

Chapitre 1: Nombres réels, nombres rationnels

On suppose connus les ensembles

- des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

ainsi que les opérations $+$ et $\times$ sur ces ensembles et la relation d'ordre $\leq$.

1) Rappels sur les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

1) $\mathbb{Q}$:

Théorème (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)

Par tous $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\exists ! (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tq

$$\begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

q est le nombre de parts entières de b qu'il y a dans a .
 r est le reste $r = a - qb$.

Problème: dans $\mathbb{Z}$, on ne peut pas faire de division sans reste.

Déf: L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble de nombres appelés nombres rationnels et notés sous forme de fractions $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Le nombre $\frac{a}{b}$ est le résultat du partage de a en b parties égales.

L'entier a est appelé le numérateur de la fraction $\frac{a}{b}$.

L'entier b est appelé le dénominateur de la fraction $\frac{a}{b}$.

Remarques:

1) Il n'y a pas unicité de la fraction représentant un nombre rationnel: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ définissent le même rationnel si on a $ad = bc$.

Tout rationnel r a une écriture unique $r = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et a et b premiers entre eux ($\text{pgcd}(a, b) = 1$). On dit que $\frac{a}{b}$ est la forme irréductible de r .

2) Comme $\frac{a}{b}$ est le résultat du partage de a en b parties égales on a $\frac{a}{1} = a$. On a donc l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

On a aussi :

$$\frac{a}{a} = 1 \quad (\text{le partage de } a \text{ en } a \text{ parties égales donne } 1)$$

3) On définit sur $\mathbb{Q}$ les opérations $+$ et $\times$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

avec l'identification $\frac{a}{1} = a$, ces opérations prolongent les opérations usuelles sur $\mathbb{Z}$ et on a :

$$\frac{a}{b} \times b = \frac{a}{b} \times \frac{b}{1} = \frac{ab}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{b} = \frac{a}{1} = a.$$

4) Soit $x = \frac{a}{b}$ avec $a \neq 0$. Alors il existe un unique $y \in \mathbb{Q}$ tq $xy = 1$.

En effet $y = \frac{b}{a}$ si $a > 0$ ou $y = \frac{-b}{-a}$ si $a < 0$ vérifie :

$$xy = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1 \quad \text{ou} \quad xy = \frac{a}{b} \times \frac{-b}{-a} = \frac{-ab}{-ab} = 1.$$

On note alors $y = x^{-1}$.

5) On dit que $\mathbb{Q}$ est un corps c'est à dire un ensemble muni de deux lois $+$ et $\times$ (qui vérifient certaines propriétés) dans lequel tout élément non nul admet un inverse par la multiplication.

$\mathbb{Z}$ n'est pas un corps car 3 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$ par la multiplication (c'est un anneau).

Déf : un rationnel $\frac{a}{b}$ est dit ≥ 0 si a est ≥ 0 . Si x et y sont deux rationnels, on dit que $x \geq y$ si $x - y \geq 0$. On écrit aussi $y \leq x$ et si x et y sont distincts on écrit $x > y$ ou $y < x$.

Prop: Soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ & $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ (avec $b, d \geq 0$).

$$\text{On a } \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc \text{ et } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ab < bc.$$

Preuve: $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$.

Prop: La $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$. c'est-à-dire qu'elle est:

1) Reflexive: $\forall x \in \mathbb{Q}, x \leq x$

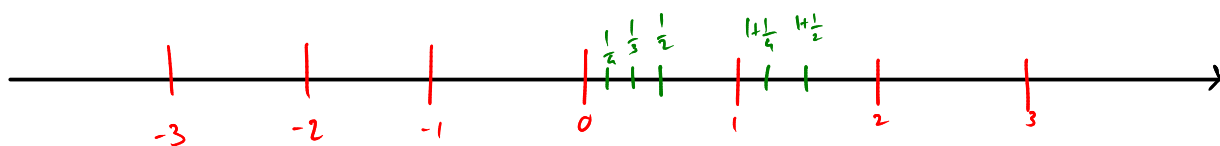
2) Transitive: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

3) Antisymétrique: $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$

De plus c'est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{Q}$ c-a-d qu'on peut toujours comparer deux éléments de $\mathbb{Q}$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit que $\mathbb{Q}$ est un corps totalement ordonné.



Prop: $\mathbb{Q}$ muni de la relation d'ordre $\leq$ est archimédien c-a-d que :
pour tous rationnels $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n\varepsilon = \underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon}_{n \text{ fois}} > A$$

2) $\mathbb{R}$:

Problème: Il y a des trous dans $\mathbb{Q}$!

On peut constater que certains nombres ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.

Par exemple, la longueur x de la diagonale d'un carré de côté 1 doit vérifier $x^2 = 1 + 1 = 2$ par le th. de Pythagore.

Or on peut vérifier qu'aucun nombre rationnel $r = \frac{a}{b}$ ne peut être égal à x .

Et pourtant, on a envie de dire que x est un nombre compris entre 1 et 2!

Les Grecs avaient même une méthode pour approcher $\sqrt{2}$ par des nombres rationnels: la méthode de Héron:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On peut montrer que

$$\forall n \geq 0, \quad x_{n+1}^2 - 2 \geq 0$$

$$\forall n \geq 0, \quad x_{n+1} - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n}$$

On en déduit que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 1 puisque (x_n^2) est minorée par 1. Si elle converge vers une limite l alors

$$l \text{ doit vérifier : } l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{2}{l} \right) \Leftrightarrow \frac{l}{2} = \frac{1}{l} \Leftrightarrow l^2 = 2$$

On a donc construit une suite de rationnels décroissante, minorée qui si elle converge ne converge pas vers un rationnel.

Il faudrait compléter l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ en un ensemble plus grand noté $\mathbb{R}$ et qui possède la propriété suivante:

$\mathbb{P}$: toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ qui est décroissante minorée est convergente.

Théorème (admis) :

Il existe un unique corps totalement ordonné, archimédien, noté $\mathbb{R}$ qui possède la propriété $\tilde{P}$. Ce corps est appelé le corps des nombres réels et il contient le corps $\mathbb{Q}$.

Remarque : Il est équivalent de demander que le corps $\mathbb{R}$ possède la propriété $\tilde{P}$ ou la propriété suivante :

$\tilde{P}$: Toute partie non vide majorée A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure c'-à-d un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$1) \forall a \in A, a \leq \alpha$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tq } \alpha - \varepsilon < a.$$

D'autres propriétés sont équivalentes (existence de la borne inf d'une partie non vide minorée, théorème des suites adjacentes etc...).

Prop/def : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ qui vérifie

$$n \leq x < n+1.$$

n est appelé la partie entière de x . On le note $\lfloor x \rfloor$.

Preuve :

1) Existence :

• Si $x = 0$ on prend $n = 0$

• Si $x > 0$ on note $A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tq } n \leq x\}$. $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$.

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tq $k.1 > x$ donc A est majorée par k . A est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément. Notons le n . On a $n \in A$ donc $n \leq x$ et $n+1 \notin A$ donc $n+1 > x$.

• Si $x < 0$. On pose $y = -x$. Par ce qui précède, il existe $m \in \mathbb{N}$ tq $m \leq y < m+1$.
Si $m=y$ alors $n = -m$ convient. Si $m < y < m+1$ alors $n = -m-1$ convient.

2) Unicité : Supposons qu'on a deux entiers n et $m \in \mathbb{Z}$ tq $n \leq x < n+1$ et $m \leq x < m+1$.
Alors $n < m+1$ et $m < n+1$ donc $n \leq m$ et $m \leq n$ donc $n = m$.

II) Nombres décimaux :

1) Définitions et 1^{ère} propriétés :

Def : Un nombre décimal est un nombre rationnel qui admet une écriture fractionnaire de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

Prop : 1) On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

2) La somme, la différence et le produit de deux décimaux est un décimal (on dit que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$).

Preuve : en exo.

Prop : Un nombre rationnel est décimal si et seulement si dans son écriture sous forme de fraction irréductible, le dénominateur n'a que des 2 ou des 5 dans sa décomposition en facteurs premiers.

Preuve :

⇒ Si x est décimal, $x = \frac{a}{10^n} = \frac{a}{2^n 5^n}$, alors la fraction irréductible associée (obtenue en simplifiant a et $2^n 5^n$ par autant de 2 et de 5 que possible) n'a que des 2 et des 5 au dénominateur.

⇐ Soit x un rationnel qui s'écrit $x = \frac{p}{2^a 5^b}$. Soit $r = \max(a, b)$.
Alors $x = \frac{p 2^{r-a} 5^{r-b}}{10^r}$ donc x est un décimal. ■

Exemples :

2) Écriture d'un nombre décimal en base b :

Soit $x = \frac{a}{10^n}$ un nombre décimal.

On écrit a en base b : $a = \sum_{i=0}^m \alpha_i b^i = \overline{\alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_0}^b$

Les α_i sont des entiers tels que $0 \leq \alpha_i \leq b-1$ et $\alpha_m \neq 0$.

Supposons $m \geq n$. On a alors

$$\begin{aligned} x = \frac{a}{10^n} &= \frac{1}{10^n} \sum_{i=0}^m \alpha_i b^i = \sum_{i=0}^m \alpha_i b^{i-n} \\ &= \alpha_m b^{m-n} + \alpha_{m-1} b^{m-n-1} + \dots + \alpha_{n+1} b + \alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{b} + \dots + \frac{\alpha_0}{b^n}. \end{aligned}$$

On note alors $x = \overline{\alpha_m \alpha_{m-1} \dots \alpha_{n+1} \alpha_n, \alpha_{n-1} \dots \alpha_0}^b$ avec une virgule pour séparer les chiffres qui correspondent aux puissances positives de b et ceux qui correspondent aux puissances négatives.

Exemples :

Dans la suite on écrira un nombre décimal (positif) plutôt comme suit :

$$x = b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0, a_1 a_2 \dots a_n.$$

Le principal intérêt des nombres décimaux (par rapport aux nombres rationnels) est que la somme et le produit de deux décimaux se calculent essentiellement comme la somme et le produit de deux nombres entiers.

$$\begin{array}{r} \overset{2}{3}14 \\ \times 75 \\ \hline 1570 \\ 21980 \\ \hline 23550 \end{array}$$

$$\text{donc } 3,14 \times 7,5 = 23,55$$

L'autre intérêt c'est qu'on peut approcher tous les réels par des nombres décimaux avec autant de précision que souhaitée !

III) Approximation d'un réel par des nombres décimaux :

i) Approximations décimales par défaut et par excès d'un réel :

Théorème :

Soit x un nombre réel ≥ 0

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le nombre décimal $x_n = \frac{q_n}{10^n}$ avec $q_n = \lfloor 10^n x \rfloor$

Alors :

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante, la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ avec $y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ est décroissante. Ce sont deux suites adjacentes qui convergent vers x .

Preuve : 

Remarque: Comme $\lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor 10^n y \rfloor \in \mathbb{Z}$, x_n et y_n sont deux nombres décimaux qui ont au plus n décimales non nulles après la virgule.

Définition:

1) Soit x un réel positif. Alors

$x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est appelé l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut.

$y_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ est appelé l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès.

2) Soit x un réel négatif. Alors

$x_n = -\frac{\lfloor -10^n x \rfloor}{10^n} - \frac{1}{10^n}$ est l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut.

$y_n = -\frac{\lfloor -10^n x \rfloor}{10^n}$ est l'approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès.

Exemples:

1) App. à 10^{-3} près par défaut de π :

2) App. à 10^{-3} près par excès de π :

3) App. à 10^{-3} près par défaut de $-\pi$.

4) App. à 10^{-5} près par défaut de $\frac{1}{3}$

5) App. à 10^{-5} près par excès de $\frac{1}{3}$

2) Développement décimal illimité d'un réel :

Réponse : Soit x un réel ≥ 0 .

Alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ des approximations décimales de x par défaut est donnée par

$$x_n = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{10^i}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

où la suite des chiffres $(a_n)_{n \geq 0}$ est donnée par

$$\begin{cases} a_0 = \lfloor x \rfloor & \text{ou } q_1 = \lfloor 10x \rfloor. \\ a_{n+1} = q_{n+1} - 10q_n \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

Remarques :

1) Si $x \geq 0$ les approximations décimales par défaut successives s'écrivent donc

$$x_0 = a_0$$

$$x_1 = \overline{a_0, a_1}^{10}$$

$\vdots$

$$x_n = \overline{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n}^{10}$$

2) Si $x \in \mathbb{D}$ on a $x = \frac{a}{10^m}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.

On a alors pour tout $n \geq m$: $q_n = \lfloor 10^n x \rfloor = \lfloor 10^{n-m} a \rfloor = 10^{n-m} a$ donc $x_n = x$

et $a_{nn} = q_n - 10q_n = 0$, $a_{n2} = 0$, $a_{n+1} = 0, \dots$

Donc $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_m}{10^m}$. Les (a_i) sont donc les décimales de x et elles sont naturellement toutes nulles à partir du rang $m+1$.

Développement décimal illimité d'un réel :

Soit x un réel positif.

On a $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{10^i}$ ce qu'on écrit aussi :

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

ou encore $x = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$

Cette écriture s'appelle le développement décimal illimité de x .

Par exemple $\pi = 3,14159\dots$

 Il n'y a pas unicité du développement décimal illimité. Un même réel peut avoir deux développements décimaux illimités différents.

Par exemple : $1 = 1$ admet les développements décimaux suivants :

$$1 = 1,0000\dots$$

$$1 = 0,9999\dots$$

Montrons que le deuxième développement est égal à 1. Il s'agit de montrer que la suite $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{9}{10^i}$ converge vers 1. En effet :

Un développement décimal qui se termine avec une suite de 9 est dit impair.

Prop: Soit x un réel ≥ 0 .

Alors le développement décimal $x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$

avec $\{a_0 = \lfloor x \rfloor$

$\{a_n = q_n - 10q_n, \forall n \geq 0 \text{ où } q_n = \lfloor b^n x \rfloor$

n'est pas impair.

Rq: on a une propriété analogue pour les réels négatifs.

Prop: Soit x un réel ≥ 0 .

Soit $x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{b^i}$ son développement décimal illimité calculé comme ci-dessus

Alors x est un nombre décimal si et seulement si tous les termes de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ sont égaux à 0 à partir d'un certain rang.

Preuve:

On sait déjà qu'un nombre décimal a ses décimales nulles à partir d'un certain rang. Réciproquement, si dans le développement décimal illimité de x , les a_i sont tous nuls à partir d'un rang m , alors la suite x_n est stationnaire:

$\forall n \geq m, x_n = \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{b^i} = x_m$. Comme elle converge vers x on a donc

$x = x_m = \frac{q_m}{b^m}$ donc $x \in \mathbb{D}$. $\square$

Remarque: on a le même résultat si x est un réel ≤ 0 .

2) Développement décimal illimité d'un rationnel

Soit $x = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ un nombre rationnel.

On suppose $x \geq 0$ par fixer les idées c-à-d $0 \leq a$

On peut calculer les décimales du développement décimal illimité de n par une succession de divisions euclidiennes. On a :

$$n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

avec $a_0 = \lfloor n \rfloor$ et $a_n = q_n - b q_{n+1} \quad \forall n \geq 0$ où $q_n = \lfloor \frac{10^n a}{b} \rfloor$.

Comme $q_n \leq \frac{10^n a}{b} < q_{n+1}$ on a $b q_n \leq 10^n a < b q_{n+1}$.

On en déduit qu'il existe un entier r_n tq $10^n a = b q_n + r_n$ avec $0 \leq r_n < b$.

q_n et r_n sont le quotient et le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b .

On a donc
$$\begin{cases} 10^n a = b q_n + r_n & (1) \\ 10^{n+1} a = b q_{n+1} + r_{n+1} & (2) \end{cases}$$

(2) - 10(1) donne $b(q_{n+1} - 10 q_n) + r_{n+1} = 10 r_n$ c-a-d $10 r_n = b a_{n+1} + r_{n+1}$.

Comme $0 \leq r_{n+1} < b$ on en déduit que a_{n+1} est le quotient de la division euclidienne de $10 r_n$ par b .

On peut donc calculer les décimales a_i par une succession de divisions euclidiennes :

* on commence par faire la division euclidienne de a par b :

$$a = b q_0 + r_0 = b a_0 + r_0$$

* Puis la division euclidienne de $10 r_0$ par b , le quotient est a_1 :

$$10 r_0 = b a_1 + r_1$$

* Puis $10 r_1 = b a_2 + r_2 \dots$

On retrouve là l'algorithme que l'on connaît bien depuis longtemps.

Exemple : On cherche le développement décimal illimité de $\frac{15}{7}$.

$$15 = 7 \times 2 + 1$$

$$10 \times 1 = 7 \times 1 + 3$$

$$10 \times 3 = 7 \times 4 + 2$$

$$10 \times 2 = 7 \times 2 + 6$$

$$10 \times 6 = 7 \times 8 + 4$$

$$10 \times 4 = 7 \times 5 + 5$$

$$10 \times 5 = 7 \times 7 + 1$$

$$10 \times 1 = 7 \times 1 + 3$$

⋮

Donc $\frac{15}{7} = 2,14285714285714\dots$

En général on écrit l'algorithme comme cela :

15	7
10	2,1428571...
30	
20	
60	
40	
50	
10	
⋮	

On remarque sur cet exemple que le développement décimal illimité de $\frac{15}{7}$ est périodique à partir d'un certain rang c-à-d que la suite est périodique à partir d'un certain rang. Ici la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est périodique à partir du rang $n_0 = 1$ et sa période est égale à $p = 6$: $\forall n \geq n_0, a_{n+p} = a_n$.
En fait cette propriété caractérise les nombres rationnels.

Prop. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Soit $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ son développement décimal illimité calculé par l'algorithme ci-dessus.

Alors $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tq :

$$\forall n \geq n_0, a_{n+p} = a_n.$$

Preuve :

① On suppose $x \in \mathbb{Q}$ avec $x = \frac{a}{b}$. Alors les (a_n) sont quotients de la suite de divisions euclidiennes par b :

$$a = bq_0 + r_0, 10b = ba_1 + r_1, 10r_1 = ba_2 + r_2, \dots$$

les restes (r_n) sont des entiers compris entre 0 et b . Comme il y a un nombre fini d'entiers entre 0 et b , il existe forcément $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tq

$r_{n_0} = r_{n_0+p}$. On a alors $a_{n_0} = a_{n_0+p}$ (par unicité de la division euclidienne) et par récurrence immédiate on voit que pour tout $n \geq n_0$, $a_{n+p} = a_n$.

② Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que le développement illimité de x est périodique à partir d'un certain rang c-à-d qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, a_{n+p} = a_n$. Soit $s = n_0 - 1$. on écrit

$$x = b_s b_{s+1} \dots b_{s+p} a_1 a_2 \dots a_p a_1 a_2 \dots a_p \dots$$

$$\text{Donc } 10^s x - b_s b_{s+1} \dots b_{s+p} = y = 0, a_1 a_2 \dots a_p a_1 a_2 \dots a_p \dots$$

$$\text{On multiplie } y \text{ par } 10^p, \quad 10^p y = a_1 a_2 \dots a_p a_1 a_2 \dots a_p \dots = a_1 a_2 \dots a_p + y.$$

$$\text{Donc } y = \frac{1}{1 - 10^p} \text{ et } x = \frac{b_s \dots b_{s+p} + y}{10^s} \quad \text{donc } x \in \mathbb{Q}. \quad \square$$

Remarque: Comment connaître n_0 et p ? On écrit x sous forme de fraction irréductible: $x = \frac{a}{b}$ et on écrit $b = 2^x 5^p q$ avec q premier avec 10. Alors

1) $n_0 = \max(x, p)$

2) p est le plus petit entier strictement positif tel que $10^p \equiv 1 \pmod{q}$.

IV) Notion de densité:

Définition: Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout $n \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A qui converge vers n .

Théorème: 1) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve:



Prop : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x .
 - 2) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ il existe $\alpha \in A$ tel que $x < \alpha < y$.
 - 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in A$ tel que $\alpha \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
- On dit alors que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : ❤️