Chapitre II : Espaces vectoriels

I) Motivation :

Quelques propriétés du plan vectoriel $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \text{ tq } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$:

* La somme de deux vecteurs est un vecteur
$$(x,y) + (z,t) = (x+z, y+t)$$

* Il y a un "vecteur nul" : le vecteur $(0,0)$
$$(x,y) + (0,0) = (0,0) + (x,y) = (x,y)$$

* On peut multiplier un vecteur par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\alpha.(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

De nombreux ensembles mathématiques ont la même structure et leurs éléments se comportent comme des vecteurs :

Exemples :

1) $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}\}$ à I = intervalle de $\mathbb{R}$.

* $f, g \in E \Rightarrow f+g \in E$ est la fonction $f+g : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{array}$

* "vecteur nul" : la fonction nulle $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$

* $f \in E, \alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha f \in E$ est la fonction $\alpha f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha f(x) \end{array}$

2) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les matrices de taille $n \times p$ à coeff dans $\mathbb{K}$.

* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \Rightarrow A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
* vecteur nul = la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha.A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Un espace vectoriel est une structure algébrique abstraite qui permet de regrouper tous ces cas de figures pour les étudier.

I) Structure d'espace vectoriel :

1) Structure de groupe :

Def : Soit G un ensemble muni d'une loi interne notée $*$.

$$G \times G \to G$$
$$(x,y) \longmapsto x * y$$

On dit que $(G,*)$ est un groupe si :

1) La loi $*$ est associative

$$(x*y)*z = x*(y*z), \quad \forall x,y,z \in G$$

2) $\exists e \in G$ tq :

$$e*x = x*e = x, \quad \forall x \in G$$

e s'appelle l'élément neutre

3) $\forall x \in G, \exists y \in G$ tq $x*y = y*x = e$.

y s'appelle l'inverse de x, on le note x^{-1} (ou éventuellement $-x$)

Exemples :

1) $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe :

i) $+$ est associative : $(x+y)+z = x+(y+z) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$

ii) 0 est l'élément neutre : $\forall x \in \mathbb{Z}$, $0+x = x+0 = x$.

iii) l'inverse de $x \in \mathbb{Z}$ est $-x$.

De même $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C},+)$ sont des groupes.

⚠ $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe.

2) $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe :

i) $\times$ est associative, $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$

ii) 1 est l'élément neutre.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, l'inverse de x pour $\times$ est $\frac{1}{x}$.

3) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +)$ est un groupe.

i) $+$ est associative

ii) La fonction nulle est l'élément neutre

iii) L'inverse d'une fonction f est la fonction $-f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -f(x) \end{array}$

4) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe.

<u>Définition</u>. On dit que $(G, *)$ est un groupe commutatif (ou abélien) si la loi $*$ est commutative i.e :

$$x * y = y * x, \quad \forall x, y \in G.$$

Les exemples ci-dessus sont des groupes commutatifs.

<u>Exemple de groupe non commutatif</u> :

Soit E un ensemble et $G = \{\text{bijections de } E \text{ dans } E\}$.

Alors $(G, \circ)$ est un groupe en général non commutatif :

i) $\circ$ est associative ; $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \forall f, g, h \in G$

ii) Id_E est l'élément neutre : $\forall f \in G$, $f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

iii) $\forall f \in G$, f admet un inverse pour la loi $\circ$ qui est f^{-1} la bijection réciproque de f.

Pour $E = \{a, b, c\}$ et $f : \begin{array}{l} E \to E \\ a \mapsto b \\ b \mapsto c \\ c \mapsto a \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} E \to E \\ a \mapsto c \\ b \mapsto b \\ c \mapsto a \end{array}$

Alors $f \circ g : \begin{array}{l} a \mapsto a \\ b \mapsto c \\ c \mapsto b \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{l} a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \end{array}$ donc $f \circ g \neq g \circ f$

Propriétés : Soit $(G, *)$ un groupe. Alors :

(i) L'élément neutre est unique

(ii) $\forall x \in G$, l'inverse de x est unique

(iii) $\forall x, y, z \in G$, $\quad x * y = x * z \Rightarrow y = z$

Preuve :

(i) Supposons que e et e' sont des éléments neutres.

$$\left.\begin{array}{l} e * e' = e \\ e * e' = e' \end{array}\right\} \Rightarrow e = e'$$

(ii) Supposons que x a deux inverses y et z :

$$\begin{cases} x * y = y * x = e \\ x * z = z * y = e \end{cases}$$

Alors : $\left.\begin{array}{l} (y * x) * z = e * z = z \\ y * (x * z) = y * e = y \end{array}\right\}$ par associativité $y = z$

(iii) $x * y = x * z$

$\Rightarrow x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z)$

$\Rightarrow (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z$

$\Rightarrow e * y = e * z$

$\Rightarrow y = z$

2) Structure d'espace vectoriel.

Déf : Soit $\mathbb{K}$ le corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit E un ensemble non vide muni de deux lois :

Une loi interne $+$: $\begin{array}{l} E\times E \longrightarrow E \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{array}$

Une loi externe $\cdot$: $\begin{array}{l} (\mathbb{K},E) \longrightarrow E \\ (\alpha,x) \longmapsto \alpha\cdot x \end{array}$

On dit que E muni de ces deux lois est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev) si :

(1) $(E,+)$ est un groupe commutative

(2) $\forall \alpha\in\mathbb{K}, \forall (x,y)\in E$: $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$

(3) $\forall \alpha\in\mathbb{K}, \forall \beta\in\mathbb{K}, \forall x\in E$: $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x$

(4) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{K}, \forall x\in E$: $(\alpha\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x) = \beta\cdot(\alpha\cdot x)$

(5) $\forall x\in E$: $1_{\mathbb{K}}\cdot x = x$

Dans un premier temps on notera 0_E l'élément neutre du groupe $(E,+)$ à ne pas confondre avec le scalaire $0_{\mathbb{K}}$.

Vocabulaire. Les éléments de E s'appellent les vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent les scalaires.

Exemples.

1) $(\mathbb{K},+,\times)$ est lui-même un $\mathbb{K}$-ev

2) Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-ev :

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev.

3) Exemple fondamental : $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev

$\mathbb{K}^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n)$ avec $a_i \in \mathbb{K} \ \forall i \in [\![1, n]\!] \}$.

<u>exemples:</u> $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... sont des $\mathbb{R}$-ev, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}^2$ sont des $\mathbb{C}$-ev.

4) $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ muni des lois :

$$+ : (f,g) \longmapsto f+g \quad \text{avec} \quad f+g : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{array}$$

$$\cdot : (\alpha, f) \longmapsto \alpha.f \quad \text{avec} \quad \alpha.f : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \alpha f(x) \end{array}$$

est un $\mathbb{R}$-ev.

$\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-ev

5) L'ens. des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$: $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev :

6) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev

7) L'ens. des suites réelles est un $\mathbb{R}$-ev.

<u>Proposition</u> (Premières propriétés) Soit E un $\mathbb{K}$-ev

(i) $\forall x \in E,\ 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha . 0_E = 0_E$

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ (\alpha . x = 0_E \Rightarrow \alpha \in 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E)$

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E,\ \alpha.(x - y) = \alpha . x - \alpha . y$

(v) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ (\alpha - \beta) . x = \alpha . x - \beta . x$

⚠ Ne pas confondre $0_{\mathbb{K}}$ et 0_E.

Pour $E = \mathbb{K}^n$. $0_{\mathbb{K}} = 0$ et $0_E = (0, \dots, 0)$

Pour $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. $0_{\mathbb{K}} = 0$ et $0_E =$ la fonction nulle.

3) Combinaisons linéaires :

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev

1) Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ tout vecteur x de E qui peut s'écrire sous la forme :

$$x = \alpha_1 . x_1 + \alpha_2 . x_2 + \dots + \alpha_n . x_n \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n.$$

On note vect$(x_1, \dots x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_1, \dots, x_n)$

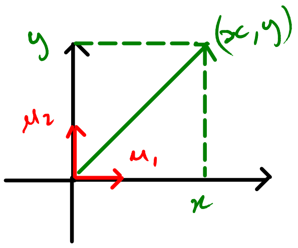
2) Soit F une partie de E. On note vect(F) l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de F.

Exemples :

1) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$

$$\begin{aligned} \text{Vect}(u_1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } (x,y) = \alpha . u_1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } (x,y) = (\alpha, 0)\} \\ &= \{(\alpha, 0) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{l'axe des abscisses} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y) = \alpha_1 . u_1 + \alpha_2 . u_2\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y) = (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2)\}$$
$$= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \alpha_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathbb{R}^2$$



2) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $y_1 = \sin$ et $y_2 = \cos$.

$$\mathrm{Vect}(y_1, y_2) = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \exists (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \underbrace{y = \alpha_1 \sin + \alpha_2 \cos}\}$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$,
$y(x) = \alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x)$

III) Sous-espaces vectoriels

1) Définitions et exemples.

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$.

On dit que F est sous-espace vectoriel (sev) de E si

(i) $0_E \in F$

(ii) $\forall (x,y) \in F^2$, $x + y \in F$

(iii) $\forall x \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha . x \in F$

On a la définition équivalente :

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$.

On dit que F est un sev de E si :

(1) $0_E \in F$

(2) $\forall (x,y) \in F^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha . x + y \in F$

En effet : (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (2), (2) avec $\alpha = 1 \Rightarrow$ (ii), (2) avec $y = 0 \Rightarrow$ (iii)

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E, alors :

1) F est stable par combinaisons linéaires

2) Muni des lois $+, \cdot$ de E, F est un $\mathbb{K}$-ev

Preuve : 1) découle de la définition

2) par 1) $+$ est une loi interne dans F, $\cdot$ est une loi externe et tts les autres ptés sont vérifiées.

Exemples :

1) $\{0_E\}$ et E sont des sev de E

2) $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$ où $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est un sev de E.

3) $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, alors F est un sev de E.

4) $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$)

Contre - exemple :

$E = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x + y = 1\}$.

On a $F \subset E$ mais n'est pas un sous espace vectoriel.

Soit (x,y) et (z,t) dans F. Alors $x+y = 1$ et $z+t = 1$.

Mais $(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t) \notin F$ car : $(x+z)+(y+t) = 2$.

5) E = l'ens. des suites réelles. F = l'ens. des suites arithmétiques.

2) Sev engendré par une partie.

Prop : L'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-ev est un sous-espace vectoriel.

Preuve : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E.

(i) $0_E \in F_i, \forall i \in I$ donc $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$

(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$. Alors $\forall i \in I$, $\alpha.x + y \in F_i$ car F_i est un sev donc $\alpha.x + y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A une partie de E. On appelle sev engendré par A et on note $\langle A \rangle$ l'intersection de tous les sev de E contenant A. Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) sev de E contenant A.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$ev et A une partie de E. Alors

$$\langle A \rangle = \mathrm{vect}(A)$$

Le plus petit sev de E contenant A est l'ens. des combinaisons linéaires de vecteurs de A.

$= \{x \in E \text{ tq } x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \text{ avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, (x_1, \dots, x_n) \in A^n\}$

<u>Preuve :</u>

* $\mathrm{vect}(A)$ est un sev de E contenant A. Or $\langle A \rangle$ est le plus petit sev de E contenant A donc $\langle A \rangle \subset \mathrm{vect}(A)$.

* Montrons que $\mathrm{vect}(A) \subset \langle A \rangle = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$. Par cela mq pour tout F sev de E contenant A, on a $\mathrm{vect}(A) \subset F$.

Soit donc F un sev de E contenant A, quelconque.

Soit $x \in \mathrm{vect}(A)$. $x = \alpha_1 . \underbrace{x_1}_{\in A} + \dots + \alpha_n \underbrace{x_n}_{\in A} \in A$ donc $x \in F$, donc $\mathrm{vect}(A) \subset F$.

<u>Exemples :</u>

1) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

L'ens. des fonctions polynomiales $= \mathrm{vect}(\{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\})$

2) Si $A = \emptyset$, par convention, $\mathrm{vect}(\emptyset) = \{0_E\}$

3) $\mathrm{vect}(A) = A \iff A$ est un sev de E.

Par exemple :

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x + y + z = 0\}$ (plan orthogonal à $\vec{n} = (1, 1, 1)$)

3) Somme de sous-espaces vectoriels :

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E. On définit

$F+G = \{x \in E \text{ tq } \exists (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G\}$

= ens. de vecteurs de E qui s'écrivent comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Alors :

(i) $F+G$ est un sev de E

(ii) $F+G = \mathrm{vect}(F \cup G)$

Preuve :

(i) * $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ donc $0_E \in F+G$

* Soit $\left.\begin{array}{l} x = x_F + x_G \in F+G \\ y = y_F + y_G \in F+G \\ \alpha \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha . x + y = \alpha.(x_F + x_G) + (y_F + y_G)$

$= \underbrace{(\alpha x_F + y_F)}_{\in F \text{ car } F \text{ sev}} + \underbrace{(\alpha x_G + y_G)}_{\in G \text{ car } G \text{ sev}}$

Donc $\alpha x + y \in F+G$.

(ii) Soit $x \in F+G$: $x = x_F + x_G$ donc x est combinaison linéaire de vecteurs de $F \cup G$ donc $x \in \mathrm{vect}(F \cup G) \rightsquigarrow F+G \subset \mathrm{vect}(F \cup G)$.

Soit $x \in F \cup G$. Si $x \in F$: $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_G}_{\in G}$ donc $x \in F+G$

Si $x \in G$: $x = \underbrace{0_F}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ donc $x \in F+G$

donc $F \cup G \subset F+G$ et $F+G$ est un sev donc $\mathrm{vect}(F \cup G) \subset F+G$.

On peut généraliser à $E_1, \dots, E_n$ n sev de E :

$$E_1 + \dots + E_n = \{x = x_1 + \dots + x_n,\ x_i \in E_i\ \forall i \in [\![1, n]\!]\}.$$

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soit F et G deux sev de E.

On dit que F et G sont en somme directe si pour tout vecteur x de $F+G$, il existe une unique décomposition

$$x = x_F + x_G \quad \text{avec } x_F \in F \text{ et } x_G \in G.$$

On note alors $F \oplus G$ au lieu de $F+G$.

Prop : E un $\mathbb{K}$-ev, F et G deux sev de E. Alors :

$$F \text{ et } G \text{ sont en somme directe} \iff F \cap G = \{0_E\}$$

Preuve : ♥

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E.
On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$
c-a-d que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme un vecteur de F plus un vecteur de G.

Pour vérifier que $E = F \oplus G$ il faut et il suffit de vérifier :

(i) $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe

(ii) $\forall x \in E, \exists (x_F, x_G) \in F \times G$ tq $x = x_F + x_G$.

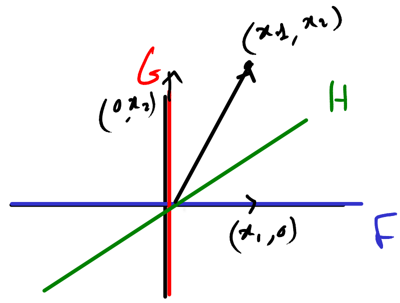
En général il est plus difficile de montrer (ii) que (i).

Exemples :

1) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{vect}((1,0)) = \{(\alpha, 0), \alpha \in \mathbb{R}\}$

$G = \text{vect}((0,1)) = \{(0, \mu), \mu \in \mathbb{R}\}$

$H = \text{vect}((1,1)) = \{(\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.



* Montrons que $E = F \oplus G$.

* Montrons que $E = F \oplus H$.

Remarque : Le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas unique !

2) $E = \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs non colinéaires ie $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Alors $E = \mathrm{vect}(a) \oplus \mathrm{vect}(b)$.

(i) Montrons que vect (a) et vect (b) sont en somme directe.

Soit $x \in \mathrm{vect}(a) \cap \mathrm{vect}(b)$. Alors $x = \lambda a = \mu b$ avec λ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $a = \frac{\mu}{\lambda} b$ donc a et b sont colinéaires : contradiction. Donc $\lambda = 0$.

Donc $x = 0$. Conclusion : $\mathrm{vect}(a) \cap \mathrm{vect}(b) = \{(0,0)\}$.

(ii) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda a + \mu b$.

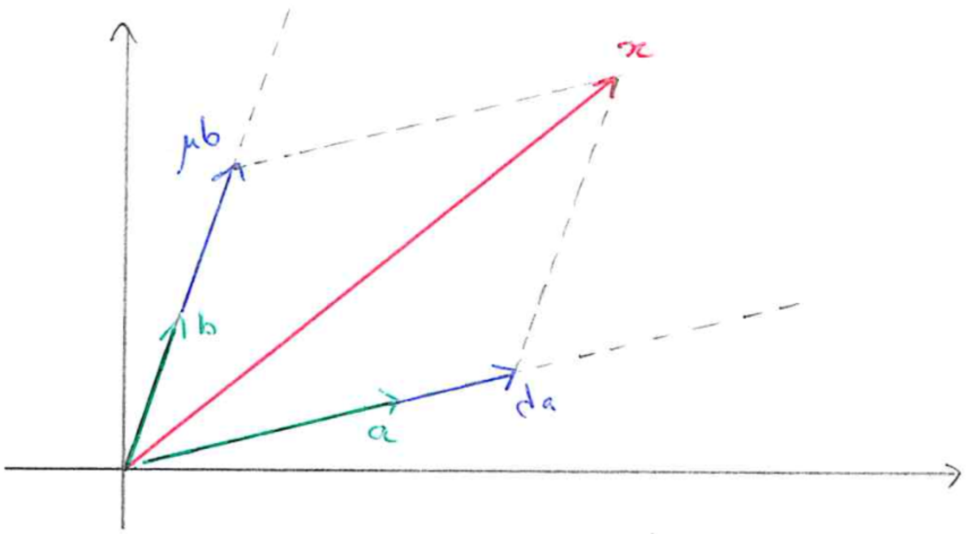
Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on cherche λ et μ tq $(x_1, x_2) = \lambda(a_1, a_2) + \mu(b_1, b_2)$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times\, b_2 \\ \times\, (-b_1) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \times\, a_2 \\ \times\, -a_1 \end{vmatrix} \iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{x_1 b_2 - x_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\[2ex] \mu = -\dfrac{x_1 a_2 - x_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases}$$

or $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ car a et b non colinéaires donc λ et μ existent.

Donc $x = \lambda a + \mu b$

Conclusion : $E = \text{vect}(a) \oplus \text{vect}(b)$



3) $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,-1)$. Montrons que $\text{vect}(u)$ et $\text{vect}(v)$ sont en somme directe mais qu'on n'a pas $E = \text{vect}(u) \oplus \text{vect}(v)$.

Soit $x \in \text{vect}(u) \cap \text{vect}(v)$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$.

$x \in \text{vect}(u)$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $(x_1, x_2, x_3) = (\lambda, 0, 0)$. Donc $x_2 = x_3 = 0$.

$x \in \text{vect}(v)$ donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $(x_1, 0, 0) = (0, \mu, -\mu)$. Donc $x_1 = 0$.

Donc $x = (0,0,0)$ donc $\text{vect}(u) \cap \text{vect}(v) = \{(0,0,0)\}$. Donc $\text{vect}(u)$ et $\text{vect}(v)$ sont en somme directe.

Montrons qu'il existe des vecteurs de $E = \mathbb{R}^3$ qui ne se décomposent pas en $\lambda u + \mu v$. En fait $\text{vect}(u) \oplus \text{vect}(v)$ est un sev strict de $E = \mathbb{R}^3$. En effet

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \text{vect}(u) \oplus \text{vect}(v) &\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y,z) = \lambda u + \mu v \\
&\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y,z) = (\lambda,0,0) + (0,\mu,-\mu) \\
&\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } (x,y,z) = (\lambda,\mu,-\mu) \\
&\iff y = -z \\
&\iff y + z = 0
\end{aligned}$$

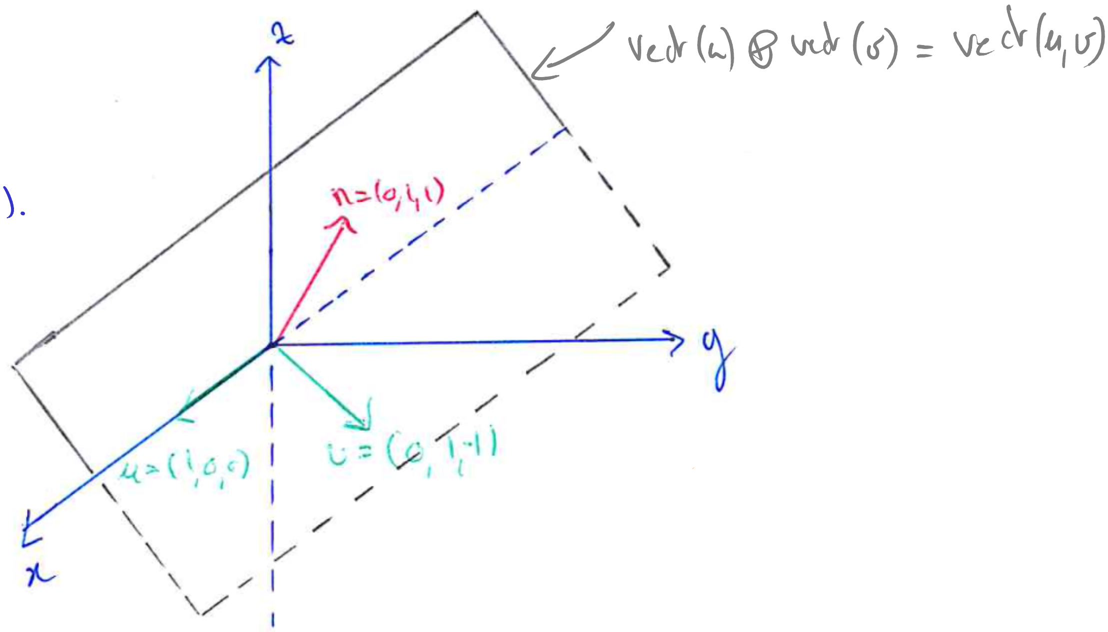
Donc $\mathrm{vect}(u) \oplus \mathrm{vect}(v) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } y+z=0\}$.

$=$ le plan orthogonal au vecteur $n = (0,1,1)$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } a_0x + b_0y + c_0z = 0\}$ = plan passant par $(0,0,0)$ et $\perp$ à (a_0, b_0, c_0)

Rq : On a :

$E = \mathrm{vect}(u) + \mathrm{vect}(v) + \mathrm{vect}(n)$.



4) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\mathcal{P}$ = ensemble des fonctions paires, $\mathcal{I}$ = ens. des fonctions impaires. Alors $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

5) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) =$ ens. des matrices $n \times n$ symétriques et
$\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) =$ ens. des matrices $n \times n$ anti-symétriques. Alors :
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

<u>Preuve</u> : Par analyse / synthèse

<u>Remarque :</u>

* $n=2$: E_1 et E_2 sont en somme directe si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

ce n'est plus une condition suffisante si $n \geq 3$:

* exple : $n=3$ on peut trouver E_1, E_2, E_3 tq

$$\begin{cases} E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{0_E\} \\ E_1, E_2, E_3 \text{ pas en somme directe.} \end{cases}$$

$E = \mathbb{R}^2$ et $E_1 = \mathrm{vect}(1,0) = \{(\lambda,0), \lambda \in \mathbb{R}\}$

$E_2 = \mathrm{vect}(0,1) = \{(0,\mu), \mu \in \mathbb{R}\}$

$E_3 = \mathrm{vect}(1,1) = \{(\lambda,\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

On a déjà vu que $E_1 \oplus E_2$ et $E_1 \oplus E_3$ donc $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = \{(0,0)\}$.

Soit $x \in E_2 \cap E_3$: $x = (0,\mu) = (\lambda,\lambda)$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = \lambda = 0$, donc $x = (0,0)$. On a aussi $E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{(0,0)\}$.

Mais la somme n'est pas directe car la décomposition suivant $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas unique :

$$x = (2,1) = \underbrace{(2,0)}_{\in E_1} + \underbrace{(0,1)}_{\in E_2} = \underbrace{(1,1)}_{\in E_3} + \underbrace{(1,0)}_{\in E_1}$$

IV) Familles libres, génératrices, bases :

1) Définitions et exemples

Déf : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

(1) On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si $\mathrm{vect}\{x_i, i\in I\} = E$.

(2) On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si

1er cas : I est fini : ($I = [\![1,n]\!]$ pour fixer les idées)

$$\forall (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \mathbb{K}^n, \left(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0\right)$$

2ème cas : I est infini :

toutes les sous-familles finies de $(x_i)_{i\in I}$ sont libres.

(3) On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base si elle est libre et génératrice.

Exemples :

1) Par convention, la famille vide est libre.

2) $E = \mathbb{K}^n$.

$e_1 = (1,0,\dots,0)$; $e_2(0,1,0,\dots,0)$; $\dots$; $e_n = (0,\dots,0,1)$.

La famille $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée la base canonique.

3) $E = \mathbb{R}^3$. $a_1 = (1,0,0)$; $a_2 = (1,1,0)$; $a_3 = (1,1,1)$.

Donc (a_1, a_2, a_3) est génératrice et libre. C'est une base.

<u>Rq</u> : $e_1 = (1,0,0)$; $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.

Pour $x = (x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$= \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$

x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de x dans la base (e_1, e_2, e_3)

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ———————— (a_1, a_2, a_3)

4) $E = \mathbb{R}[X]$ (polynômes à coefficients réels)

Soit la famille $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ (famille infinie)

5) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On considère la famille $(E_{ij})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]}$ où
$$\begin{array}{cc} & j \\ E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

Alors cette famille $(E_{ij})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]}$ est :

* génératrice : toute matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme une CL de cette famille : $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} E_{ij}$.

* libre : $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ $n\times p$ coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} E_{ij} = 0_E$$
matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On a alors $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \cdots & & \alpha_{2p} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & & \alpha_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\alpha_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Donc $(E_{ij})_{i\in[\![1,n]\!], j\in[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée la base canonique.

6) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{array}$

Alors $\{f,g\}$ est une famille libre de E.

Déf : * Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre, on dit que les vecteurs qui la composent sont linéairement indépendants.

* Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

2) Propriétés :

Proposition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

1) Si $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice alors tout vecteur de E s'écrit d'au moins une manière comme CL de vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$.

2) Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre alors tout vecteur de E s'écrit d'au plus une manière comme CL de vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$.

3) Si $(x_i)_{i\in I}$ est une base alors tout vecteur de E s'écrit d'une unique manière comme CL de vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$.

Preuve :

1) Evident par déf. d'une famille génératrice.

1) et 2) ⇒ 3). Reste à démontrer 2) :

Supposons $(x_i)_{i \in I}$ libre. Soit $x \in E$ admettant 2 décompositions :

$$\exists I_1 \subset I \text{ fini tq } x = \sum_{i \in I_1} \alpha_i x_i \quad ①$$

$$\exists I_2 \subset I \text{ fini tq } x = \sum_{i \in I_2} \beta_i x_i \quad ②$$

Donc ① - ② ⇒ $\sum_{i \in I_1 \cap I_2} (\alpha_i - \beta_i) x_i + \sum_{i \in I_1 \setminus I_1 \cap I_2} \alpha_i x_i + \sum_{i \in I_2 \setminus I_1 \cap I_2} (-\beta_i) x_i = 0_E$.

Comme la famille est libre :

* $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in I_1 \setminus I_1 \cap I_2$
* $\beta_i = 0 \quad \forall i \in I_2 \setminus I_1 \cap I_2$
* $\alpha_i = \beta_i \quad \forall i \in I_1 \cap I_2$

Donc les deux décompositions sont identiques.

Prop :

1) La famille $\{x\}$ est libre ssi $x \neq 0_E$.
2) La famille $\{x, y\}$ est libre ssi x et y ne sont pas colinéaires
3) Une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul.
4) Une famille libre ne peut pas contenir deux fois le même vecteur
5) Toute sous famille d'une famille libre est libre.
6) Toute sur famille d'une famille génératrice est génératrice
7) Toute sur famille d'une famille d'une famille liée est liée

Théorème (des degrés échelonnés)

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes non nuls de degrés tous distincts. Alors la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Remarque : Le résultat reste vrai si c'est une famille infinie de polynômes de degrés tous distincts.

Preuve :

3) Etude de la dépendance linéaire.

Prop: Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs.

1) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée ssi $\exists\, i_0 \in I$ tq :

$$x_{i_0} \in \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$$

« l'un au moins des vecteurs est CL des autres vecteurs »

2) Si la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre et si $x \in E$ Alors :

$$x \notin \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} \iff (x_i)_{i\in I} \cup \{x\} \text{ est libre}$$

Preuve: On fait la preuve pour $I = [\![1,n]\!]$ (on peut généraliser pour I infini).

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteur de E.

Alors on a équivalence entre :

(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une base

(ii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale (ie tte sous-famille n'est pas génératrice).

(iii) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale (tte sur-famille n'est plus libre)

4) Décomposition adaptées :

Théorème de recollement : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E.

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une base de F et $(g_j)_{j\in J}$ une base de G.

1) $E = F + G \Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \cup (g_j)_{j\in J}$ est une famille génératrice de E.

2) F et G sont en somme directe $\Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \cup (g_j)_{j\in J}$ est une famille libre de E

3) $E = F \oplus G \Leftrightarrow (f_i)_{i\in I} \cup (g_j)_{j\in J}$ est une base de E.

Si $E = F \oplus G$, on obtient une base de E en recollant une base de F et une base de G.

Preuve : dans le cas $I = [\![1, p]\!]$ et $J = [\![1, q]\!]$

Généralisation :

Soit $E_1, \dots, E_p$ p sev de E.
Soit $(f_i^1)_{i\in I_1}$ une base de $E_1, \dots, (f_i^p)_{i\in I_p}$ base de E_p. Alors :

1) $E = E_1 + \dots + E_p \iff (f_i^1)_{i\in I_1} \cup \dots \cup (f_i^p)_{i\in I_p}$ génératrice.

2) $E_1 \oplus \dots \oplus E_p \iff (f_i^1)_{i\in I_1} \cup \dots \cup (f_i^p)_{i\in I_p}$ libre.

3) $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p \iff (f_i^1)_{i\in I} \cup \dots \cup (f_i^p)_{i\in I_p}$ base de E.

V) Espaces vectoriels de dimension finie :

1) Définitions :

Def : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie $(x_1, \dots, x_m)$.

Exemples :

1) $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie car

2) De même $\mathbb{K}^n$ est de dim. finie.

3) $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

<u>Propriété fondamentale des EV de dimension finie :</u>

Soit E un espace vectoriel de dimension finie : il existe une famille génératrice finie $(x_1, \dots, x_m)$.

Alors une famille libre ne peut avoir plus d'éléments que la famille $(x_1, \dots, x_m)$.

<u>Preuve :</u>

Supposons qu'il existe une famille libre $(y_1, \dots, y_{m+1})$ à $m+1$ vecteurs.

Comme $(x_1, \dots, x_m)$ est génératrice on peut écrire :

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m \text{ avec } (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m.$$

Comme $y_1 \neq 0_E$ les α_i ne sont pas tous nuls. Quitte à effectuer une permutation d'indices, on peut supposer que $\alpha_1 \neq 0$. On a alors :

$$x_1 = \frac{1}{\alpha_1} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} x_m.$$

Donc toute CL de $(x_1, \dots, x_m)$ est une CL de $(y_1, x_2, \dots, x_m)$.

Donc la famille $(y_1, x_2, \dots, x_m)$ est génératrice.

Raisonnant par récurrence, supposons qu'on peut remplacer x_i par y_i jusqu'à l'indice k (avec $k<m$) en conservant le caractère générateur de la famille et vérifions qu'on peut encore le faire à l'indice $k+1$.

$(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ est génératrice donc :

$$y_{k+1} = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} + \dots + \alpha_m x_m$$

La famille $(y_1, \dots, y_{k+1})$ est libre donc les coefficients $(\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m)$ ne sont pas tous nuls. Quitte à permuter les indices on peut supposer $\alpha_{k+1} \neq 0$. Donc

$$x_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} y_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} y_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} y_{k+1} - \frac{\alpha_{k+2}}{\alpha_{k+1}} x_{k+2} - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_{k+1}} x_m$$

Donc toute CL de $(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ est une CL de $(y_1, \dots, y_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$ qui est donc génératrice.

Par récurrence on a alors que $(y_1, \dots, y_m)$ est génératrice. On en déduit que y_{m+1} est une CL des $y_1, \dots, y_m$, ce qui contredit le fait que $(y_1, \dots, y_{m+1})$ est libre.

Conclusion la famille $(y_1, \dots, y_{m+1})$ ne peut être libre. ∎

« S'il existe une famille génératrice à m éléments, une famille libre ne peut avoir plus de m éléments ».

Déf / Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Alors les bases de E ont toutes le même cardinal.
Cet entier est appelé la dimension.

Preuve :

Exemples :

1) On a vu que dans $\mathbb{K}^n$, $e_1 = (1,0,\dots,0)$; $\dots$, $e_n = (0,\dots,0,1)$ était une base. Donc $\dim \mathbb{K}^n = n$.

   Par exemple $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

2) Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est la famille $\{X^k, k \in [\![0,n]\!]\}$.

   Donc $\boxed{\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1}$

(Pratique dans les exos)

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

(i) Toute famille libre de cardinal n est une base.

(ii) Toute famille génératrice de cardinal n est une base.

Preuve :

(i) La famille est libre maximale car toute sur-famille serait de cardinal $\geq n+1$ donc serait liée.

(ii) La famille est génératrice minimale car s'il existe une sous-famille génératrice alors $\dim E \leq n-1$.

2) Existence de bases en dimension finie :

Théorème de la base incomplète :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

(i) Soit $(g_1, \dots, g_q)$ une famille génératrice de E. Alors on peut en extraire une sous-famille qui est une base de E.

(ii) Soit $(g_1, \dots, g_q)$ une famille génératrice de E et $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ une famille libre de E. Alors on peut compléter $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ en une base de E avec des vecteurs choisis dans la famille $(g_1, \dots, g_q)$.

Conséquence : Toute espace vectoriel de dimension finie admet une base.

non nulle

Preuve :

(i) Notons A l'ensemble des sous-familles libres de $(g_1, \dots, g_q)$.
B l'ensemble des cardinaux des familles de A.

La famille vide est libre donc $0 = \mathrm{card}(\emptyset) \in B$. Donc B est non vide.
De plus B est majoré par q (car $(g_1, \dots, g_q)$ est de card q).
Donc B admet un plus grand élément. Notons le $n = \max B$.

Soit $I \subset [\![1,q]\!]$ et $(g_i)_{i\in I}$ une famille de A de cardinal n.
Par construction, $(g_i)_{i\in I}$ est libre, montrons qu'elle est génératrice.
Montrons pour cela que $\forall i_0 \in [\![1,q]\!] \setminus I$, $g_{i_0} \in \mathrm{Vect}(g_i)_{i\in I}$: en effet, $(g_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ est une sous-famille de $(g_1, \dots, g_q)$ de cardinal $n+1$. Par définition de $n = \max B$, $(g_i)_{i \in I \cup \{i_0\}}$ est donc une famille liée.
Comme $(g_i)_{i\in I}$ est libre, on en déduit que $g_{i_0} \in \mathrm{Vect}(g_i)_{i\in I}$.

Comme tout vecteur de E est CL de $(g_1, \dots, g_q)$ et que $\forall i_0 \in [\![1,q]\!]\setminus I$ g_{i_0} est CL de $(g_i)_{i\in I}$, on en déduit que $(g_i)_{i\in I}$ est génératrice.
c'est donc une base de E, et $n = \dim E$.

(ii) La famille $(l_1, \dots, l_p)$ est libre et la famille $(l_1, \dots, l_p, g_1, \dots, g_q)$ est génératrice. Notons :
$A = \{ J \subset [\![1,q]\!] \text{ tq } (l_1, \dots, l_p) \cup (g_i)_{i\in J} \text{ soit libre} \}$
$B = \{ \mathrm{card}\, J,\ J \in A \}$.

Alors $A \neq \emptyset$ car $\emptyset \in A$. Donc $B \neq \emptyset$ car $0 \in B$. De plus B est majoré par q.

Donc B admet un plus grand élément. Notons le $n = \max B$.
Soit J_0 un élément de A de cardinal n. La famille $(l_1, \dots, l_p) \cup (g_i)_{i \in J_0}$ est libre. On montre comme dans (i) que $\forall i_0 \in [\![1, q]\!] \setminus J_0$, $g_{i_0} \in \text{vect}(g_i)_{i \in J_0}$. Donc :

$$\text{vect}(l_1, \dots, l_p) \cup (g_i)_{i \in J_0} = \text{vect}\{(l_1, \dots, l_p) \cup (g_1, \dots, g_q)\} = E.$$

Donc la famille $(l_1, \dots, l_p) \cup (g_i)_{i \in J_0}$ est libre et génératrice. ■

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.
Soit $(l_1, \dots, l_p)$ une famille libre. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base. Alors on peut compléter $(l_1, \dots, l_p)$ en une base avec des vecteurs de la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Exemple : $E = \mathbb{R}^4$ et $a_1 = (2, 1, -1, 0)$; $a_2 = (3, 2, 0, 0)$.

La famille (a_1, a_2) est libre car a_1 et a_2 ne sont pas colinéaires.

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On peut compléter (a_1, a_2) par des vecteurs de la base canonique en une base de $\mathbb{R}^4$.

Montrons par exemple que (a_1, a_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

C'est une famille libre. En effet soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}^4$ tq

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

Alors : $\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ et $\alpha_4 = 0$

Donc (a_1, a_2, e_3, e_4) est une famille libre de cardinal 4.

Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie. Alors il existe une famille libre infinie dans E.

Preuve :

3) Sous-espaces vectoriels en dimension finie.

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit F un sev de E.

Alors : (i) F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$

(ii) $F = E \iff \dim F = \dim E$

Preuve :

Corollaire : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sev de E de dimension finie.

Alors : $F = G \iff \begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \iff \begin{cases} G \subset F \\ \dim F = \dim G \end{cases}$

Remarque : Ici E n'est pas forcément de dimension finie.

Prop (Existence d'un supplémentaire en dim finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit F un sev de E.

Alors $\exists G$ un sev de E tq $E = F \oplus G$.

Preuve :

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E de dimensions finies en somme directe. Alors $F \oplus G$ est de dimension finie et
$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$

Rq : E n'est pas forcément de dim finie.

Preuve :

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F et G deux sev de E de dimension finie. Alors $F+G$ et $F\cap G$ sont de dimension finie et on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$$

Cette formule s'appelle la formule de Grassmann

Rq : Si F et G sont en somme directe ($F\cap G = \{0_E\}$) on retrouve $\dim(F\oplus G) = \dim F + \dim G$.

Preuve :

Prop : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie. (Pratique pour beaucoup d'exos)

Soit F et G deux sev de E alors :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Preuve :

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie : $\dim E = n$.

Soit H un sev de E de dimension $n-1$. On dit que H est un hyperplan de E.

* Si $\dim E = 2$, les hyperplans sont des droites : $H = \text{vect}(x)$ avec $x \in E \setminus \{0_E\}$
* Si $\dim E = 3$, les hyperplans sont des plans : $H = \text{vect}(x, y)$ avec $x, y \in E$ non colinéaires.

Prop: Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H un hyperplan de E. Soit $x \in E$ tel que $x \notin H$. Alors :

$$E = H \oplus \mathrm{vect}(x)$$

Les supplémentaires de H sont les droites vectorielles qui ne sont pas incluses dans H.

Preuve: Notons $n = \dim E$. Soit $(e_1, e_2, .., e_{n-1})$ une base de H. C'est donc une famille libre de E. Comme $x \notin \mathrm{vect}(e_1, ..., e_{n-1}) = H$ la famille $(e_1, .., e_{n-1}) \cup \{x\}$ est libre donc H et $\mathrm{vect}(x)$ sont en somme directe par le théorème de recollement et $H \oplus \mathrm{vect}(x) = \mathrm{vect}(e_1, .., e_{n-1}, x)$. La famille $(e_1, .., e_{n-1}) \cup \{x\}$ est une famille libre à n vecteurs donc c'est une base de E. Donc $\mathrm{vect}(e_1, .., e_{n-1}, x) = E$. Donc $E = H \oplus \mathrm{vect}(x)$. ∎

Exemple:

$E = \mathbb{R}^3$, $u = (1,0,0)$, $v = (0,1,-1)$, $x = (0,1,1)$.

Alors $H = \underbrace{\mathrm{vect}(u) \oplus \mathrm{vect}(v)}_{= \mathrm{vect}(u,v)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } y+z=0\}$.

On a $x \notin H$ donc $E = H \oplus \mathrm{vect}(x)$.

4) Espace vectoriel produit :

Prop : Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev.

Soit $E \times F = \{(u, v) \text{ tq } u \in E \text{ et } v \in F\}$.

Alors on peut munir $E \times F$ d'une structure d'espace vectoriel en définissant les lois :

* Loi interne $+$: $$\begin{array}{ccc} (E \times F) \times (E \times F) & \longrightarrow & E \times F \\ (u_1, v_1) ; (u_2, v_2) & \longmapsto & (u_1 + u_2, \; v_1 + v_2) \end{array}$$

loi + de E

loi + de F

* Loi externe $\cdot$: $$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times (E \times F) & \longrightarrow & E \times F \\ \alpha ; (u, v) & \longmapsto & (\alpha . u, \; \alpha . v) \end{array}$$

Prop : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Alors $E \times F$ est de dimension finie et $\dim E \times F = \dim E + \dim F$

Preuve : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_q)$ une base de F.

Alors $\{(e_1, 0_F), \dots, (e_p, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_q)\}$ est une base de $E \times F$. Donc $\dim E \times F = p + q = \dim E + \dim F$. ∎

Remarque : On retrouve $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R} = 2$.