}\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{12} A$$

← matrice échelonnée

Etape 2 : passage à une forme échelonnée réduite

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$

$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \Delta_3\left(-\tfrac{1}{2}\right)\Delta_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\Delta_1\left(\tfrac{1}{2}\right) T_{32}(-1)\, T_{31}\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{1L}\, A$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{23}(-3)\, T_{13}(-4)\, \Delta_3\left(-\tfrac{1}{2}\right)\Delta_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\Delta_1\left(\tfrac{1}{2}\right) T_{32}(-1)\, T_{31}\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{1L}\, A$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{12}(-2)\, T_{23}(-3)\, T_{13}(-4)\, \Delta_3\left(-\tfrac{1}{2}\right)\Delta_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\Delta_1\left(\tfrac{1}{2}\right) T_{32}(-1)\, T_{31}\left(\tfrac{1}{2}\right) P_{1L}\, A$$

$\leftarrow$ matrice échelonnée réduite.

IV) Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On applique la méthode du pivot de Gauss pour obtenir une matrice échelonnée en lignes et réduite :

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ correspondant à une suite d'OE et une matrice échelonnée réduite U de taille $n \times n$ telles que :

$$\underbrace{U}_{n\times n} = \underbrace{P}_{n\times n}\underbrace{A}_{n\times n}$$

Or une matrice échelonnée réduite U de taille $n \times n$ vérifie : * soit $U = I_n$

* soit la dernière ligne de U est nulle.

* Dans le premier cas on a : $PA = I_n$ donc $P = A^{-1}$

* Dans le deuxième cas U n'est pas inversible car pour toute matrice carrée V, la dernière ligne de UV est nulle

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{V} = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq I_n$$

Donc A n'est pas inversible car sinon U serait inversible d'inverse $A^{-1}P^{-1}$.

Méthode de calcul de l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On applique à A des OE sur les lignes successives pour se ramener à une matrice échelonnée réduite U ;

On aplique simultanément les mêmes OE à la matrice identité.

Si on appelle $O_1, O_2, \ldots O_q$ les matrices de ces OE :

A est transformée en $O_q O_{q-1} \cdots O_2 O_1 A = U$

I_n est transformée en $O_q O_{q-1} \cdots O_2 O_1 I_n$

* Si $U = I_n$ on a $O_q O_{q-1} \cdots O_2 O_1 A = I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = O_q O_{q-1} \cdots O_2 O_1$ qui est la matrice obtenue en appliquant les même OE à I_n

* Si la dernière ligne de U est nulle alors A n'est pas inversible.

Exemple :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ A est-elle inversible. Si oui quelle est A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow (-1) L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

VI) Matrice triangulaire

Déf : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) A est dite triangulaire inférieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

On note $T_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

2) A est dite triangulaire supérieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemples :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Rq : $T_n^-(\mathbb{K}) \cap T_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales de taille $n \times n$.

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire.
Alors A est inversible si et seulement si tous les termes diagonaux sont non nuls

Exemples :

1) les deux matrices ci-dessus sont inversibles

2) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible

Preuve :

VII) Transposition et matrices symétriques / anti-symétriques :

Déf : Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La matrice transposée de A est la matrice

$$A^T = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

avec $a'_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} ; \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & & a_{np} \end{pmatrix}$$

Example :

Proposition :

1) $(A+B)^T = A^T + B^T, \quad \forall\, A,B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ \alpha \in \mathbb{K}$

3) $(A^T)^T = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

4) $(AB)^T = \underbrace{B^T}_{q \times p} \underbrace{A^T}_{p \times n}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$

5) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \iff A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Preuve :

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) On dit que A est symétrique si $A^T = A$;
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ji} = a_{ij}$

2) on dit que A est anti-symétrique si $A^T = -A$.
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ji} = -a_{ij}$

Rq : si A anti-symétrique alors $a_{ii} = -a_{ii}$ donc $a_{ii} = 0$
Dans une matrice anti-symétrique les termes diagonaux sont nuls

Exemples :

Théorème : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire :

$A = B + C$ avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétrique
$C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ anti-symétrique

et cette décomposition est unique.

Exemple :

VIII) Trace d'une matrice carré :

Déf : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On appelle trace de A et on note $Tr(A)$ le scalaire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{K}.$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ $\quad Tr(A) = 2 - 1 + 10 = 11$

Prop : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :

1) $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

2) $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$

3) $Tr(A^t) = Tr(A)$

4) $Tr(AB) = Tr(BA)$

Preuve :

IX) Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss :

1) Définitions

Déf : Soit a_{ij} pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ $n \times p$ coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit $y_1, \dots, y_n$ n coefficients dans $\mathbb{K}$.

On appelle système linéaire à n équations et p inconnues un système d'équations de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = y_n \end{cases}$$

Le p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est appelé l'inconnue du système.

Le n-uplet $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^p$ est appelé le second membre du système.

On appelle solution du système tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ qui vérifie toutes les équations du système.

Exemples :

1) Le système $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases}$ est un système linéaire à deux équations et deux inconnues. L'unique solution de ce système est le couple $(x,y) = \left(\frac{3}{25}, \frac{8}{25}\right)$

2) Le système $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$ est un système linéaire à deux équations et 3 inconnues. Ce système admet une infinité de solutions : $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 3x + 2y = 1 \text{ et } z = 0\}$

3) Le système $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ est un système linéaire à

3 équations et 3 inconnues. Ce système n'a pas de solutions. En effet on peut observer que la première et la dernière équations ne peuvent pas être simultanément vérifiées.

De manière générale on peut démontrer le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : Un système linéaire a soit une unique solution, soit une infinité de solutions, ou n'a pas de solutions.

2) Forme matricielle d'un système linéaire :

Considérons un système de n équations à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = y_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = y_n \end{cases}$$

Si on range les coefficients de ce système dans une matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et qu'on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors le

système s'écrit $\boxed{AX = Y}$. A s'appelle la matrice du système.

3) Résolution par la méthode du Pivot de Gauss :

Déf : * Un système linéaire est échelonné si le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

* Il est échelonné réduit si de plus :
  - Le premier coeff. non nul d'une ligne vaut 1.
  - c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Exemples :

1) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z - t = 5 \\ \quad -y - 2z = 4 \\ \qquad 3t = 1 \end{cases}$ est un système échelonné à 3 équations et 4 inconnues x, y, z, t.

2) $\begin{cases} x + 2z = 25 \\ y - 2z = 16 \\ t = 1 \end{cases}$ est un système échelonné réduit de 3 éq. et 4 inconnues.

Un système échelonné se résout très facilement en résolvant les équations "du bas vers le haut".

Dans l'exemple 2) ci-dessus on obtient : $\begin{cases} t = 1 \\ y = 16 + 2z \\ x = 25 - 2z \end{cases}$

Pour toute valeur de z, les valeurs x, y, t calculées ci-dessus fournissent une solution. Donc ce système admet une infinité de solutions qui sont données par :

$$S = \{ (25 - 2z, 16 + 2z, z, 1) \text{ tq } z \in \mathbb{R} \}.$$

Méthode de résolution :

Si on appelle A la matrice d'un système linéaire. Alors le système est échelonné si et seulement si A est échelonnée en lignes. Il est échelonné et réduit si et seulement si A est échelonnée en lignes et réduite.

On en déduit la méthode de résolution suivante :

* On aplique aux lignes d'équations du système les mêmes opérations élémentaires sur les lignes que celles permettant d'échelonner et réduire la matrice du système avec la méthode du Pivot de Gauss.

* A l'issue de ces opérations élémentaires, on obtient un système échelonné et réduit équivalent au système de départ, que l'on résout facilement en "remontant" les équations du bas vers le haut.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y + 7z = -1 \\ 2x - y + 5z = -5 \\ -x - 3y - 9z = -5 \end{cases}$$

__Remarque :__ La matrice A d'un système linéaire à n équations et n inconnues est une matrice carrée de taille $n \times n$. Si on note $(x_1, \dots, x_n)$ l'inconnue du système et $(y_1, \dots, y_n)$ le second membre. Alors le système s'écrit

$$AX = Y \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Si la matrice A est inversible alors on obtient le vecteur d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en calculant : $X = A^{-1}Y$. Le système a donc une solution unique.

Réciproquement, soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit le système à n équations et n inconnues avec second membre $(y_1, \ldots, y_n)$ associé :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Si ce système a une unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ qui s'exprime en fonction du second membre $(y_1, \ldots, y_n)$ sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ x_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

Alors la matrice A est inversible et son inverse est la matrice

$$A^{-1} = (b_{ij}).$$

<u>Exercice :</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

En résolvant un système linéaire, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

<u>Corrigé :</u> Soit (a, b, c) un second membre générique. On résout le système d'inconnue (x, y, z) associé à A et de second membre (a, b, c) :

$$A \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{matrix} b \\ c \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x \phantom{{}-y} - z = a \\ x - y = b \\ x - y + z = c \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = a \\ -y + z = b - a \\ -y + 2z = c - a \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2} L_2$$

$$\iff \begin{cases} x - z = a \\ y - z = a - b \\ -y + 2z = c - a \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} x - z = a \\ y - z = a - b \\ z = c - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a + z \\ y = a - b + z \\ z = c - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a - b + c \\ y = a - 2b + c \\ z = -b + c \end{cases}$$

Le système a une solution unique. Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$