Chapitre VI : Fractions rationnelles

I) Rappels sur les polynômes :

1) Définitions et opérations sur les polynômes :

Def : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: $\mathbb{K}[X]$.

Def : $P(X) = a_0 + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, ($a_n \neq 0$ et $a_i = 0$ si $i > n$)

Degré de P : $\deg P = n$.

Vocabulaire :

* $P(X) = a_0$: polynôme constant
* Polynôme nul : $a_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$. On le note $P = 0$.
* Par convention : $\deg(0) = -\infty$.
* $P(X) = a_0 + \dots + a_n X^n$. $a_n X^n$ est le terme dominant. $a_n \neq 0$ est le coefficient dominant.
* Si $a_n = 1$, on dit que P est unitaire.

Opérations :

$P(X) = a_0 + \dots + a_p X^p$; $Q(X) = b_0 + \dots + b_q X^q$; $\alpha \in \mathbb{K}$.

* $(P+Q)(X) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \dots + (a_n+b_n)X^n$ avec $n = \max(p,q)$
* $(\alpha P)(X) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)X + \dots + (\alpha a_p)X^p$
* $(P \times Q)(X) = c_0 + c_1 X + \dots + c_r X^r$ avec :

$r = p+q$ et $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, $\forall k \in [\![0,r]\!]$

Prop (Anneau des polynômes) :

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif c-à-d.

1) $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe commutatif :
   - i) $(P+Q)+R = P+(Q+R)$
   - ii) $P+0 = 0+P = P$
   - iii) Inverse de $P = a_0 + \dots + a_n X^n$: $-P = (-a_0) + \dots + (-a_n)X^n$.

2) $\times$ est associative : $(PQ)R = P(QR)$.

3) Elément neutre par $\times$: le polynôme constant $P(X) = 1$.

4) $\times$ est distributive par rapport à $+$:

$$R(P+Q) = RP + RQ$$
$$(P+Q)R = PR + QR$$

5) $\times$ est commutative : $PQ = QP$.

Prop : $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Autres opérations :

$P(X) = a_0 + \dots + a_p X^p$; $Q(X) = b_0 + \dots + b_q X^q$.

* Composition : on définit par récurrence $P^0 = 1$ et $P^{n+1} = P \times P^n, \forall n \geq 0$.

$$(Q \circ P)(X) = b_0 + b_1 P + \dots + b_q P^q.$$

* Dérivation : $P'(X) = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \dots + p a_p X^{p-1}$

$$P''(X) = 2a_2 + 3 \times 2\, X + \dots + p(p-1) a_p X^{p-2} \dots$$

* Conjugaison : si $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p \in \mathbb{C}[X]$ alors :

$$\overline{P}(X) = \overline{a_0} + \overline{a_1} X + \dots + \overline{a_p} X^p.$$

Prop : $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$
$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$
$$\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$$
$$\deg(P') = \deg P - 1$$
$$\deg(\overline{P}) = \deg P$$

2) Arithmétique des polynômes.

Déf : Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A et on note $B | A$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $A = BQ$.

Théorème (division euclidienne) :

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tq :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q est appelé le quotient de la division euclidienne de A par B.
R est appelé le reste de la division euclidienne de A par B.

Remarque :

* $\deg R < \deg B$ signifie $R = 0$ ou $0 \leq \deg R < \deg B$.
* $R = 0 \iff B \mid A$.

Exemples :

1) $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & X^2 - X + 1 \\
\cline{3-3}
- & 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 & 2X^2 + X - 3 \\
\cline{1-2}
 & X^3 - 4X^2 + 3X - 1 & \\
- & X^3 - X^2 + X & \\
\cline{1-2}
 & -3X^2 + 2X - 1 & \\
- & -3X^2 + 3X - 3 & \\
\cline{1-2}
 & -X + 2 &
\end{array}
$$

On a donc $A = BQ + R$ avec $Q = 2X^2 + X - 3$ et $R = -X + 2$.

2) $A = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$, $B = X^2 + 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 & X^2 + 1 \\
\cline{3-3}
- & X^4 + X^2 & X^2 + X + 1 \\
\cline{1-2}
 & X^3 + X^2 + X + 1 & \\
- & X^3 + X & \\
\cline{1-2}
 & X^2 + 1 & \\
 & X^2 + 1 & \\
\cline{1-2}
 & 0 & \\
\end{array}
$$

Donc $B | A$: $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2+1)(X^2+X+1)$

3) Si $\deg A < \deg B$ alors $Q = 0$ et $R = A$.

4) Si $\deg A = \deg B = n$ alors $Q = \frac{a_n}{b_n}$ et $R = A - \frac{a_n}{b_n} B$.

5) Si $B = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ alors $R = A(\alpha)$. En effet :

$A = (X-\alpha)Q + R$ avec $\deg R < \deg B = 1$ donc $R = a_0$

comme $A(\alpha) = 0 + R(\alpha)$ on a $R = \text{cste} = R(\alpha) = A(\alpha)$.

<u>Conséquence</u> : $A(\alpha) = 0 \iff X - \alpha \mid A$

6) Si $B = (X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha \neq \beta$ alors $\deg R < \deg B = 2$ donc $R = aX + b$. Comme $A = (X-\alpha)(X-\beta)Q + aX + b$ on a :

$$\begin{cases} A(\alpha) = a\alpha + b \\ A(\beta) = a\beta + b \end{cases}$$ système permettant de calculer a et b.

7) Si $B = (X-\alpha)^2$ alors $\deg R < \deg B = 2$ donc $R = aX + b$.

$$A(X) = (X-\alpha)^2 Q(X) + aX + b$$

$$A'(X) = (X-\alpha)\left(2Q(X) + (X-\alpha)Q'(X)\right) + a$$

Donc $\begin{cases} A(\alpha) = a\alpha + b \\ A'(\alpha) = a \end{cases}$ système permettant de calculer a et b.

Conséquence : $A(\alpha) = A'(\alpha) = 0 \iff (X-\alpha)^2 \mid A$.

Prop - def : Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Alors il existe un unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois A et B. On l'appelle le plus grand diviseur commun de A et B. On le note :

$$\mathrm{PGCD}(A,B) \text{ ou } A \wedge B.$$

Remarques :

1) Si $D \mid A$ et $D \mid B$ alors $D \mid \mathrm{PGCD}(A,B)$

2) On calcule $\mathrm{PGCD}(A,B)$ par l'algorithme d'Euclide (voir FDT I)

3) On dit que A et B sont premiers entre eux si $\mathrm{PGCD}(A,B) = 1$.

3) Racines et factorisation :

Déf : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P si α vérifie l'une des deux assertions équivalentes suivantes :

(i) $P(\alpha) = 0$

(ii) $(X-\alpha) \mid P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$

Déf : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P de multiplicité k si α vérifie l'une des trois assertions équivalentes suivantes :

(i) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$

(ii) $(X-\alpha)^k \mid P$ et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P

(iii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $P = (X-\alpha)^k Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

Vocabulaire : Si $k=1$ on parle de racine simple, $k=2$ on parle de racine double..

Théorème de D'Alembert - Gauss

Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine autant de fois que sa multiplicité.

Théorème : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Exemple : $P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$.

* Dans $\mathbb{R}$, P n'a qu'une seule racine : $\frac{2}{3}$ et on a $P(X) = 3(X - \frac{2}{3})(X^2 + 2)$
* Dans $\mathbb{C}$, P a trois racines : $\frac{2}{3}$; $i\sqrt{2}$ et $-i\sqrt{2}$ et on a :

$$P(X) = 3(X - \tfrac{2}{3})(X - i\sqrt{2})(X + i\sqrt{2})$$

Déf (Polynômes irréductibles)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant (ie $\deg P \geq 1$). On dit que P est irréductible si pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$Q \mid P \Rightarrow (Q = \lambda \text{ ou } Q = \lambda P \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}^*)$$

C-à-d que les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants et P lui-même (à une constante multiplicative près).

Ainsi, si P est réductible alors $P = AB$ avec $\deg A \geq 1$ et $\deg B \geq 1$.

Exemples :

1) Les polynômes de degrés 1 sont irréductibles
2) $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est réductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3) $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ est réductible dans $\mathbb{C}[X]$ mais irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
4) Dans $\mathbb{C}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de deg. 1.
5) Dans $\mathbb{R}[X]$, les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de deg 1 et les polynômes de degré 2, $P = aX^2 + bX + c$ avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Théorème : (Factorisation en produit de polynômes irréductibles)

Tout polynôme non constant $A \in \mathbb{K}[X]$ s'écrit comme produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$A = \alpha P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r}$$

Cette décomposition est unique à permutation des facteurs près.

Remarques : 1) α = le coefficient dominant de A.

2) $\deg A = k_1 \times \deg P_1 + \dots + k_r \times \deg P_r$.

Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

Comme dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1, la factorisation d'un polynôme non constant $A \in \mathbb{C}[X]$ en produit de polynômes irréductibles s'écrit :

$$A = \alpha (X-\alpha_1)^{k_1} (X-\alpha_2)^{k_2} \dots (X-\alpha_r)^{k_r}.$$

Les $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines distinctes de A et $k_1, \dots, k_r$ sont leurs multiplicités. Conséquence : tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Donc la factorisation d'un polynôme non constant $A \in \mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles s'écrit :

$$A = \lambda (X-\alpha_1)^{k_1} \dots (X-\alpha_r)^{k_r} Q_1^{l_1} Q_2^{l_2} \dots Q_s^{l_s}$$

où les α_i sont les racines réelles distinctes de A de multiplicité k_i et où les Q_i sont des polynômes irréductibles unitaires de degré 2 :

$$Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i \quad \text{avec} \quad \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0.$$

Exemples : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$

1) $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)(X^2+X+1)$ est déjà factorisé en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$P(X) = 2X^4(X-1)^3(X-i)(X+i)(X-j)(X-\bar{j})$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2) $P(X) = X^4 - 1$

Dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X^2-1)(X^2+1)$

$$= (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$: Si P est à coefficients réels et $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P. Donc pour déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on commence par le faire dans $\mathbb{C}[X]$ et on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées puis on les développe. Ici :

$$P(X) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \quad \text{dans } \mathbb{C}[X]$$

$$= (X-1)(X+1)(X^2+1) \quad \text{dans } \mathbb{R}[X].$$

II) Fractions rationnelles :

1) Définitions :

Def : Une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme :

$$F = \frac{P}{Q}$$

où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont deux polynômes avec $Q \neq 0$.

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Le couple (P, Q) représentant la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ n'est pas unique. Si $S \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme quelconque avec $S \neq 0$ alors $F = \frac{P}{Q} = \frac{PS}{QS}$.

Def : On dit qu'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si P et Q sont premiers entre eux : $\underbrace{P \wedge Q}_{= PGCD(P,Q)} = 1$.

En pratique, pour calculer la forme irréductible d'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$; on calcule le PGCD de P et Q (par exemple par l'algorithme d'Euclide). Notons $D = P \wedge Q$. On a alors $P = D\tilde{P}$ et $Q = D\tilde{Q}$ avec $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = 1$. On a alors :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{D\tilde{P}}{D\tilde{Q}} = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}} \quad \text{avec} \quad \tilde{P} \wedge \tilde{Q} = 1.$$

Déf : Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle. On appelle degré de F l'entier : $\deg F = \deg P - \deg Q$.

Remarque : $\deg F$ ne dépend pas du couple (P,Q) représentant la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$.

Déf : Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle sous forme irréductible. On appelle :

i) zéros de F les racines de P dans $\mathbb{K}$.

ii) pôles de F les racines de Q dans $\mathbb{K}$.

Exemple : $P = (X^2-1)(X-2)$; $Q = (X+1)^2(X-3)(X-4)$ et $F = \frac{P}{Q}$.

1) Degré :

2) Forme irréductible :

3) Zéros de F :

Pôles de F :

2) Fonction rationnelle associé :

Déf : Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{R}$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines réelles de Q. On appelle fonction rationnelle associé à la fraction rationnelle F la fonction :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Remarque : Dans la définition ci-dessous on ne suppose pas que F est sous forme irréductible.

Prop : Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ et f la fonction rationnelle associé :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Supposons que α_i est une racine de multiplicité k pour Q et que α_i est une racine de multiplicité $l \geq k$ pour P.

Alors f est prolongeable par continuité en α_i.

Preuve : $(X - \alpha_i)^k$ est un diviseur de Q et de P. De plus on a $Q = (X - \alpha_i)^k \tilde{Q}$ avec $\tilde{Q}(\alpha_i) \neq 0$ et $P = (X - \alpha_i)^l \tilde{P}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ on a :

$$f(x) = \frac{(x - \alpha_i)^l \tilde{P}(x)}{(x - \alpha_i)^k \tilde{Q}(x)} = (x - \alpha_i)^{l-k} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \xrightarrow[x \to \alpha_i]{} \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \tilde{P}(\alpha_i) / \tilde{Q}(\alpha_i) & \text{si } l = k. \end{cases}$$ $\blacksquare$

Prop : Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle sous forme irréductible.

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de Q qui sont les pôles de f. Alors la fonction rationnelle associée $f : \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$

est infiniment dérivable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur son domaine de définition.

3) Décomposition en éléments simples.

Toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ se décompose comme somme de fractions rationnelles élémentaires qu'on appelle éléments simples.

La forme de ces éléments simples est différentes selon que le polynôme Q est scindé ou non dans $\mathbb{K}[X]$.

a) Q est scindé dans $\mathbb{K}[X]$:

Rappel : On dit que $Q \in \mathbb{K}[X]$ est scindé si sa factorisation en produit de facteurs irréductibles est de la forme :

$$Q = \lambda (X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_n)^{k_n}$$

Dans $\mathbb{C}[X]$, tous les polynômes sont scindés.

Théorème :

Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible (avec $P \wedge Q = 1$).

On suppose que Q est scindé dans $\mathbb{K}[X]$:

$$Q = \lambda (X-\alpha_1)^{k_1} \dots (X-\alpha_n)^{k_n}.$$

Alors P/Q s'écrit de manière unique comme :

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{a_{11}}{X-\alpha_1} + \frac{a_{12}}{(X-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{a_{1k_1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}}$$
$$+ \frac{a_{21}}{X-\alpha_2} + \frac{a_{22}}{(X-\alpha_2)^2} + \dots + \frac{a_{2k_2}}{(X-\alpha_2)^{k_2}}$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{a_{n1}}{X-\alpha_n} + \frac{a_{n2}}{(X-\alpha_n)^2} + \dots + \frac{a_{nk_n}}{(X-\alpha_n)^{k_n}}$$

où $E \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme appelé la partie entière de P/Q et où les coefficients a_{ij} sont dans $\mathbb{K}$.

Preuve : Admise. Il s'agit de démontrer l'existence et l'unicité de la décomposition.

Exemples :

1) Décomposition de $\frac{1}{X^2-1}$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Méthode 1 :

Méthode 2 :

Méthode 3 :

Conclusion : $$\frac{1}{X^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{X+1}.$$

2) Décomposition en éléments simples de

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^5 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 11}{X^3 - 3X + 2}$$

Conclusion : La décomposition en éléments simples de P/Q est :

$$\frac{P}{Q} = X^2+1 - \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{3}{X+2}.$$

3) Décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^3+1}{(X-2)^4}$

Méthode : Lorsqu'une fraction rationnelle a un seul pôle, on peut trouver la décomposition en éléments simples par divisions euclidiennes successives.

Conclusion :

$$\frac{X^3+1}{(X-2)^4} = \frac{1}{X-2} + \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{12}{(X-2)^3} + \frac{9}{(X-2)^4}.$$

b) Q n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$:

La factorisation en polynômes irréductibles de Q est de la forme :

$$Q = \lambda (X-\alpha_1)^{k_1} \dots (X-\alpha_n)^{k_n} (X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^{l_1} \dots (X^2+\beta_m X+\gamma_m)^{l_m}$$

avec $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Théorème :

Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle irréductible (avec $P \wedge Q = 1$).

On suppose que la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q est de la forme :

$$Q = \lambda (X-\alpha_1)^{k_1} \cdots (X-\alpha_n)^{k_n} (X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^{l_1} \cdots (X^2+\beta_m X+\gamma_m)^{l_m}$$

avec $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ pour $i \in [\![1, m]\!]$.

Alors P/Q s'écrit de manière unique comme :

$$\begin{aligned}
\frac{P}{Q} = E &+ \frac{a_{11}}{X-\alpha_1} + \frac{a_{12}}{(X-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1k_1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{a_{n1}}{X-\alpha_n} + \frac{a_{n2}}{(X-\alpha_n)^2} + \cdots + \frac{a_{nk_n}}{(X-\alpha_n)^{k_n}} \\
&+ \frac{b_{11}X+c_{11}}{X^2+\beta_1 X+\gamma_1} + \cdots + \frac{b_{1l_1}X+c_{1l_1}}{(X^2+\beta_1 X+\gamma_1)^{l_1}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{b_{m1}X+c_{m1}}{X^2+\beta_m X+\gamma_m} + \cdots + \frac{b_{ml_m}X+c_{ml_m}}{(X^2+\beta_m X+\gamma_m)^{l_m}}
\end{aligned}$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ est appelé la partie entière de P/Q et où les coefficients a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des réels.

Preuve : admise

Exemple :

Décomposition en éléments simples de :

$$\frac{P}{Q} = \frac{3X^4 + 5X^3 + 11X^2 + 5X + 3}{(X^2+X+1)^2(X-1)} .$$

Finalement :

$$\frac{3X^4+5X^3+11X^2+5X+3}{(X^2+X+1)^2(X-1)} = \frac{2X+1}{(X^2+X+1)^2} - \frac{1}{X^2+X+1} + \frac{3}{X-1}$$

4) Applications de la décomposition en éléments simples :

a) Calculs de sommes :

Exemple : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

1) Calculer S_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Etudier $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Réponse :

b) Calcul de primitive de fonctions rationnelles :

Exemple : Calculer les primitives de la fonction :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x^2 + x + 1)(x + 1)} .$$

Réponse : Après calculs on trouve la décomposition en éléments simples suivante : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x^2 + x + 1)(x + 1)} = x - 1 + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x + 1}$$

Donc les primitives de f sont :

c) Etude des branches infinies d'une fonction rationnelle.

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{(x^2 + x + 1)(x+1)}$

1) Déterminer l'équation de l'asymptote oblique en $\pm\infty$.

2) Etudier la position du graphe de f par rapport à cette droite.

Réponse.

1) On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{x+1}$

Donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - (x-1)| = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left| \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{x+1} \right| = 0.$

Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) On $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) - (x-1) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{x+1}$.

Au voisinage de $+\infty$, $f(x) - (x-1) \geq 0$ donc la courbe représentative de f est au dessus de l'asymptote.

Au voisinage de $-\infty$, $f(x) - (x-1) \leq 0$ donc la courbe représentative de f est en dessous de l'asymptote.