

Chapitre IV : Fonctions convexes

Dans tout le chapitre $\mathcal{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.

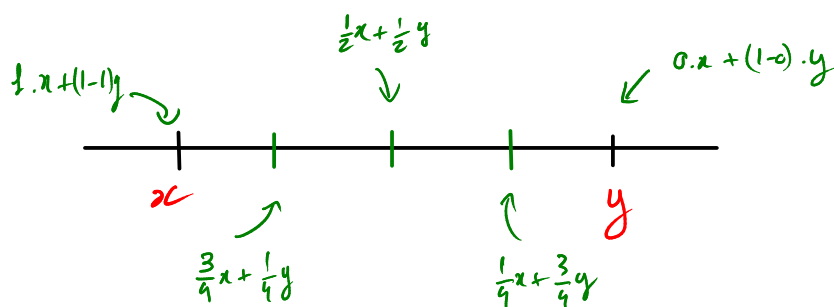
I) Définitions et propriétés :

1) Définitions :

Remarque préliminaire :

Soit x et y deux réels et $t \in [0,1]$.

Le nombre $tx + (1-t)y$ est compris entre x et y .



Réciproquement, supposons $x < y$ et soit z compris entre x et y alors il existe un unique réel $t \in [0,1]$ tel que $z = tx + (1-t)y$:

$$z = tx + (1-t)y = t(x-y) + y \quad \text{avec } t = \frac{z-y}{x-y} \in [0,1].$$

Donc lorsque t varie dans $[0,1]$, $tx + (1-t)y$ prend une et seule fois toutes les valeurs comprises entre x et y .

Si $a < b$ on a $[a,b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$.

Def. Soit $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe sur $\mathcal{I}$ si

$$\forall (x,y) \in \mathcal{I}^2, \forall t \in [0,1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Interprétation graphique :

Soit $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ deux points sur la courbe représentative de f et soit $t \in [0, 1]$.

Soit G le barycentre du système $\{(A, t), (B, 1-t)\}$.

On a $\vec{OG} = t\vec{OA} + (1-t)\vec{OB}$ donc les coordonnées du point G sont :

$$x_G = tx + (1-t)y \quad \text{et} \quad y_G = tf(x) + (1-t)f(y)$$

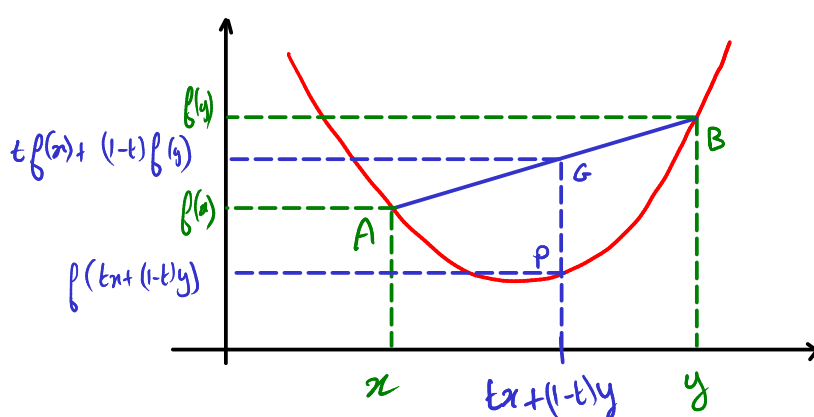
Soit P le point de la courbe représentative de f d'abscisse $tx + (1-t)y$.

La convexité de f exprime que le point G est situé au dessus du point P .

Autrement dit la courbe représentative de f est toujours située en dessous de ses cordes.

Vocabulaire : Soit $A = (x, f(x))$ et $B = (y, f(y))$ deux points de la courbe représentative d'une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle "corde" reliant A et B le segment $[AB]$.

Fonction convexe :

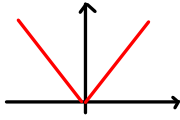


Def : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I . On a f concave sur I si et seulement si :

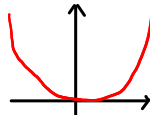
$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Exemples de fonctions convexes:

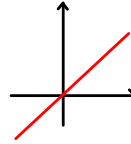
$$x \mapsto |x|$$



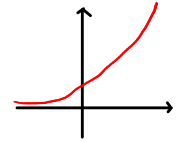
$$x \mapsto x^2$$



$$x \mapsto x$$

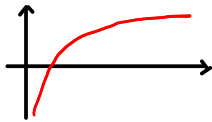


$$x \mapsto e^x$$

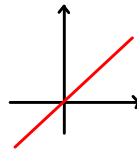


Exemples de fonctions concaves:

$$x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0, +\infty[$$



$$x \mapsto -x$$



Remarque: Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves

2) Caractérisation par les pentes des cordes.

Théorème (croissance des pentes des cordes fixées à une extrémité)

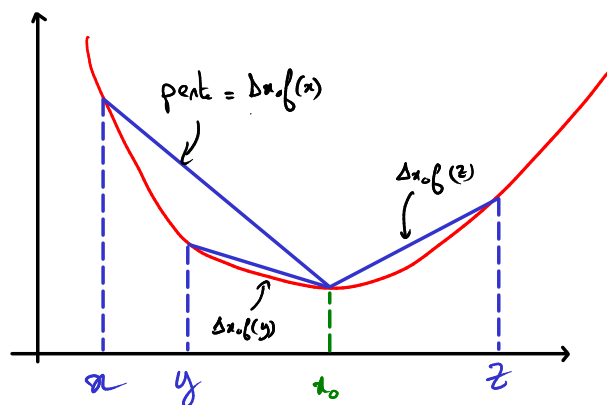
Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x_0 \in I$

la fonction $\Delta_{x_0} f: I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante

Graphiquement:



Si on a $x \leq y \leq z$ donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \leq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}$$

Preuve :

② Supposons f convexe sur I . Soit $x_0 \in I$ et soit $x, y \in I$ avec $x < y$ et $x \neq x_0, y \neq x_0$.

Il faut traiter tous les cas selon l'ordre de x, y et x_0 .

Faisons le dans le cas $x < y < x_0$. Les autres cas sont similaires.

Comme $y \in [x, x_0]$, il existe $t \in [0, 1]$ tq $y = tx + (1-t)x_0$.

Ce t est donné par $t = \frac{y - x_0}{x - x_0}$.

Comme f est convexe on a $f(y) \leq t f(x) + (1-t) f(x_0)$.

$$\text{Donc } f(y) - f(x_0) \leq t (f(x) - f(x_0)) = \frac{y - x_0}{x - x_0} (f(x) - f(x_0))$$

En divisant par $y - x_0$ qui est négatif on obtient

$$\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On obtient la même inégalité dans les cas $x < x_0 < y$ et $x_0 < x < y$. La fonction $\Delta_x f$ est donc bien croissante.

③ Supposons $\Delta_x f$ croissante pour tout $x_0 \in I$ et montrons que f est donc convexe. Soit $x, y \in I$ avec $x < y$ et soit $t \in [0, 1]$.

Notons $z = tx + (1-t)y$. Alors on a $x < z < y$ et $t = \frac{z - y}{x - y}$.

Comme $\Delta_x f$ est croissante on a : $\Delta_x f(z) \leq \Delta_x f(y)$ c-a-d :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

$$\text{Donc } f(z) \leq \frac{z - x}{y - x} (f(y) - f(x)) + f(x) = \frac{x - z}{x - y} (f(y) - f(x)) + f(x)$$

$$\text{Or } \frac{x - z}{x - y} = 1 - \frac{z - y}{x - y} = 1 - t. \text{ Donc } f(z) \leq (1-t) (f(y) - f(x)) + f(x)$$

$$\text{c-a-d } f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y).$$

Cette égalité est toujours vraie si $x=y$ et si $t \in [0, 1]$. Donc f est convexe. ▀

Théorème (Inégalité des trois pentes)

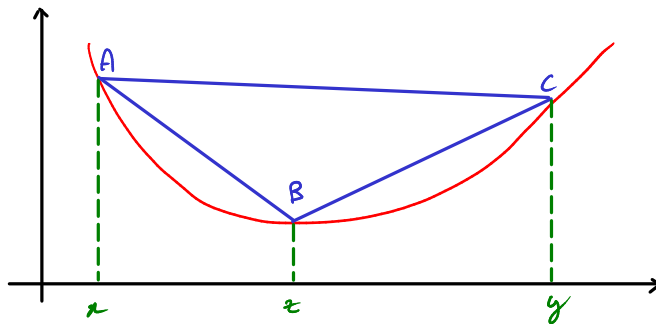
Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur I .

Soit $x, y, z \in I$ tels que $x < z < y$. Alors

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Graphiquement :

Le théorème exprime des inégalités entre les pentes des cordes $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ où $A = (x, f(x))$, $B = (z, f(z))$ et $C = (y, f(y))$.



Preuve :

Comme f est convexe, la croissance de $\Delta_x f$ donne l'inégalité de gauche.
La croissance de $\Delta_y f$ donne l'inégalité de droite.

Théorème : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Si f est convexe sur I alors f est continue sur $\overset{\circ}{I}$ (intérieur de I).

Preuve :

II) Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I .

Corollaire :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .

Alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I .

Preuve du théorème :

Remarques:

- 1) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors f est concave $\Leftrightarrow f'$ est décroissante
- 2) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors f est concave $\Leftrightarrow f''$ est négative

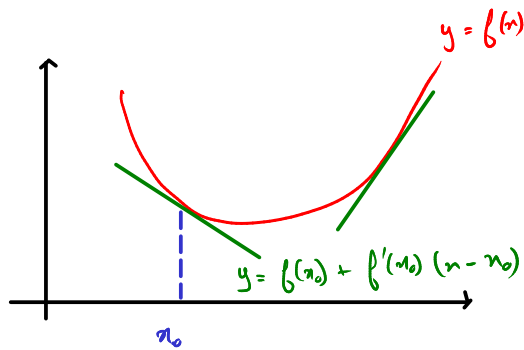
Exemples:

- 1) $f: x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 2 \geq 0$.
- 2) $f: x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$ car $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$
- 3) $f: x \mapsto \sin(x)$ est concave sur $[0, \pi]$ car $\forall x \in [0, \pi], f''(x) = -\sin(x) \leq 0$.

Prop:

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe sur I .

Alors la courbe représentative de f est au dessus de chacune de ses tangentes



Preuve: ❤️

III) Quelques applications :

Théorème : Soit $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soit n un entier tq $n \geq 2$.

Abs pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{I}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs qui vérifient $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Preuve :

Applications :

1) L'inégalité arithmético - géométrique :

$$\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+, (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Preuve : convexité de $x \mapsto -\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

2) Inégalité arithmético - harmonique :

$$\forall n \geq 2, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+, \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Preuve : convexité de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.