

# Chapitre V: Applications linéaires

①

## I) Définitions et exemples

### i) Définitions et exemples

Def: \* Soit  $E$  et  $F$  deux  $K$ -ev et  $u: E \rightarrow F$   
On dit que  $u$  est une application linéaire (AL) si :

i)  $\forall x, y \in E: u(x+y) = u(x) + u(y),$

ii)  $\forall \alpha \in K \text{ et } \forall x \in E: u(\alpha x) = \alpha u(x).$

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des AL de  $E$  dans  $F$ .

\* Si  $F = K$ , on parle de forme linéaire. L'ensemble des formes linéaires sur  $E$ ,  $\mathcal{L}(E, K)$  est noté  $E^*$  et appelé le dual de  $E$ .

\* Si  $F = E$ , on parle d'endomorphisme par une AL  $u: E \rightarrow E$ .  
On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

Def. Equivalente: On peut remplacer i) et ii) par:

$$\forall x, y \in E \text{ et } \forall \alpha \in K, u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y)$$

Remarque: \* Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $u(0_E) = 0_F$ . En effet:

$$\text{Soit } x \in E, u(0_E) = u(0_K \cdot x) = 0_K \cdot u(x) = 0_F.$$

$$\forall x \in E, u(-x) = -u(x).$$

1) L'application  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_3, x_2 + x_3)$ .

2)  $u: E \rightarrow E$  et  $\text{Id}: E \rightarrow E$  sont des endomorphismes.  
 $x \mapsto 0_E$   $x \mapsto x$

3) Soit  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $h_\alpha: E \rightarrow E$  est une AL appelée l'homothétie de rapport  $\alpha$ .  
 $x \mapsto \alpha x$

Rq:  $h_\alpha$  est un endomorphisme:  $h_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ .

4)  $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  avec  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ .

$F \subset E = \{\text{fonctions dérivables de } \pm \text{ dans } \mathbb{R}\}$ .

Opérateur de dérivation:  $D: F \rightarrow E$  est une AL.  
 $f \mapsto f'$



(3)

Soit  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors:

$$D(\alpha f + g) = (\alpha f + g)' = \alpha f' + g' = \alpha D(f) + D(g).$$

⚠  $D$  ne définit pas un endomorphisme de  $F$ . La dérivée d'une fonction dérivable n'est pas forcément dérivable.

En revanche  $D: \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ .

Exemples de formes linéaires:

5)  $E = \{\text{suites réelles convergentes}\}$

Soit  $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$(u_n) \mapsto \lim u_n$$

Alors  $\psi$  est une forme linéaire:  $\psi \in E^*$ .

6)  $u: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}$

$$P \mapsto P(a)$$

Alors  $u \in \mathbb{K}[x]^*$ .

↙  $I = [a, b]$  segment de  $\mathbb{R}$ .

7)  $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$  et

$$u: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \int_I f$$

Alors  $u \in E^*$ .

Soit  $f, g \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Alors:

$$u(\alpha f + g) = \int_I (\alpha f + g) = \alpha \int_I f + \int_I g = \alpha u(f) + u(g).$$

## 2) Structure de $\mathcal{L}(E, F)$

④

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. On munit  $\mathcal{L}(E, F)$  des lois + et  $\cdot$  suivantes :

$$+ : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$
$$(u, v) \longmapsto u+v : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto u(x) + v(x) \end{cases}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$
$$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u : \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto \alpha u(x) \end{cases}$$

Prop:  $\mathcal{L}(E, F)$  muni de ces deux lois est un  $\mathbb{K}$ -ev.  
c'est un sev de  $F^E$ .

$\uparrow$  = ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .

Preuve :

Méthode 1 : on montre que  $(\mathcal{L}(E, F), +)$  est un groupe commutatif + les autres conditions par avoir un espace vectoriel.

Méthode 2 : En admettant que  $F^E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev, on montre que  $\mathcal{L}(E, F)$  en est un sev : Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Montrons que  $u+v \in \mathcal{L}(E, F)$ , c-à-d que  $u+v$  est linéaire.

Soit  $x, y \in E$  et  $\beta \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$\begin{aligned} (\alpha u + v)(\beta x + y) &= (\alpha u)(\beta x + y) + v(\beta x + y) \\ &= \alpha(\beta u(x) + u(y)) + \beta v(x) + v(y) \quad (\text{car } u, v \text{ sont des AL}) \\ &= \beta(\alpha u(x) + v(x)) + \alpha u(y) + v(y) \\ &= \beta(\alpha u + v)(x) + (\alpha u + v)(y) \quad \text{Donc } \alpha u + v \text{ est une AL.} \end{aligned}$$

\*  $0_{F^E}$  qui est l'application nulle de  $E$  dans  $F$  appartient à  $\mathcal{L}(E, F)$ . 

Prop: Soit  $E, F, G$  trois  $K$ -ev. Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ .  
 Alors  $vu \in \mathcal{L}(E, G)$ .

Preuve:



Prop: Soit  $E, F$  deux  $K$ -ev et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire  
bijective. Alors  $u^{-1}: F \rightarrow E$  est linéaire i.e.  $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

Preuve:



3) Isomorphismes et automorphismes

Déf. \* Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $u$  est bijective on dit que  $u$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

\* Soit  $E$  et  $F$  deux  $K$ -ev. S'il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  on dit que  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

\* Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est bijective on dit que  $u$  est un automorphisme de  $E$ . On note  $\mathcal{GL}(E)$  (ou  $GL(E)$ ) l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

Prop.  $\mathcal{GL}(E)$  muni de la loi  $\circ$  (composition) est un groupe, appelé le groupe linéaire.

Preuve.

i)  $\circ$  est interne : si  $u, v \in \mathcal{GL}(E)$ ,  $u \circ v$  est linéaire et bijective. sa bijection réciproque est  $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$ .

ii)  $\circ$  est associative (c'est connu).

iii) Élément neutre :  $\text{Id}_E \in \mathcal{GL}(E)$ .

iv)  $u \in \mathcal{GL}(E)$ . Il existe un inverse  $u^{-1}$  qui est bien linéaire.  $\square$

Exemples :

i)  $E = \mathbb{R}^2$  et  $u : E \rightarrow E$   
 $(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$

$u$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

$u$  est linéaire :

$u$  est injective :

$u$  est surjective :



2) L'homothétie  $h_\alpha$  est un automorphisme de  $E$  si  $\alpha \neq 0_K$ .

On a alors  $h_\alpha^{-1} = h_{\alpha^{-1}}$ .

3) Soit  $E$  un  $K$ -ev de dim  $n$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Alors l'application  $\varphi: K^n \longrightarrow E$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

est un isomorphisme. Cela traduit le fait qu'il est équivalent de connaître un vecteur de  $E$  ou de connaître ses coordonnées dans une base.

i)  $\varphi$  est linéaire:

ii)  $\varphi$  est surjective:

iii)  $\varphi$  est injective:



$\mathcal{GL}(E)$  n'est pas un espace vectoriel.

⑨

\* L'application nulle sur  $E$  n'est pas bijective

\* La somme de deux automorphismes n'est pas forcément un automorphisme. Par exemple si  $u \in \mathcal{GL}(E)$  alors  $u - u \notin \mathcal{GL}(E)$ .

## II) Noyau et image d'une AL:

### 1) Définitions et exemples

Prop: Soit  $u : E \rightarrow F$  une AL.

i) Si  $E'$  est un sev de  $E$  alors  $u(E')$  est un sev de  $F$ .

ii) Si  $F'$  est un sev de  $F$  alors  $u^{-1}(F')$  est un sev de  $E$ .

Preuve:

$$i) u(E') = \{u(x) \text{ avec } x \in E'\} = \{y \in F \mid \exists x \in E' \text{ tq } y = u(x)\}$$

On a  $u(0_E) = 0_F$  avec  $0_E \in E'$  car  $E'$  sev de  $E$ . Donc  $0_F \in u(E')$ .

Soit  $y_1, y_2 \in u(E')$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors  $\exists x_1, x_2 \in E'$  tq  $y_1 = u(x_1)$  et  $y_2 = u(x_2)$ .

Tq  $\alpha y_1 + y_2 \in u(E')$ . On a  $\alpha y_1 + y_2 = \alpha u(x_1) + u(x_2) = u(\underbrace{\alpha x_1 + x_2}_{\in E'}) \in u(E')$ .

$$ii) u^{-1}(F') = \{x \in E \mid u(x) \in F'\}$$

Comme  $F'$  est un sev on a  $0_F \in F'$ . Comme  $u(0_E) = 0_F \in F'$  donc  $0_E \in u^{-1}(F')$ .

Soit  $x_1, x_2 \in u^{-1}(F')$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Alors  $u(x_1) \in F'$  et  $u(x_2) \in F'$ .

Comme  $F'$  est un sev de  $F$  on a  $\alpha u(x_1) + u(x_2) \in F'$ .

Comme  $u$  est linéaire  $u(\alpha x_1 + x_2) \in F'$ . Donc  $\alpha x_1 + x_2 \in u^{-1}(F')$ .  $\square$

Déf: Soit  $u: E \rightarrow F$  une AL. on appelle

\* Noyau de  $u$ :  $\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$

\* Image de  $u$ :  $\text{Im } u = \{y \in F \mid \exists x \in E \mid y = u(x)\} = u(E)$

$\text{Ker } u$  est un sev de  $E$  et  $\text{Im } u$  est un sev de  $F$ .

Exemple:

$E = \mathbb{R}^2$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  définie par  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (x, x)$ .

Déterminer  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$ . Donner une base de  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$ .

Prop: Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire, alors:

(1)  $u$  injective  $\Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0_E\}$

(2)  $u$  surjective  $\Leftrightarrow \text{Im } u = F$

Preuve: 

11

Application:

\* Considérons  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

$$(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$$

Cherchons  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$ .

Alors  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .

$$\text{Donc } \text{Ker } u = \{ (0, 0) \}$$

Donc  $u$  est injective.

$$\text{Donc } \text{Im } u = \mathbb{R}^2$$

c-à-d  $u$   
est surjective.

Prop: Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire et  $v: F \rightarrow G$  linéaire.

Alors (i)  $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$

(ii)  $\text{Ker}(v \circ u) \supset \text{Ker } u$

Preuve:

1) Soit  $z \in G$ . Alors  $z \in \text{Im}(v \circ u) \Rightarrow \exists x \in E$  tq  $z = v \circ u(x)$ .

Donc  $z = v(u(x))$  avec  $u(x) \in F$ . Donc  $z \in \text{Im } v$ .

Donc  $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ .

2) Soit  $x \in E$ . Alors  $x \in \text{Ker } u \Rightarrow u(x) = 0_F \Rightarrow v(u(x)) = v(0_F) = 0_G$ .

Donc  $v \circ u(x) = 0_G$  donc  $x \in \text{Ker}(v \circ u)$ .

Donc  $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(v \circ u)$ . □

## 2) Image d'une famille de vecteurs par une AL

Prop: Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire. Soit  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors,

1) Si  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  est libre et si  $u$  est injective alors  $(u(x_i))_{i \in [1, n]}$  est une famille libre de  $F$ .

2) Si  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  est génératrice et si  $u$  est surjective alors  $(u(x_i))_{i \in [1, n]}$  est une famille génératrice de  $F$ .

3) Si  $(x_i)_{i \in [1, n]}$  est une base de  $E$  et si  $u$  est un isomorphisme alors  $(u(x_i))_{i \in [1, n]}$  est une base de  $F$ .

Preuve: 

13

3) Le théorème noyau-image



Théorème :

Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire.

Soit  $S$  un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$  :  $E = \text{Ker } u \oplus S$ .

Alors la restriction de  $u$  à  $S$  est un isomorphisme de  $S$  dans  $\text{Im } u$ .

$u|_S : S \longrightarrow \text{Im } u$  est un isomorphisme

Preuve :

### III) Détermination d'une application linéaire

#### i) Détermination à partir d'une base :

#### Théorème fondamental de l'algèbre linéaire

Soit  $E, F$  deux  $K$ -ev.

Soit  $B = (e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ .

Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ .

Abs : il existe une unique  $Al$   $u : E \rightarrow F$   $\forall$

$$\forall i \in I, u(e_i) = f_i$$

#### Interprétation :

\* Si on connaît une application linéaire  $u : E \rightarrow F$  alors on connaît l'image de chaque vecteur de la base  $u(e_i), \forall i \in I$ .

\* Réciproquement, si on connaît l'image de chaque vecteur d'une base :  $u(e_i); i \in I$  alors on connaît l'application linéaire.

$\Rightarrow$  Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Preuve:

16

Corollaire: Si deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$   
coïncident sur une base de  $E$  alors elles sont égales.

Prop: Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire et  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ .

- (1)  $u$  est injective  $\Leftrightarrow (u(e_i))_{i \in I}$  est libre dans  $F$ .
- (2)  $u$  est surjective  $\Leftrightarrow (u(e_i))_{i \in I}$  est génératrice de  $F$ .
- (3)  $u$  est un isomorphisme  $\Leftrightarrow (u(e_i))_{i \in I}$  est une base de  $F$ .

Preuve:

2) Détermination à partir d'une somme directe

## Théorème :

Soit  $E$  et  $F$  deux  $K$ -es

On suppose que  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$

Par tout  $i \in I$  on se donne une AL  $u_i : E_i \rightarrow F$

Alors il existe une unique AL  $u : E \rightarrow F$  telle que :

$$\forall i \in I, u|_{E_i} = u_i$$

## Interprétation :

Si on a une décomposition de  $E$  en une somme directe

$E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ . Connaître une application linéaire définie sur  $E$

c'est connaître sa restriction sur chacun des  $\text{scr}$  de la somme directe.

## IV) Projecteurs et symétries :

### 1) Projecteurs :

Déf : Supposons  $E = F \oplus G$ .

On appelle projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$  l'unique endomorphisme  $p \in \mathcal{L}(E)$  tq :

$$\begin{cases} p|_F = 0 \text{ (application nulle)} \\ p|_G = \text{Id}_G \end{cases}$$

Autrement dit:

$E = F \oplus G$ . Par tout  $x \in E$ ,  $x$  s'écrit de manière unique  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . On définit alors  $p(x)$  par  $p(x) = x_G$

$$\text{car: } p(x) = p(x_F + x_G) = \underbrace{p(x_F)}_{=0} + \underbrace{p(x_G)}_{x_G} = x_G.$$

$\text{car } p|_F = 0$

Prop: Supposons  $E = F \oplus G$  et soit  $p$  le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ . Alors:

$$\text{Ker } p = F \quad \text{et} \quad \text{Im } p = G$$

En particulier, on a  $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$



1) Pour un endomorphisme  $u$ , en général on n'a pas

$$E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$$

2) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est tel que  $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$ ,  $u$  n'est pas forcément le projecteur sur  $\text{Im } u$  parallèlement à  $\text{Ker } u$ , car en général  $u|_{\text{Im } u} \neq \text{Id}_{\text{Im } u}$ .

Preuve:

\* On a clairement  $F \subset \text{Ker } p$  puisque  $p|_F = 0$ .

Soit  $x \in \text{Ker } p$ . On écrit  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

$$p(x) = 0_E = p(x_F) + p(x_G) \\ = 0 + x_G$$

Donc  $x_G = 0$ . Donc  $x = x_F$  donc  $x \in F$ . Donc  $\text{Ker } p \subset F$ .

Donc  $\text{Ker } p = F$ .

\* On a clairement que  $G \subset \text{Imp}$  car si  $x \in G$  on a  $p(x) = x$ . Donc  $x \in \text{Imp}$ .

Soit maintenant  $y \in \text{Imp}$ . Donc  $\exists x \in E$  tq  $p(x) = y$ .

On écrit  $x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ .

$$\text{on a } y = p(x) = p(x_F + x_G) = \underbrace{p(x_F)}_{=0} + \underbrace{p(x_G)}_{=x_G} = x_G.$$

Donc  $y = x_G$  donc  $y \in G$ . Donc  $\text{Imp} \subset G$ . Donc  $\text{Imp} = G$ .

Exemple:

$E = \mathbb{R}^2$ . Soit  $F = \text{vect}\{(0,1)\}$  et  $G = \text{vect}\{(1,1)\}$ . On a  $E = F \oplus G$ .

Soit  $(x,y) \in E$  alors  $(x,y)$  se décompose de manière unique selon

$E = F \oplus G$  comme suit :

$$(x,y) = (0, y-x) + (x,x)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{on cherche } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tq} \\ (x,y) = (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) \\ \quad \quad \quad = (\beta, \alpha + \beta) \end{array} \right.$$

Le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$  est l'endomorphisme :

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x,x)$$

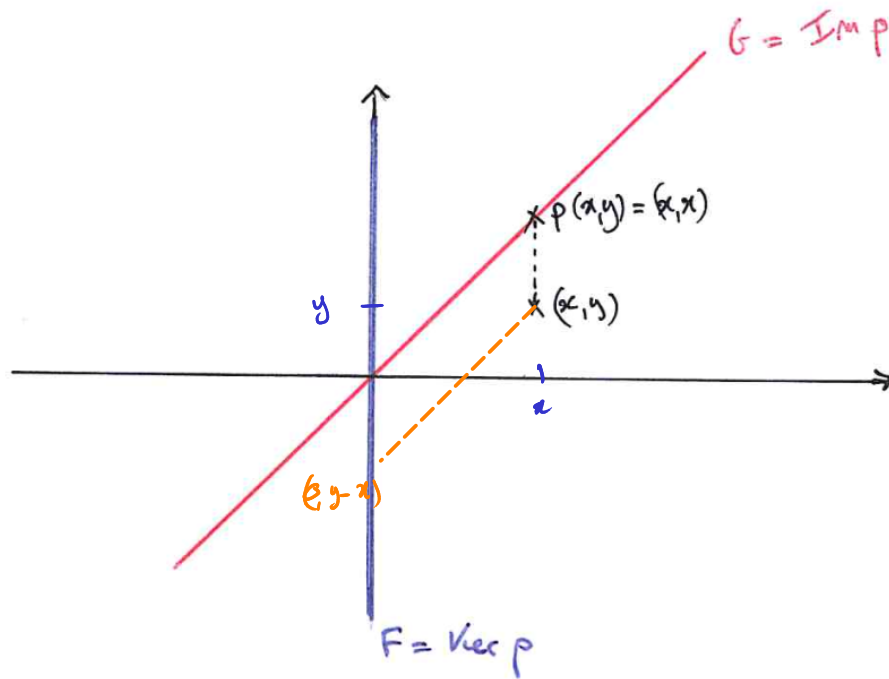
Par tout  $(0,y) \in F$  on a bien  $p(0,y) = (0,0)$ .

Par tout  $(x,x) \in G$  on a bien  $p(x,x) = (x,x)$ .



Graphiquement:

(21)



Prop:  $E = F \oplus G$ . Soit  $p$  le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ .  
Alors  $q = \text{Id}_E - p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

Preuve:

Par tout  $x \in E$ ,  $\exists! (x_F, x_G) \in F \times G$  tq  $x = x_F + x_G$ .

Par définition,  $p(x) = x_G$ . Donc:

$$q(x) = (\text{Id}_E - p)(x) = x - p(x) = x_F + x_G - x_G = x_F.$$

Donc  $q = \text{Id}_E - p : E \rightarrow E$ . Donc  $\text{Id}_E - p$  est bien le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .  $\blacksquare$

Remarque: On a alors :

$$\text{Ker}(\underbrace{\text{Id}_E - p}_q) = \text{Im } p = G \text{ et } \text{Im}(\underbrace{\text{Id}_E - p}_q) = \text{Ker } p = F.$$

Théorème: pour  $p \in \mathcal{L}(E)$ .

$p$  est un projecteur  $\Leftrightarrow p \circ p = p$ .

$p$  est alors le projecteur sur  $\text{Im } p$  parallèlement à  $\text{Ker } p$ .

Preuve:

$\Rightarrow$  Soit  $p$  le projecteur sur  $G$  parallèlement  $F$  avec  $E = F \oplus G$ .

On a :

$$i) \forall x \in F, p \circ p(x) = p(\underbrace{p(x)}_{=0_F}) = p(0_E) = 0_E = p(x) \text{ (car } x \in F)$$

$$ii) \forall x \in G, p \circ p(x) = p(\underbrace{p(x)}_{=x}) = p(x)$$

Donc les endomorphismes  $p \circ p$  et  $p$  coïncident sur  $F$  et  $G$  donc  $p \circ p = p$ .

$\Leftarrow$  Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  tq  $p \circ p = p$ . Posons  $F = \text{Ker } p$  et  $G = \text{Im } p$ . Vérifions que  $p$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

(i) Montrons que  $E = F \oplus G$

Soit  $x \in F \cap G = \text{Ker } p \cap \text{Im } p$ .

On a que  $p(x) = 0_E$  et  $\exists y \in E$  tq  $p(y) = x$ .

$$\text{Donc } 0_E = p(x) = p(p(y)) = \underbrace{p \circ p}_{p \circ p = p}(y) = p(y) = x$$

Donc  $x = 0_E$ . Donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

(ii) Soit  $x \in E$ , montrons que  $\exists x_F \in F = \text{Ker } p$  et  $\exists x_G \in G = \text{Im } p$  tels que  $x = x_F + x_G$ . (23)

Analyse : Si  $x_F$  et  $x_G$  existe alors  $p(x_F) = 0_E$  et  $\exists y \in E$  tq  $x_G = p(y)$ .  
On a alors :

$$p(x) = p(x_F) + p(x_G) = 0_E + p(p(y)) \stackrel{p \circ p = p}{=} p(y) = x_G \text{ donc } x_G = p(x)$$

Synthèse : Posons  $x_G = p(x)$  et  $x_F = x - p(x)$ .

On a bien  $x = x_F + x_G$ ,  $x_G \in \text{Im } p = G$ . Vérifions que  $x_F \in F$ :

$$p(x_F) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0_E$$

Donc  $x_F \in \text{Ker } p = F$ .

(i) et (ii)  $\Rightarrow E = F \oplus G$ .

Vérifions que  $p|_F = 0$  : c'est clair car  $F = \text{Ker } p$ .

Vérifions que  $p|_G = \text{Id}$ . Soit  $x \in G = \text{Im } p$ .  $\exists y \in E$  tq  $x = p(y)$ .

donc  $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$ . Donc  $p(x) = x \forall x \in G$  c-à-d  $p|_G = \text{Id}$ .

Application : Pour montrer qu'un endomorphisme  $u$  est un projecteur, on montre que :

$$u \circ u = u$$

Si  $u \circ u = u$  alors  $u$  est le projecteur sur  $\text{Im } u$  parallèlement à  $\text{Ker } u$ .

Exemple: Troncature dans  $\mathbb{K}[x]$ .  $u: \mathbb{K}[x] \rightarrow \mathbb{K}_n[x]$

(24)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $P = \sum_{i \geq 0} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$  ( $a_i$  nul pour  $i > n$ ), soit  
 $u(P) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ . Alors  $u \circ u = u$  donc  $u$  est un projecteur.

De plus  $\text{Im } u = \mathbb{K}_n[x]$  et  $\text{Ker } u = \{P \in \mathbb{K}[x] \mid \text{val}(P) \geq n+1\}$ .

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 x^0$$

Généralisation: Supposons  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$  avec  $I$  fini. Par

chaque  $i$ , on peut définir le projecteur sur  $E_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} E_j$ . Notons le  $p_i$ . On a alors:

$$(1) \quad p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum_{i \in I} p_i = \text{Id}_E$$

Remarques:

(1) est la généralisation de  $\begin{cases} p \circ q = p \circ (\text{Id} - p) = p - p \circ p = 0 \\ p \circ p = p \end{cases}$

(2) est la généralisation du fait que  $q + p = \text{Id}_E$

$q$ : projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  si  $p$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

## 2) Symétries :

Def : Supposons  $E = F \oplus G$ .

On appelle symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$  l'unique endomorphisme  $S \in \mathcal{L}(E)$  tq :

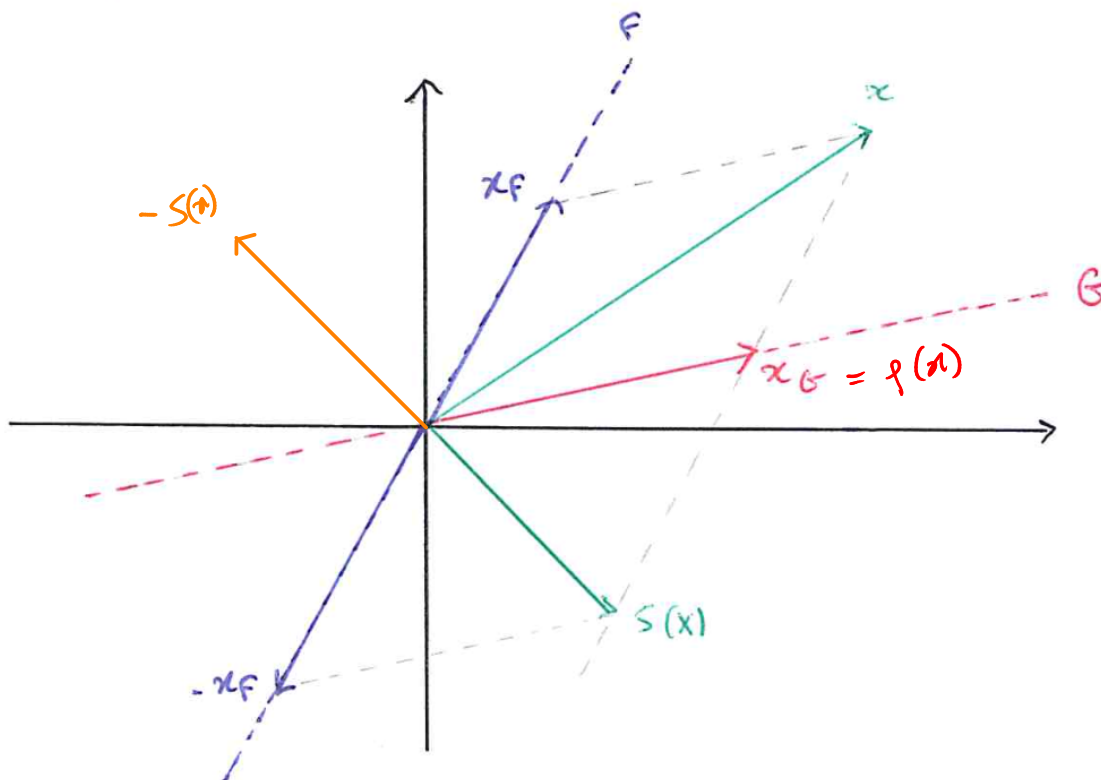
$$\begin{cases} S|_F = -\text{Id} \\ S|_G = \text{Id} \end{cases}$$

Autrement dit :

$E = F \oplus G$ . Pour  $x \in E$ ,  $x$  s'écrit de manière unique  $x = x_G + x_F$  avec  $(x_F, x_G) \in F \times G$ .

On définit  $S(x)$  par  $S(x) = S(x_G) + S(x_F) = x_G - x_F$ .

Graphiquement :



26

Prop: Supposons  $E = F \oplus G$  et soit  $s$  la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$ . Alors :

$$F = \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$$

En particulier on a  $E = \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$

Preuve:

\* On a  $F \subset \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$  puisque  $s|_F = -\text{Id}_E$ .

$$\text{C-a-d } \forall x \in F, s(x) = -x \Leftrightarrow \forall x \in F, s(x) + x = 0_E,$$

ce qui s'écrit encore  $\forall x \in F, (s + \text{Id})(x) = 0_E$  i.e.  $x \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .

Soit maintenant  $x \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ . Montrons que  $x \in F$ . On écrit

$x = x_F + x_G$  avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ . Alors :

$$s(x) = s(x_F) + s(x_G) = x_G - x_F. \text{ Or } x \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \text{ donc } s(x) + x = 0_E.$$

$$\text{Donc } \underbrace{(x_G - x_F)}_{s(x)} + \underbrace{(x_F + x_G)}_x = 0_E \quad \text{C-a-d} \quad 2x_G = 0_E \quad \text{C-a-d} \quad x_G = 0_E.$$

Donc  $x = x_F$  donc  $x \in F$ . Donc  $F = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ .

\* On a  $G \subset \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  car  $s|_G = \text{Id}_E$  ( $\forall x \in G, s(x) = x$ ).

Soit  $x \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$  C-a-d  $s(x) = x$ . On écrit  $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$

$$s(x) = s(x_F) + s(x_G) = -x_F + x_G.$$

$$s(x) = x \quad (\Leftrightarrow) \quad -x_F + x_G = x_F + x_G \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x_F = 0_E \quad (\Leftrightarrow) \quad x_F = 0_E.$$

Donc  $x = x_G$  donc  $x \in G$ . Donc  $G = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ . ■



Prop:  $E = F \oplus G$ . Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$ .  
 Alors  $-s$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

Preuve:

$$\begin{cases} S|_F = -\text{Id}_E \\ S|_G = \text{Id}_E \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} (S)|_G = -\text{Id}_E \\ (S)|_F = \text{Id}_E \end{cases} \quad \square$$

Prop:  $E = F \oplus G$ . Soit  $p$  le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$  et  $s$  la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$ . Alors:  

$$s = 2p - \text{Id}_E$$

Preuve:

Soit  $x \in E$ . On écrit  $x = x_F + x_G$ . On a alors  $p(x) = x_G$  et  $s(x) = x_G - x_F$ .

$$\text{Donc } S(x) = 2x_G - (x_F + x_G) = 2p(x) - x.$$

Donc  $\forall x \in E$ ,  $S(x) = 2p(x) - x$ . Donc  $S = 2p - \text{Id}_E$ .

Théorème: Soit  $s \in \mathcal{Z}(E)$ . Alors:

$S$  est une symétrie  $\Leftrightarrow S \circ S = \text{Id}_E$

$S$  est alors la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(S - \text{Id}_E)$   
 parallèlement à  $\text{Ker}(S + \text{Id}_E)$ .

Conséquence:  $S \in \mathcal{Z}(E)$  et  $S^{-1} = S$ .



Preuve:

⇒ Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$  avec  $E = F \oplus G$ .  
On a par  $x \in E$  qui s'écrit  $x = x_G + x_F$  :

$$S(x) = x_G - x_F = y_G + y_F \quad (\text{avec } y_G = x_G \text{ et } y_F = -x_F).$$

$$\text{Donc } sos(x) = y_G - y_F = x_G - (-x_F) = x_G + x_F = x.$$

$$\text{Donc } sos = \text{Id}.$$

⇐ Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$  tq  $sos = \text{Id}$ . Posons  $F = \text{Ker}(s + \text{Id})$  et  $G = \text{Ker}(s - \text{Id})$ . Montrons que  $s$  est la symétrie par rapport à  $G$  parallèlement à  $F$ .

(i) Montrons que  $E = F \oplus G$ .

$$\text{Soit } x \in F \cap G = \text{Ker}(s + \text{Id}) \cap \text{Ker}(s - \text{Id}).$$

$$\text{Donc } S(x) = -x \text{ et } S(x) = x \text{ donc } x = -x \text{ ie } x = 0_E.$$

Donc  $F \cap G = \{0\}$  donc  $F$  et  $G$  sont en somme directe.

Montrons que  $E = F + G$ . Soit  $x \in E$ .

$$\text{Posons } x_1 = \frac{x - S(x)}{2} \text{ et } x_2 = \frac{x + S(x)}{2} \text{ alors } x = x_1 + x_2.$$

Vérfions que  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in G$ .

$$S(x_1) = \frac{S(x) - sos(x)}{2} = \frac{S(x) - x}{2} = -x_1 \text{ donc } (s + \text{Id})(x_1) = 0$$

$$\text{donc } x_1 \in \text{Ker}(s + \text{Id}) = F.$$

$$S(x_2) = \frac{S(x) + sos(x)}{2} = \frac{S(x) + x}{2} = x_2. \text{ Donc :}$$

$$(s - \text{Id})(x_2) = 0 \text{ donc } x_2 \in \text{Ker}(s - \text{Id}) = G.$$

Il est clair que  $S|_F = -\text{Id}$  et  $S|_G = \text{Id}$ .  $\square$

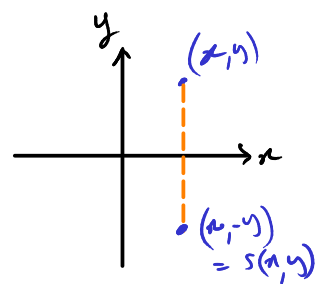
Application: par montrer qu'un endomorphisme  $u$  est une symétrie  
On montre que  $u \circ u = \text{Id}$ .

Exemples de symétries:

1)  $E = \mathbb{R}^2$  et  $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  . On a bien  $S \circ S = \text{Id}$ .  
 $(x, y) \longmapsto (x, -y)$  donc  $S$  est une symétrie.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(S - \text{Id}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S(x, y) - (x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, -y) - (x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0, -2y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = \text{l'axe des abscisses.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(S + \text{Id}) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid S(x, y) + (x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, -y) + (x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x, 0) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} = \text{l'axe des ordonnées.} \end{aligned}$$



Donc  $S$  est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses parallèlement à l'axe des ordonnées.



## IV) Applications linéaires en dimension finie

31

### 1) Rang d'une application linéaire

Prop: Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire et  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ .

Alors  $\text{Im } u = \text{Vect} \{u(e_i)_{i \in I}\}$ .

Donc la famille  $(u(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $\text{Im } u$ .

Preuve:

Déf: Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire

On appelle rang de  $u$  et on note  $\text{rg}(u)$  la dimension de  $\text{Im } u$ .

$$\text{rg}(u) = \dim \text{Im}(u).$$

Convention habituelle: Si  $\text{Im } u$  n'est pas de dimension finie alors

$$\text{rg}(u) = \dim \text{Im } u = +\infty.$$

Rq:  $\text{rg}(u) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

Prop: Soit  $u: E \rightarrow F$  linéaire. Alors

$$\text{rg}(u) \leq \dim E \quad \text{et} \quad \text{rg}(u) \leq \dim F$$

Remarque: On écrit aussi  $\text{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$ .

Preuve:



### Théorèmes

Soit  $E, F$  deux  $K$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors:

1)  $u$  injective  $\Leftrightarrow \text{rg}(u) = \dim E$

2)  $u$  surjective  $\Leftrightarrow \text{rg}(u) = \dim F$

3)  $u$  est un isomorphisme  $\Leftrightarrow \text{rg}(u) = \dim E = \dim F$

Preuve:



Prop: Soit  $E, F$  deux  $K$ -es de dimension finie. Alors :

$E$  et  $F$  sont isomorphes  $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$

Preuve:



Théorème: Soit  $E, F$  deux  $K$ -es de dim finie et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .  
 On suppose  $\dim E = \dim F$ . Alors:  
 $u$  injective  $\Leftrightarrow u$  surjective  $\Leftrightarrow u$  bijective.

Preuve:

□

⚠ Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $E$  de dimension infinie  $u$  injective  $\not\Leftrightarrow u$  surjective.

Exemple:  $u: \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$   
 $f \mapsto f'$

$u$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (déjà vu).

$u$  est surjective:

$u$  n'est pas injective:



### 3) Le Théorème du Rang :

#### Théorème :

Soit  $E$  et  $F$  deux  $K$ -ev avec  $E$  de dim finie.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\dim E = \text{rg}(u) + \dim \text{Ker}(u)$$

#### Preuve :



Applications : On utilise souvent ce th. comme suit. Connaissant  $\dim E$ . On calcule  $\dim \text{Ker}(u)$ , par exemple en déterminant  $\text{Ker}(u)$ . On en déduit :

$$\text{rg}(u) = \dim E - \dim \text{Ker}(u)$$

Exercice:

Soit  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (-x + y + z, x + y - z)$ .

- 1) Montrer que  $f$  est linéaire.
- 2) Donner une base de  $\text{Ker}(f)$ .
- 3) En déduire le rang de  $f$ .

Réponse:

Exercice:  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  définie par :

Soit  $u: \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ . Calculer  $\text{rg}(u)$  et  $\dim \text{Ker}(u)$ .

$$P \longmapsto P''$$