# Chapitre II : Comparaisons de fonctions au voisinage d'un point, dérivation, suites récurrentes

## I) Comparaison de fonctions au voisinage d'un point

**Déf.** * Soit $a \in \mathbb{R}$, un voisinage de $a$ est un intervalle de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$.

* Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

* Un voisinage de $-\infty$ est un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$ $(= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ on note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$.

**Remarque:** L'intersection de deux voisinages de $a$ est un voisinage de $a$.

### 1) Relation de domination $f \underset{x \to a}{=} O(g)$ :

**Déf:** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Soit $a \in I$ ou une extrémité de $I$ (éventuellement $\pm\infty$).
On dit que $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $a$, et on note $f \underset{x \to a}{=} O(g)$ si $f$ est le produit de $g$ et d'une fonction bornée au voisinage de $a$:

$\exists V \in V(a)$ et $h : V \to \mathbb{R}$ tq :

$$\begin{cases} \forall x \in V \cap I, & f(x) = g(x)\,h(x) \\ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in V \cap I, & |h(x)| \leq M \end{cases}$$

Remarque : $f \underset{x\to a}{=} O(g)$ se lit « $f$ est un grand O de $g$ au voisinage de $a$ ». Cette notation a été introduite par le mathématicien allemand Edmund Landau.

Exemples :

1) $x\sin(x) \underset{x\to 0}{=} O(x)$

2) $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x-1} \underset{x\to 1}{=} O\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

3) $3x \underset{x\to +\infty}{=} O(x)$

4) $x^3 \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$

5) $x^2 \underset{x\to +\infty}{=} O(x^3)$

6) $\ln x \underset{x\to +\infty}{=} O(x)$

Prop : La relation de domination est transitive :

Si $f$ est dominée par $g$ au voisinage de $a$ et $g$ est dominée par $h$ au voisinage de $a$ alors $f$ est dominée par $h$ au voisinage de $a$ :

$$f \underset{x\to a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{x\to a}{=} O(h) \Rightarrow f \underset{x\to a}{=} O(h).$$

Preuve :

Prop : Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$ alors :

$$f \underset{x\to a}{=} O(g) \iff \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

Preuve :

$g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$ :

$$\exists V' \in \mathcal{V}(a) \text{ tq } \forall x \in V',\ g(x) \neq 0$$

$$f \underset{x\to a}{=} O(g) \iff \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ et } h : V \to \mathbb{R} \text{ bornée tq } \forall x \in V \cap I,\ f(x) = g(x)\,h(x)$$

$$\iff \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ et } h : V \to \mathbb{R} \text{ bornée tq } \forall x \in V \cap V' \cap I,\ \frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$$

$$\iff \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$

## 2) Relation de négligeabilité $f \underset{x\to a}{=} o(g)$.

**Déf:** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

Soit $a \in I$ ou une extrémité de $I$.

On dit que $f$ est <u>négligeable devant $g$ au voisinage de $a$</u>, et on note $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ si $f$ est le produit de $g$ par une fonction qui tend vers zéro en $a$ :

$\exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \forall x \in V \cap I, & f(x) = g(x)\,\varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases}$$

<u>Remarque:</u> $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ se lit : " $f$ est un petit o de $g$ au voisinage de $a$ ".

<u>Exemples.</u>

1) $x^2 \underset{x\to +\infty}{=} o(x^3)$

2) $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$

3) $\dfrac{1+x^3}{x^5} \underset{x\to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4) $x \underset{x\to 0}{=} o(\sqrt{x})$

5) $|x|^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(|x|^\beta)$ pour $\alpha > \beta \geq 0$.

6) Exemple important :

$$f \underset{x\to a}{=} o(1) \iff \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

En effet : $f \underset{x\to a}{=} o(1) \iff \exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tq
$$\begin{cases} \forall x \in V\cap I,\ f(x) = 1 \times \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

De même, pour tout réel $\alpha \neq 0$ : $f \underset{x\to a}{=} o(\alpha) \iff \lim_{x\to a} f(x) = 0.$

$f(x) = \alpha \times \frac{f(x)}{\alpha}$

Prop : La relation de négligeabilité est transitive :

$$f \underset{x\to a}{=} o(g) \text{ et } g \underset{x\to a}{=} o(h) \implies f \underset{x\to a}{=} o(h)$$

Preuve :

* $f \underset{x\to a}{=} o(g) \iff \exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon_1 : V \to \mathbb{R}$ avec $\varepsilon_1 \xrightarrow[x\to a]{} 0$ tq
$\forall x \in V\cap I,\ f(x) = g(x)\,\varepsilon_1(x)$

* $g \underset{x\to a}{=} o(h) \iff \exists V' \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon_2 : V' \to \mathbb{R}$ avec $\varepsilon_2 \xrightarrow[x\to a]{} 0$ tq
$\forall x \in V'\cap I,\ g(x) = h(x)\,\varepsilon_2(x)$

Donc $\forall x \in V\cap V'\cap I$, $f(x) = h(x)\underbrace{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)}_{\varepsilon(x)}$ avec $\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

Donc $f \underset{x\to a}{=} o(h)$. ■

**Prop :** On a les propriétés suivantes :

1) $f \underset{x \to a}{=} o(g) \implies f \underset{x \to a}{=} O(g)$

2) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \underset{x \to a}{=} o(g) \implies \alpha f \underset{x \to a}{=} o(g)$

3) $f \underset{x \to a}{=} o(h)$ et $g \underset{x \to a}{=} o(h) \implies f+g \underset{x \to a}{=} o(h)$

4) $\left.\begin{array}{l} f \underset{x \to a}{=} o(g) \\ h \underset{x \to a}{=} o(i) \end{array}\right\} \implies fh \underset{x \to a}{=} o(gi)$

Les propriétés 2), 3) et 4) sont aussi vraies pour des $O$.

**Preuve :** laissée en exo.

**Prop :** Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$ alors :

$$f \underset{x \to a}{=} o(g) \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

**Preuve :**

$f \underset{x \to a}{=} o(g) \iff \exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et $\forall x \in V \cap I$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

$\iff \exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ et

$\forall x \in V \cap V' \cap I$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \varepsilon(x)$ où $V'$ est le voisinage de $a$ (éventuellement privé de $a$) où $g$ ne s'annule pas.

$\iff \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ ∎

## Application:

1) $\sin(x) \underset{0}{=} o\left(\sqrt{|x|}\right)$

2) $$\frac{1}{2x^3+\sqrt{x^4+x^2}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

**Prop :** Croissance comparée (à connaître)

Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ :

1) $(\ln x)^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\beta) \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$

2) $|\ln|x||^\alpha \underset{x \to 0}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right) \iff \lim_{x \to 0} |x|^\beta |\ln|x||^\alpha = 0$

3) $x^\beta \underset{x \to +\infty}{=} o(e^{\alpha x}) \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$

4) $e^{\alpha x} \underset{x \to -\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ et $e^{-\alpha x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$

$\iff |x|^\beta e^{\alpha x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ $\qquad \iff x^\beta e^{-\alpha x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

**Preuve:** par croissance comparée.

## 3) Relation d'équivalence $f \underset{x \to a}{\sim} g$ :

**Déf :** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
Soit $a \in I$ ou une extrémité de $I$.
On dit que <u>$f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $a$</u>, et on note $f \underset{x \to a}{\sim} g$ si $f$ est égale au produit de $g$ par une fonction qui tend vers 1 en $a$ :

$\exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $h : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} \forall x \in V \cap I, \quad f(x) = g(x)\, h(x) \\ h(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1 \end{cases}$$

**Prop :** Si $g$ ne s'annule pas sur un voisinage de $a$, sauf éventuellement en $a$, alors :

$$f \underset{x \to a}{\sim} g \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Exemples :** (à connaître)

1) $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ car $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

2) $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ car $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

3) $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ car $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

cf taux d'accroissement

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$

4) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$

5) $\ln(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$.

<u>Prop:</u> La relation $f \sim g$ est une relation d'équivalence. Elle est :

1) Réflexive : $f \underset{x \to a}{\sim} f$

2) Transitive : $f \underset{x \to a}{\sim} g$ et $g \underset{x \to a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{x \to a}{\sim} h$

3) Symétrique : $f \underset{x \to a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{x \to a}{\sim} f$

Preuve :

1) Evident

2) $f \underset{x\to a}{\sim} g$ donc $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon_1 : V \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon_1(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$
et $\forall x \in V \cap I$, $f(x) = g(x)\,\varepsilon_1(x)$

$g \underset{x\to a}{\sim} h$ donc $\exists V' \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon_2 : V' \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$
et $\forall x \in V' \cap I$, $g(x) = h(x)\,\varepsilon_2(x)$.

Donc $\forall x \in V \cap V' \cap I$, $f(x) = h(x)\,\varepsilon_1(x)\,\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

3) $f \underset{x\to a}{\sim} g$ donc $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$
et $\forall x \in V \cap I$, $f(x) = g(x)\,\varepsilon(x)$.

Comme $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$, il existe un voisinage $V'$ de $a$ tq pour tout $x \in V'$, $\varepsilon(x) > \frac{1}{2}$ donc $\varepsilon(x) \neq 0$. On a alors :
$\forall x \in V \cap V' \cap I$, $g(x) = f(x) \times \dfrac{1}{\varepsilon(x)}$. Comme $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ on a $\dfrac{1}{\varepsilon(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$. Donc $g \underset{a}{\sim} f$. $\blacksquare$

Prop : $f \underset{x\to a}{\sim} g \iff f - g \underset{x\to a}{=} o(g) \iff f - g \underset{x\to a}{=} o(f)$

Preuve :

Autrement dit : $\boxed{f \underset{x\to a}{\sim} g \iff f = g + \underset{x\to a}{o}(g)}$

Exemples : A connaître par ♥

1) $\sin(x) \underset{0}{\sim} x \iff \sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$

2) $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \iff \ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$

3) $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \iff e^x - 1 \underset{0}{=} x + o(x) \iff e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$

4) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \iff (1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$

5) Equivalent d'un polynôme en 0 :

6) Equivalent d'un polynôme en $+\infty$ :

Remarque : Si $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes non nulles alors :

$f \underset{x\to a}{=} o(g) \iff \alpha f \underset{x\to a}{=} o(\beta g)$ et idem avec le O.

c'est faux pour la relation d'équivalence.

⚠ $f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \alpha f \underset{a}{\sim} \beta g$

Prop : $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ h \underset{a}{\sim} i \end{array}\right\} \Rightarrow fh \underset{a}{\sim} gi$

Preuve :

$f \underset{a}{\sim} g$ donc $\left\{\begin{array}{l} \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \varepsilon_1 : V \to \mathbb{R} \text{ tq } \varepsilon_1(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1 \text{ et} \\ \forall x \in V \cap I,\ f(x) = g(x)\varepsilon_1(x). \end{array}\right.$

$h \underset{a}{\sim} i$ donc $\left\{\begin{array}{l} \exists V' \in \mathcal{V}(a) \text{ et } \varepsilon_2, V \to \mathbb{R} \text{ tq } \varepsilon_2(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1 \text{ et} \\ \forall x \in V' \cap I,\ h(x) = i(x)\varepsilon_2(x) \end{array}\right.$

Donc $\forall x \in V \cap V' \cap I$, $f(x)h(x) = g(x)i(x)\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

Donc $fh \underset{a}{\sim} gi$. ∎

⚠ $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ h \underset{a}{\sim} i \end{array}\right\} \not\Rightarrow f+h \underset{a}{\sim} g+i$ !

L'équivalence est compatible avec la multiplication, mais pas avec l'addition. Dans un calcul de limite (voir ci-dessous) on peut remplacer une fonction par une fonction équivalente dans un produit ou un quotient mais jamais dans une somme ou une différence.

Application au calcul de limites :

**Prop :** Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

**Preuve :**

**Exemples de calcul de limite avec des équivalents :**

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 - x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 - x}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1+x) \ln(x)$

**Prop:** Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g$ est de signe constant au voisinage de $a$ alors $f$ est de même signe au voisinage de $a$.

**Preuve:**

* $f \underset{a}{\sim} g$ donc $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ et $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 1$ et
$$\forall x \in V \cap I,\ f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

* $g$ de signe constant au voisinage de $a$ (disons $g > 0$ pour fixer les idées) donc $\exists V' \in \mathcal{V}(a)$ tq $\forall x \in V' \cap I$, $g(x) > 0$.

* $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 1$ donc $\exists V'' \in \mathcal{V}(a)$ tq $\forall x \in V''$, $-\frac{1}{2} \leq \varepsilon(x) - 1 \leq \frac{1}{2}$
en particulier $\forall x \in V'' \cap I$, $\frac{1}{2} \leq \varepsilon(x)$

Donc $\forall x\ V \cap V' \cap V'' \cap I$, $f(x) = g(x)\varepsilon(x) \geq g(x) \times \frac{1}{2} > 0$.

**Corollaire:**

1) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \neq 0$ au voisinage de $a$ alors $f \neq 0$ au voisinage de $a$ et $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.

2) Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g > 0$ au voisinage de $a$ alors $f > 0$ au voisinage de $a$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$

**Preuve:**

1) $f$ et $g \neq 0$ au voisinage de $a$ donc on peut écrire :
$$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \lim_a \frac{f}{g} = 1 \Rightarrow \lim_a \frac{g}{f} = 1 \Rightarrow \lim \frac{1/f}{1/g} = 1 \Rightarrow \frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$$

2) $f$ et $g > 0$ au voisinage de $a$ donc :
$$f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow \lim_a \frac{f}{g} = 1 \Rightarrow \lim_a \frac{f^\alpha}{g^\alpha} = 1 \Rightarrow f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha.$$

■

## Erreurs fréquentes avec des équivalents : A connaître

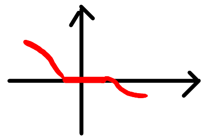
1) $\left.\begin{array}{l} f \underset{a}{\sim} g \\ h \underset{a}{\sim} i \end{array}\right\} \not\Rightarrow \quad f+h \underset{a}{\sim} g+i$

contrexemple : $x+1 \underset{0}{\sim} 1$ mais $x \underset{0}{\not\sim} 0$ faux

$-1 \underset{0}{\sim} -1$

Remarque : Si $f \underset{a}{\sim} 0$ alors sur un voisinage de $a$ :

$f(x) = 0 \times \varepsilon(x)$ donc $f$ est nulle sur un voisinage de $a$.



2) $f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow e^f \underset{a}{\sim} e^g$

contrexemple : $x \underset{+\infty}{\sim} x+1$ mais $e^x \underset{+\infty}{\not\sim} e^{x+1}$ car $\dfrac{e^x}{e^{x+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{e}$

3) $e^f \underset{a}{\sim} e^g \not\Rightarrow f \underset{a}{\sim} g$

contrexemple : $e^x \underset{0}{\sim} 1 \underset{0}{\sim} e^{2x}$ mais $x \underset{0}{\not\sim} 2x$ car $\dfrac{x}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$

4) $f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow \ln f \underset{a}{\sim} \ln g$

contrexemple : $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$ en $0$

5) De manière générale :

$u(f) \underset{a}{\sim} u(g) \not\Rightarrow f \underset{a}{\sim} g$

$f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow u(f) \underset{a}{\sim} u(g)$

# II) Fonctions dérivables :

Dans toute la suite, $I$ est un intervalle non trivial c-à-d non réduit à un singleton.

## 1) Définitions et premières propriétés :

**Déf :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ défini pour $x \in I \setminus \{x_0\}$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $x_0$.
Cette limite s'appelle la dérivée de $f$ en $x_0$. On la note $f'(x_0)$.

**Déf :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si $f$ est dérivable en tout point $x_0$ de $I$.
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur $I$.

**Déf :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
1) on dit que $f$ est dérivable à gauche en $x_0$ si la limite suivante existe et est finie :

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2) on dit que $f$ est dérivable à droite en $x_0$ si la limite suivante existe et est finie :

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Remarques :**
1) on a bien évidemment que

$f$ dérivable en $x_0$ $\Leftrightarrow$ $f$ dérivable à gauche et à droite en $x_0$
avec $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

2) Il peut être utile de se ramener à des limites en 0. Ainsi $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement si le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, défini pour tout $h \neq 0$ tq $x_0+h \in I$, admet une limite finie lorsque $h \to 0$. On a alors

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Il y a équivalence entre

1) $f$ est dérivable en $x_0$
2) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tq $f(x) = f(x_0) + \ell(x-x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x-x_0)$
3) Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tq $f(x_0+h) = f(x_0) + \ell h + \underset{h \to 0}{o}(h)$.

On a alors que $\ell = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

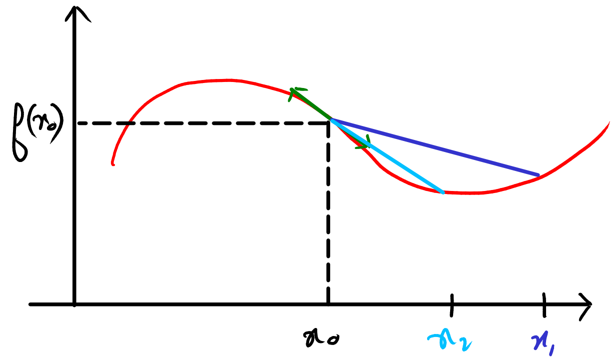
Preuve :

Exemples :

1) $\exp$ est dérivable en $0$ avec $\exp(0) = 1$ et $\exp'(0) = 1$ donc

2) $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en $0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ donc

Graphiquement, si $f$ est dérivable en $x_0$, $f'(x_0)$ est la pente de la droite tangente à la courbe représentative de $f$ au point $(x_0, f(x_0))$ :




Pente de la corde entre $x_0$ et $x_1$ : $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Pente de la corde entre $x_0$ et $x_2$ : $\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$

La tangente à la courbe représentative de $f$ au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation cartésienne : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

**Prop :** Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors $f$ est continue en $x_0$

**Preuve :** Si $f$ est dérivable en $x_0$ alors $f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. Donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Donc $f$ est continue en $x_0$.

⚠ La réciproque est fausse ! $f$ peut être continue en $x_0$ sans être dérivable en $x_0$. Par exemple $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0 !

Montrons que $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 :

## 2) Opérations sur les dérivées :

**Prop :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$. Alors :

1) $f+g$ est dérivable en $x_0$ et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $fg$ est dérivable en $x_0$ et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

3) Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en $x_0$ et $g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

4) Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en $x_0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$

**Preuve :** Pour $h \neq 0$ suffisamment petit pour que $x_0+h \in I$ on a :

1) $$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x_0) + g'(x_0)$$

Donc $f+g$ est dérivable en $x_0$ et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2) $$\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\, g(x_0+h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)g(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\, f(x_0)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} g'(x_0)f(x_0)}$$

car $g$ continue en $x_0$

Donc $fg$ est dérivable en $x_0$ et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

3) Si $g(x_0) \neq 0$. Comme $g$ est continue en $x_0$, il existe $\alpha > 0$ tq $\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ \cap I$ on a $g(x) \neq 0$. Pour $h$ tq $x_0+h \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ \cap I$ on a :

$$\frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h\, g(x_0)\, g(x_0+h)} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Donc $\frac{1}{g}$ est dérivable en $x_0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

4) est une conséquence de 2) et 3).

**Corollaire** : Soit $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors :

1) $f+g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(f+g)' = f' + g'$

2) $fg \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$

3) Si $g$ ne s'annule pas sur $I$ alors

* $\frac{1}{g} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

* $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

**Prop** (dérivée d'une fonction composée) :

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

On suppose que $f$ est dérivable en $x_0$ et que $g$ est dérivable en $f(x_0)$.

Alors $g \circ f$ est dérivable en $x_0$ et $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

**Preuve** :

* $f$ est dérivable en $x_0$ donc il existe une fonction $\varepsilon_f : I \to \mathbb{R}$ qui a $0$ pour limite en $x_0$ et telle que $\forall x \in I$, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x-x_0)\varepsilon_f(x)$.

* $g$ est dérivable en $f(x_0)$ donc il existe une fonction $\varepsilon_g : J \to \mathbb{R}$ qui a $0$ pour limite en $f(x_0)$ et telle que :

$$\forall y \in J, \quad g(y) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))\,(y - f(x_0)) + (y - f(x_0))\,\varepsilon_g(y).$$

On a alors pour $h \neq 0$ petit, en prenant $y = f(x_0+h)$

$$\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} = g'(f(x_0))\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)}\underbrace{\varepsilon_g(f(x_0+h))}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0 \text{ car } f \text{ est continue en } x_0}$$

Donc $g\circ f$ est dérivable en $x_0$ et $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$.

**Corollaire :** Soit $f \in \mathcal{D}(I,J)$ et $g \in \mathcal{D}(J,\mathbb{R})$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(g\circ f)' = g' \circ f \times f'$

**Exo :** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Montrer que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

**Solution :**

**Prop :** Soit $f : I \to J$ une bijection continue et strictement monotone. On suppose de plus que $f$ est dérivable sur $I$. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue et :

1) Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(x_0)$. Alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et dans ce cas on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

2) Si $f'$ ne s'annule pas sur $I$ alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

**Preuve :** On admet que $f^{-1}$ est continue.

Soit $y_0$ et $y$ deux points distincts de $J$. On pose $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(x_0)$. Comme $f^{-1}$ est bijective on a $x \neq x_0$. De plus :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Lorsque $y \to y_0$ on a $x \to x_0$ car $f^{-1}$ est continue et si $f'(x_0) \neq 0$ le taux d'accroissement ci-dessus tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$. ■

## 2) Extremum local et dérivée :

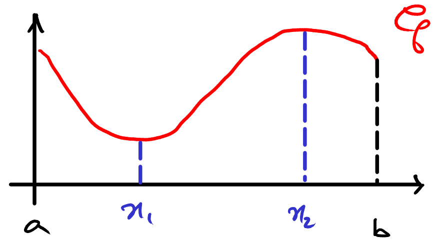
**Déf :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1) On dit que $f$ a un maximum local en $x_0$ s'il existe $\alpha > 0$ tq
$\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ \cap I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

2) On dit que $f$ a un minimum local en $x_0$ s'il existe $\alpha > 0$ tq
$\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ \cap I$, $f(x_0) \leq f(x)$.

Dans les deux cas on dit que $f$ a un extremum local en $x_0$.

**Exemples:** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$




* $a$ et $x_2$ sont des maximums locaux
* $x_1$ et $b$ sont des minimums locaux

**Déf :** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et $x_0 \in I$.
On dit que $x_0$ est un point intérieur de $I$ s'il existe $\alpha > 0$ tq $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ \subset I$.
On note $\mathring{I}$ l'ensemble des points intérieurs de $I$.

**Exemples :**

1) $I = [0,1]$ alors $\mathring{I} = ]0,1[$
2) $I = [0,1[$ alors $\mathring{I} = ]0,1[$
3) $I = ]0,1[$ alors $\mathring{I} = I = ]0,1[$.
4) $I = [2,+\infty[$ alors $\mathring{I} = ]2,+\infty[$

**Remarque :** $I$ est un intervalle ouvert $\Leftrightarrow$ $I = \mathring{I}$.

**Théorème :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.
On suppose :
1) $x_0 \in \mathring{I}$
2) $f$ est dérivable en $x_0$
3) $f$ admet un extremum local en $x_0$

Alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve :

Pour fixer les idées, supposons que l'extremum local en $x_0$ est un maximum local. Comme $x_0 \in \mathring{I}$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[ \quad f(x) \leq f(x_0).$$

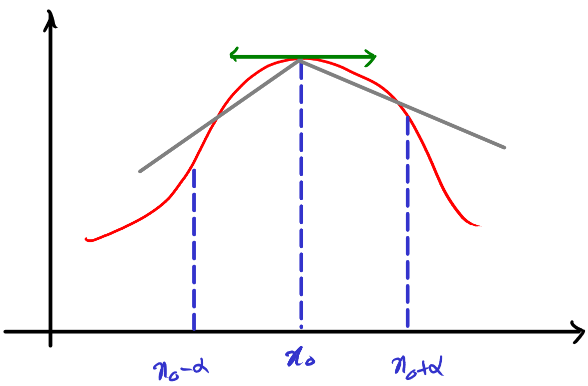
On a alors :

$$\forall x \in ]x_0, x_0+\alpha[, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ donc } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ donc } f'(x_0) \leq 0.$$

$$\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0[, \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ donc } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ donc } f'(x_0) \geq 0.$$

Donc $f'(x_0) = 0$.

Graphiquement :




Remarques :

1) Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable peut avoir un extremum local au bord de l'intervalle $I$ sans que $f'$ ne s'annule en ce point. L'hypothèse $x_0 \in \mathring{I}$ est importante !

2) Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ peut avoir un extremum local en $x_0 \in \mathring{I}$ sans être dérivable en $x_0$. C'est le cas de $x \mapsto |x|$ en $0$.

3) La réciproque est fausse : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in \mathring{I}$ avec $f'(x_0) = 0$, $x_0$ n'est pas forcément un extremum local de $f$. Par exemple $f : x \mapsto x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $0$ n'est pas un extremum local de $f$.

## 3) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis :

**Théorème de Rolle :**

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

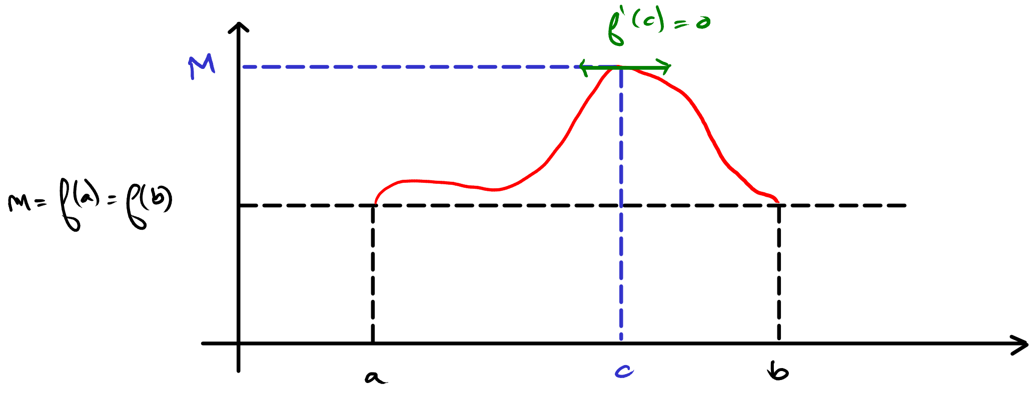
Si $f(a) = f(b)$ alors $f'$ s'annule sur $]a,b[$ :

$$\exists c \in ]a,b[ = 0, \quad f'(c) = 0.$$

**Preuve :**

Comme $f$ est continue sur le segment $[a,b]$ elle est bornée et atteint ses bornes : il existe $m$ et $M \in \mathbb{R}$ tq $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ et tels que les valeurs $m$ et $M$ sont atteintes par $f$ sur $[a,b]$.

* Si $m = M$ alors $f$ est constante sur $[a,b]$ et $f'$ est nulle sur $]a,b[$.
* Si $m < M$ alors soit $m \neq f(a)$ (et donc $m \neq f(b)$) soit $M \neq f(a)$ (et donc $M \neq f(b)$).
  L'une au moins des deux bornes $m$ et $M$ est donc atteinte en un point $c$ intérieur de $[a,b]$. On a donc $c \in ]a,b[$ et $f'(c) = 0$ puisque $c$ est un extremum local. ∎




**Exercice :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f$ s'annule $n$ fois sur $[a,b]$. Montrer que $f'$ s'annule $n-1$ fois sur $[a,b]$.

## Théorème des accroissements finis : (TAF)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in ]a,b[$ tq $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

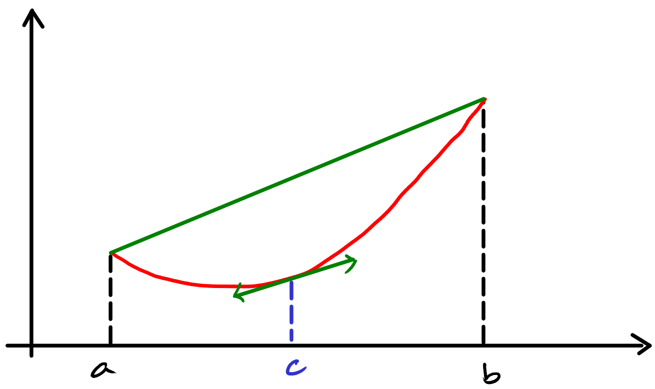
**Preuve :**

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x$.
Alors $g$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et :

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, a = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}.$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, b = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a} = g(a).$$

Donc par le théorème de Rolle, $\exists c \in ]a,b[$ tq $g'(c) = 0$ c-a-d $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■




**Corollaire :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Alors pour tous $a, b \in I$ avec $a \neq b$ (on ne suppose pas $a < b$), il existe $c$ dans l'intervalle $]\min(a,b), \max(a,b)[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**Preuve :**

Si $a < b$ on aplique le TAF à $f|[a,b]$.
Si $b < a$ on aplique le TAF à $f|[b,a]$ et on remarque que $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**Corollaire** (inégalité des accroissements finis) :

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1) Si $\forall x \in ]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$ alors pour tous $x,y \in [a,b]$ avec $x \leq y$
$$m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x)$$

2) Si $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in ]a,b[$, $|f'(x)| \leq k$ ($f'$ est bornée sur $]a,b[$) alors $f$ est $k$-lipschitzienne sur $[a,b]$ c-a-d :
$$\forall x,y \in [a,b], \ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Preuve :

1) Si $x=y$ c'est évident. Si $x<y$ alors par le corollaire du TAF, il existe $c \in ]x,y[$ tel que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$ donc $m \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq M$.

2) On applique 1) avec $m = -k$ et $M = +k$.

## 4) Sens de variation et signe de la dérivée :

**Théorème :** Soit $\boxed{I \text{ un intervalle}}$ non trivial et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors

1) $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si $f'$ est positive sur $I$.
2) $f$ est décroissante sur $I$ si et seulement si $f'$ est négative sur $I$.
3) $f$ est constante sur $I$ si et seulement si $f'$ est nulle sur $I$.

Preuve :
On démontre 1). Les preuves de 2) et 3) sont similaires.
Si $f$ est croissante sur $I$ alors pour tous $x,y \in I$ tq $x \neq y$ on a $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. D'où en passant à la limite $y \to x$ que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
Réciproquement si $f'$ est positive sur $I$ alors d'après le TAF, pour tous $x,y \in I$ tq $x<y$ il existe $c \in ]x,y[$ tq $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$. Comme $f'(c) \geq 0$ on a $f(x) \leq f(y)$.
Donc $f$ est croissante sur $I$.

Remarques :

1) L'hypothèse $I$ est un intervalle est très importante !

La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est négative.

Mais $f$ n'est pas décroissante.

2) Si $f'$ est strictement positive (resp. strictement négative) sur $I$ alors $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante) mais la réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée est nulle en $0$.

## 5) Théorème de la limite de la dérivée :

Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$.

On suppose que :

1) $f$ est continue en $a$

2) $f$ est dérivable sur $I \cap ]-\infty, a[$ et sur $I \cap ]a, +\infty[$

3) $f'$ admet des limites finies à droite et à gauche en $a$ qui sont égales :

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tq } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f'(x) = \ell$$

Alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \ell$.

Preuve :

* Pour tout $x \in I$ avec $x < a$, par le TAF, $\exists c_x \in ]x, a[$ tq $\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(c_x)$.

Quand $x \to a$ on a $c_x \to a$ (puisque $c_x \in ]x, a[$) et par l'hypothèse 2) $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

* Pour tout $x \in I$ avec $x > a$, par le TAF, $\exists c_x \in ]a, x[$ tq $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$.

De même par l'hypothèse 2) on obtient que $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$.

Donc $f$ est dérivable en $a$ avec $f'(a) = \ell$.

# III) Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

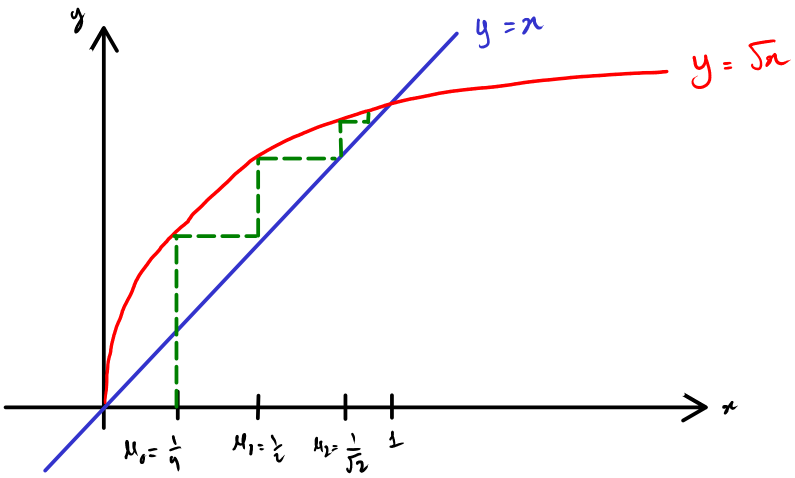
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On souhaite étudier les suites du type :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

## 1) Un premier exemple :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

On commence par étudier les variations de la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$ et tracer sa courbe représentative ainsi que celle de la droite $y = x$. On peut ainsi observer graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.




Sur cet exemple on observe que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ semble

1) prendre ses valeurs dans l'intervalle $[0,1]$.

Ceci est dû au fait que $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. On dit que l'intervalle $[0,1]$ est stable par $f$. Comme $u_0 \in [0,1]$ on a $u_1 = f(u_0) \in [0,1]$, puis $u_2 = f(u_1) \in [0,1]$ et on montre par récurrence que $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) être croissante.

C'est parce que $\forall x \in [0,1], f(x) \geq x$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$. Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

3) converger vers 1.

En effet, $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente et sa limite $\ell$ est dans $[0,1]$ (puisque $u_n \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$).

Comme $f$ est continue, si $u_n \to \ell$ alors $f(u_n) \to f(\ell)$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc on a aussi $f(u_n) \to \ell$. En conséquence de quoi $f(\ell) = \ell$ c'est à dire que $\ell$ est un point fixe de $f$. Il y a deux points fixes de $f$ dans l'intervalle $[0,1]$ : $x=0$ et $x=1$. Mais comme $u_0 = \frac{1}{4} > 0$ et que $(u_n)$ est croissante, elle ne peut converger vers 0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

On peut généraliser cette étude à de nombreux exemples. C'est l'objet de cette section.

## 2) Intervalles stables et conséquences :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On souhaite étudier les suites du type :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Déf :** On dit que $I$ est stable par $f$ si pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$, ce qui s'écrit $f(I) \subset I$.

1) Si $I$ est stable par $f$ et si $a \in I$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n$ existe alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
On a même que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$. Démontrons le par récurrence:

Comme on peut le voir sur l'exemple suivant, lorsque $a \in I$ avec $I$ qui n'est pas stable par $f$, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ peut ne plus être définie à partir d'un certain rang :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}, & n \geq 0 \end{cases}$$

On calcule $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ mais $u_3$ n'est pas défini.
En effet ici $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x-1}$ et l'intervalle $[1, +\infty[$ n'est pas stable par $f$ puisque $1 \in [1, +\infty[$ mais $f(1) = 0 \notin [1, +\infty[$.

2) On peut déduire de la stabilité de $I$ par $f$ des propriétés de minoration, majoration sur la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

En effet si le segment $[a,b]$ est stable par $f$ et si $u_0 \in [a,b]$ alors $u_n \in [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ c-à-d $a \leq u_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
En particulier, si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $l$ alors $l \in [a,b]$.

## 3) Continuité de $f$ et convergence

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On considère la suite

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prop : On suppose que $f$ est continue sur $I$ et que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie.
Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $l \in I$ alors $l$ est un point fixe de $f$ : $f(l) = l$.

Preuve :

* Comme $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ on a $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$.
* Par caractérisation séquentielle de la continuité de $f$ en $l$ on a $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.
* Par unicité de la limite on obtient $f(l) = l$.

**Exemple :** $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

**Remarque :** Si $u_0$ est un point fixe de $f$ alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est constante égale à $u_0$ puisque $u_1 = f(u_0) = u_0$, $u_2 = f(u_1) = f(u_0) = u_0$, etc...

**Théorème :** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
On suppose que $[a,b]$ est stable par $f$.
Alors $f$ admet un point fixe dans $[a,b]$ :

$$\exists \ell \in [a,b] \text{ tq } f(\ell) = \ell.$$

**Preuve :**

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$.
La fonction $g$ est continue car $f$ et $x \mapsto x$ sont continues.
Comme $[a,b]$ est stable par $f$ on a $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in [a,b]$.
En particulier, $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$ donc $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.
Par le TVI, il existe $\ell \in [a,b]$ tel que $g(\ell) = 0$ c-a-d $f(\ell) = \ell$. ∎

## 4) Etude des variations de $(u_n)_{n\geq 0}$.

**Prop :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I$ stable par $f$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) Si $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

2) Si $f(x) - x \leq 0$ pour tout $x \in I$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

**Preuve :**

Comme $I$ est stable par $f$ on a $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Supposons $f(x) - x \geq 0$ pour tout $x \in I$. On en déduit que

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$ pour tout $n \in I$. Donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

2) Preuve similaire. $\blacksquare$

**Remarques :**

1) On ne peut déduire la monotonie de $(u_n)$ que si le signe de $f(x) - x$ est constant sur l'intervalle stable $I$.

2) Il peut être utile d'étudier le signe de $f(x) - x$ pour en déduire :

- le sens de monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$
- les points fixes de $f$ qui sont les $x$ où $f(x) - x$ s'annule.

**Prop :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I$ stable par $f$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Si $f$ est croissante sur $I$ alors $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone et le sens de monotonie est déterminé par le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$.

Preuve :

* Supposons $f(u_0) - u_0 \geq 0$ c-a-d $u_1 \geq u_0$.
Montrons par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété est initialisée. Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $u_{n+1} \geq u_n$. Comme $I$ est stable par $f$ on a $u_{n+1} \in I$ et $u_n \in I$. Comme $f$ est croissante sur $I$ on obtient $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ c-à-d $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. La propriété est héréditaire. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c-a-d que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

* Supposons $f(u_0) - u_0 \leq 0$ c-a-d $u_1 \leq u_0$.
Montrons par récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La propriété est initialisée. Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $u_{n+1} \leq u_n$. Comme $I$ est stable par $f$ on a $u_{n+1} \in I$ et $u_n \in I$. Comme $f$ est croissante sur $I$ on obtient $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ c-à-d $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. La propriété est héréditaire. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c-a-d que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Exemple : $\begin{cases} u_0 \in [0, +\infty[ \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

**Prop :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $I$ stable par $f$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Si $f$ est décroissante sur $I$ alors $f \circ f$ est croissante sur $I$.

Les suites $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont alors monotones de sens contraires.

Ce sens est défini par le signe de $u_2 - u_0 = f\circ f(u_0) - u_0$.

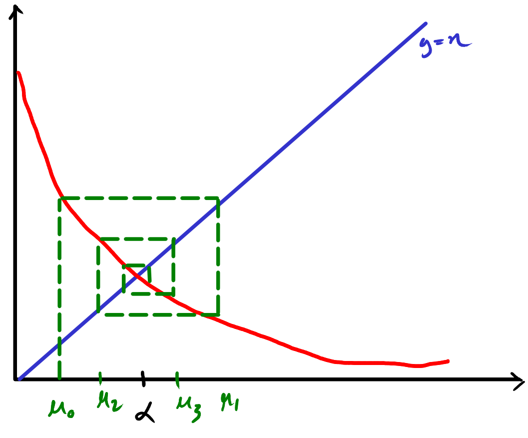
On peut ainsi étudier la convergence (ou non) des suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$. On étudie la convergence de la suite $(u_n)$ en invoquant le résultat suivant :

**Théorème :** La suite $(u_n)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ tendent toutes les deux vers $\ell$.

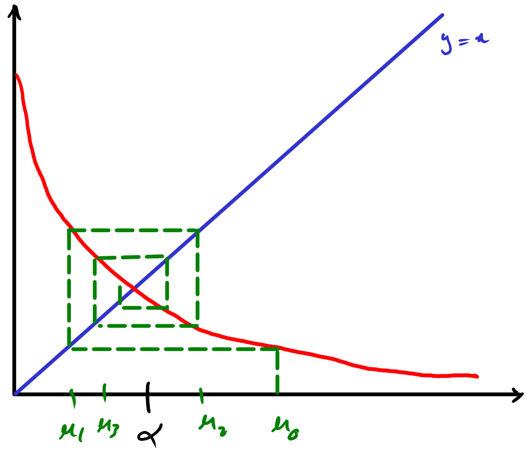
**Exemple :** Soit $f : [0,+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 \in [0,+\infty[ \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0 \end{cases}$

Graphiquement :

Si $u_0 \in ]0,\alpha]$




Si $u_0 \in [\alpha\ +\infty[$



## 5) Inégalité des accroissements finis et vitesse de convergence.

Reprenons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

On en déduit par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} |u_1 - 1| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

**Prop :** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset I$.

On suppose que :

1) $\exists \ell \in I$ tq $f(\ell) = \ell$

2) $f$ est dérivable sur $I$ et il existe $k \in ]0,1[$ tq

$$\forall x \in I, \ |f'(x)| \leqslant k$$

Alors la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

converge vers $\ell$ et $|u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

**Remarque :**

En adaptant la démonstration de l'inégalité des accroissements finis on peut aussi obtenir des vitesses de divergence vers $+\infty$.

Par exemple pour $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 > 1 \\ u_{n+1} = u_n^2, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

par récurrence on obtient que $\forall n \geqslant 1 \quad u_n - 1 \geqslant 2^n (u_0 - 1)$