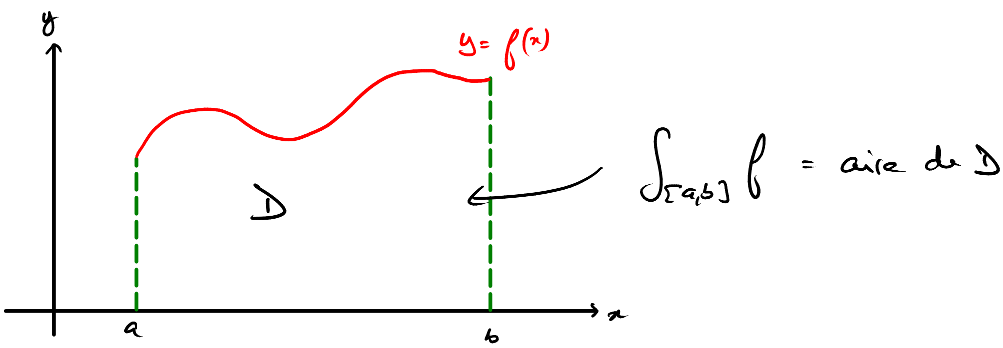
Chapitre I : Calculs de primitives

0) Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

1) Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment :

Déf : Soit $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.
On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on note $\int_{[a,b]} f$ l'aire du domaine $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \}$.

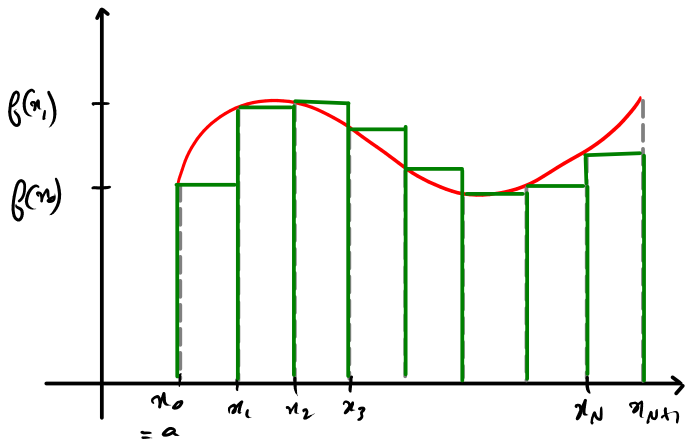


Remarques :

1) Si $f(x) = c$, $\forall x \in [a,b]$ alors l'aire du domaine D est l'aire du rectangle $[a,b] \times [0,c]$ donc $\int_{[a,b]} f = (b-a) \times c$.

2) Mais pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue positive quelconque il n'y a pas de manière générale pour définir l'aire sous la courbe représentative de f.

Une manière d'approcher la valeur de cette aire est de décomposer le segment $[a,b]$ en "beaucoup" de petits segments $[x_i, x_{i+1}]$ et à approcher l'aire sous la courbe de f par la somme des aires des rectangles $[x_i, x_{i+1}] \times [0, f(x_i)]$:



On définit alors $\int_{[a,b]} f = \lim_{N \to +\infty} \sum_{i=0}^{N} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$.

3) Pour $a = b$ on a $\int_{[a,b]} f = 0$.

2) Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Déf : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et négative
on définit $\int_{[a,b]} f$ comme
étant l'aire l'opposée de l'aire du domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq -f(x)\}.$$

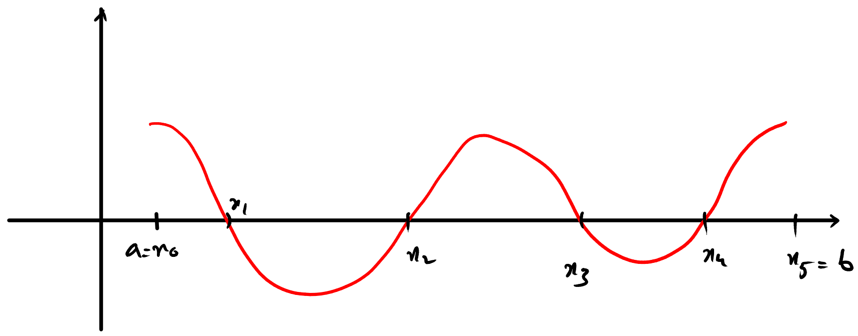
Déf. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Alors il existe des réels $x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1}$ en nombre finis tels que :

* $x_0 = a$ et $x_{N+1} = b$
* f est de signe constant sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$.

On définit alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{N} \int_{[x_i, x_{i+1}]} f$.



3) Propriétés de l'intégrale :

Théorème : L'intégrale a les propriétés suivantes

1) **Linéarité :** $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_{[a,b]} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{[a,b]} f + \beta \int_{[a,b]} g$$

2) **Positivité :** $\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$

$$f \geq 0 \text{ sur } [a,b] \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$$

3) **Relation de Chasles :** si $c \in]a,b[$ alors $\forall f \in \mathcal{C}^0[a,b]$

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

Preuve : admise (cf Analyse 3)

Proposition : (croissance de l'intégrale)

$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$

$$f \geq g \text{ sur } [a,b] \Rightarrow \int_{[a,b]} f \geq \int_{[a,b]} g$$

Preuve :

Prop : (Inégalité triangulaire)

$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$$

Preuve :

Prop (Inégalité de la moyenne)

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leqslant \max_{x \in [a,b]} |f| \times \int_{[a,b]} |g|$$

Preuve :

Remarques :

1) Pour g constante égale à 1 on obtient que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}), \quad \left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant (b-a) \max_{[a,b]} |f|$$

2) Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, la quantité $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$ est appelée la moyenne de f sur $[a,b]$.

4) Notation usuelle de l'intégrale :

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

Soit $a, b \in I$ (on ne suppose pas que $a \leq b$).

On définit le réel $\int_a^b f(x)dx$ par :

- si $a<b$ alors $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f$
- si $a=b$ alors $\int_a^b f(x)dx = 0$
- si $a>b$ alors $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b,a]} f$

Remarques :

1) Dans $\int_a^b f(x)dx$, x est appelé la variable d'intégration. C'est une variable muette. On a donc $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

2) Lorsque $a>b$ il faut faire attention aux propriétés qui impliquent des comparaisons. Les propriétés de positivité, de croissance et l'inégalité triangulaire deviennent, lorsque $a>b$:

Positivité : $f\geq 0 \Rightarrow \int_{[b,a]} f \geq 0$ c-à-d $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$.

Croissance : $f\geq g \Rightarrow \int_{[b,a]} f \geq \int_{[b,a]} g$ c-à-d $f\geq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_b^a |f(x)|dx$

3) La relation de Chasles devient :

$\forall a,b,c \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) Théorème fondamental de l'analyse :

Déf : Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On appelle primitive de f sur D toute fonction $F : D \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.

Remarques :

Pour une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ continue donnée il n'y a pas unicité de la primitive sur D.

En effet, si $F : D \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur D et si D est un intervalle alors primitives de f sur D sont toutes les fonctions de la forme :

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) + c \end{array}$$

où c est une constante réelle.
En effet, si G est une autre primitive de f sur l'intervalle D alors
$\forall x \in D$, $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Comme D est un intervalle $G-F$ est constante sur D c-a-d qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in D$, $G(x) = F(x) + D$.

Si D est une réunion d'intervalles alors il y a une constante pour chaque sous-intervalle de D.

Exemple : La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour primitives les fonctions

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \ln|x| + c_1 & \text{si } x < 0 \\ \ln|x| + c_2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles qui peuvent être différentes.

Théorème fondamental de l'analyse réelle :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $a \in I$. Alors :

1) La fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in I$ par
$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

2) Pour toute primitive F de f sur I on a :
$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad \forall x \in I.$$

Preuve : cf. Analyse 3

I) Primitive des fonctions continues :

1) Notation :

Soit $D \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : D \to \mathbb{R}$ continue.
On notera $\int f(x)dx$ la forme générale des primitives de f.
Si on connaît l'une de ces primitives F alors :
$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Par exemple : $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C, \; C \in \mathbb{R}.$

⚠ Ne pas confondre $\int f(x)dx$ (expression d'une fonction) avec $\int_a^b f(x)dx$ qui est une intégrale, donc un réel.

Question : Pour une fonction f donnée, comment déterminer l'expression d'une primitive F (et donc de toutes ses primitives $F+C$) ?

2) Primitives usuelles :

Commençons par recensser toutes les primitives obtenues en "inversant" un tableau de dérivées :

Intervalle	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\mathbb{R}_+^*$	x^n $(n \in \mathbb{R}, n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	$e^{\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$
$\mathbb{R}$	a^x $(a>0$ et $a \neq 1)$	$\dfrac{1}{\ln a} a^x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos(\omega x)$ $(\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega} \sin(\omega x) + C$
$\mathbb{R}$	$\sin(\omega x)$ $(\omega \neq 0)$	$-\dfrac{1}{\omega} \cos(\omega x) + C$
$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ mod (π)	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ mod (π)	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$]0,\pi[$ mod (π)	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{1}{\tan x} + C$

Intervalle	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
$]-1,1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$]-1,1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$ $= -\arcsin(x) + c$
$\mathbb{R}$	$ch(\omega x) \quad (\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega} sh(\omega x) + c$
$\mathbb{R}$	$sh(\omega x) \quad (\omega \neq 0)$	$\dfrac{1}{\omega} ch(\omega x) + c$
$\mathbb{R}$	$th(x)$	$\ln(ch\, x) + c$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$	$th(x) + c$
$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{sh^2 x}$	$-\dfrac{1}{th(x)} + c$
$]-1,1[$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$argth(x) + c$ $= \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + c$
$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$argsh(x) + c$ $= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$
$]1,+\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$argch(x) + c$ $= \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c$

<u>Remarque :</u> pour certaines fonctions on peut étendre l'intervalle.

* Si $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

* Si $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \\ n \neq -1 \end{cases}$ $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c_1 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} + c_2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

* La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est continue sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

Comme $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$ on a :

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

et la constante c dépend de l'intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$.

III) Techniques d'intégration pour le calcul de primitives

Certaines techniques de manipulation des intégrales permettent de simplifier les calculs de primitives. Ces techniques sont

1) La reconnaissance de formes usuelles de dérivées
2) L'intégration par partie (IPP)
3) Le changement de variable (CDV)

1) Reconnaître une forme usuelle de dérivée :

Exemples : Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

1) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$.

2) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx$

3) $\int_0^1 x e^{1+x^2} dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(x)\sin^2(x)\,dx$

2) L'intégration par parties (IPP) :

Proposition (IPP) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (ie u et v sont dérivables sur I et u' et v' sont continues sur I).

Alors :

* $\displaystyle\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$

* Pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Preuve :

On a $(uv)' = u'v + uv'$ donc $u'v = (uv)' - uv'$. Comme u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$, les fonctions $u'v$, $(uv)'$ et uv' sont continues sur I et admettent des primitives.

Par intégration de l'égalité $u'v = (uv)' - uv'$, en remarquant qu'une primitive de $(uv)'$ est uv on obtient le résultat. ∎

<u>Exemples:</u> Calculer les intégrales ou les primitives suivantes:

1) $\int \ln(x)\,dx$

2) $\int \arctan(x)\,dx$

3) $\int x^2 e^x \, dx$

4) $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x) \, dx$

On peut calculer de cette façon toutes les primitives de la forme $\int P(x)e^{\alpha x}$; $\int P(x)\sin(\alpha x)\,dx$; $\int P(x)\cos(\alpha x)\,dx$

où P est un polynôme.

5) Calcul de $I_n(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On remarque que $I_0(x) = \int dx = x + C$

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

donc $\boxed{I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + I_n(x)\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}$

Grâce à cette formule, on peut calculer par récurrence $I_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple :

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C.$$

2) Changement de variables (CDV) :

Prop (changement de variable) :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$\varphi : [a,b] \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I. La fonction $f \circ \varphi \times \varphi'$ est la dérivée de $F \circ \varphi$ et elle est continue sur $[a,b]$ car $f \circ \varphi$ et φ' le sont.

Donc :
$$\int_a^b f\circ\varphi(x)\varphi'(x)\,dx = F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a).$$

Or
$$F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du. \quad \blacksquare$$

Inutile d'apprendre cette formule par cœur !

Dans la pratique :

* On pose $u = \varphi(x)$ et $du = \varphi'(x)\,dx$
* Dans $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ on remplace $\varphi(x)$ par u et $\varphi'(x)\,dx$ par du.
* On modifie les bornes ! $u = \varphi(x)$ donc :
  $x = a \Rightarrow u = \varphi(a)$ et $x = b \Rightarrow u = \varphi(b)$.

Exemples :

1) Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

On a $I = \int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,dx$.

On pose $u = e^x$ donc $du = e^x\,dx$

Remarque : la fonction $\varphi : x \mapsto e^x$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc $I = \int_1^e \frac{2}{u^2+1}\,du = \left[2\arctan u\right]_1^e = 2\arctan(e) - \frac{\pi}{2}$.

Le choix du changement de variable est souvent guidé par l'intuition et l'objectif de se ramener à l'intégrale d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle...

2) Calculer $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

3) Calculer $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

4) Changement de variable affine :

u est une fonction affine de x (et réciproquement)

* utile pour ramener une intégrale sur $[a,b]$ à une intégrale sur $[0,1]$ ou sur $[-1,1]$.

$\int_a^b f(x)\,dx$: On pose $x = a + u(b-a)$ donc $dx = (b-a)\,du$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f\big(a+u(b-a)\big)\,du.$$

Si on pose $x = \frac{a+b}{2} + u\,\frac{b-a}{2}$, $dx = \frac{b-a}{2}\,du$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f\Big(\frac{a+b}{2} + u\,\frac{b-a}{2}\Big)\,du$$

5) Cas des fonctions T-périodiques :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique alors :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

6) Si f est une fonction paire alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

En effet : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Avec $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \underset{u=-x}{=} \int_{a}^{0} f(-u)\,(-du) \underset{f \text{ paire}}{=} -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Si f est une fonction impaire alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

7) Calcul de $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$ avec $a > 0.$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ avec $a>0$.

Très souvent, le changement de variable consiste à poser $u=\varphi(x)$.
Mais parfois, on a envie de poser $x=\varphi(u)$ pour calculer $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_?^? f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

On ne sait exprimer les nouvelles bornes que si φ est bijective !

<u>Prop</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue
$\varphi : I \to [a,b]$ bijective.

Alors :
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$$

Exemple:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

On a envie de poser $x = \sin(u)$ par exploiter le fait que $\cos^2(u) + \sin^2(u) = 1$ donc $1 - \sin^2(u) = \cos^2(u)$.

La fonction $\sin : [0, \pi/2] \to [0,1]$ est bijective et sa bijection réciproque est $\arcsin : [0,1] \to [0, \pi/2]$.

III) Primitives des fractions rationnelles.

On veut calculer $\int F(x)\,dx$ ou $\int_a^b F(x)\,dx$ où $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle (fonction rationnelle). On commence par décomposer la fraction rationnelle en <u>éléments simples</u>. Par linéarité de l'intégrale on est donc amenés à calculer les primitives (ou les intégrales) de divers termes :

* $\displaystyle\int a x^n\,dx = \frac{a}{n+1}\,x^{n+1} + C$ avec $n \in \mathbb{N}$

* $\displaystyle\int \frac{a}{x-\alpha}\,dx = a \ln|x-\alpha| + C$

* $\displaystyle\int \frac{a}{(x-\alpha)^n}\,dx = \frac{a}{-n+1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C$ avec $n \geq 2$.

* $\displaystyle\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$ où $\beta^2 - 4\gamma < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$ on commence par faire apparaître au numérateur $2x+\beta$, la dérivée du trinôme.

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}dx = \int \frac{\frac{b}{2}(2x+\beta)+c-\frac{b\beta}{2}}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}dx$$

$$= \frac{b}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}dx + \left(c-\frac{b\beta}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}dx$$

Le premier terme est de la forme $\int \frac{f'(x)}{f(x)^n}dx$.

Si $n=1$: $\int \frac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}dx = \ln(x^2+\beta x+\gamma) + C$

Si $n \geq 2$: $\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}dx = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{n-1}} + C$

Pour calculer $\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}$ on commence par mettre le trinôme

sous forme canonique :

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4}$$

Comme $\beta^2-4\gamma<0$ on a $\gamma-\beta^2/4>0$. Il existe donc $\alpha>0$ tel que $\gamma-\beta^2/4=\alpha^2$. On a alors :

$$x^2+\beta x+\gamma = \left(x+\beta/2\right)^2+\alpha^2.$$

$$= \alpha^2\left(\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+1\right)$$

Donc :

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \frac{1}{\alpha^{2n}} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+1\right)^n}$$

on pose $u = \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha}$ donc $du = \frac{1}{\alpha} dx \Leftrightarrow dx = \alpha\, du$

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} = \frac{1}{\alpha^{2n-1}} \int \frac{du}{(1+u^2)^n}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} I_n(u) \quad \text{se calcule par récurrence...}$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-1}} I_n\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{\beta}{2\alpha}\right)$$

<u>Exemple:</u> Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+x+1)^2}\, dx$

<u>Etape 1:</u> décomposition en éléments simples

On cherche $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tq :

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+x+1)^2} + \frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

Donc $\dfrac{1}{x^2(x^2+x+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{(x^2+x+1)^2} - \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

<u>Etape 2 :</u> Calcul de la primitive :

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

Avec :

Conclusion:

$$\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)^2} = \ln|x| - \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$$

$$-\frac{5\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Cette primitive est valable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ avec des constantes c potentiellement différentes.

IV) Primitives se ramenant des primitives de fractions rationnelles

1) Polynômes et fractions rationnelles en sin, cos :

a) $\int \sin^p \cos^q$:

Calcul de $\int \sin^p(x)\cos^q(x)\,dx$, avec $p,q \in \mathbb{N}$.

Méthode :

* Si p est impair on pose $u = \cos t$
* Si q est impair on pose $u = \sin t$
* Si p et q sont pairs on linéarise à l'aide des formules d'Euler.

Exemples :

1) Calculer $\int \cos^3(x)\sin^4(x)\,dx$.

on pose $u = \sin(x)$ $\quad du = \cos(x)\,dx$

$$\int \cos^3(x)\sin^4(x)\,dx = \int \cos^2(x)\sin^4(x)\cos(x)\,dx$$

$$= \int \left(1-\sin^2(x)\right)\sin^4(x)\cos(x)\,dx$$

$$= \int (1-u^2)u^4\,du$$

$$= \int (u^4 - u^6)\,du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c$$

$$= \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + c$$

2) Calculer $\int \cos^4(x)\sin^2(x)\,dx$

b) Fractions rationnelles en sin, cos :

Calcul de $\int F(x)\,dx$ où $F(x) = \dfrac{P(\sin(x), \cos(x))}{Q(\sin(x), \cos(x))}$

où P et Q sont des polynômes à deux variables.

Méthode : Règles de Bioche

On regarde si $F(x)\,dx$ est invariant par l'une des transformations suivantes :

* $x \longmapsto -x$ on pose $u = \cos(x)$
* $x \longmapsto \pi - x$ on pose $u = \sin(x)$
* $x \longmapsto \pi + x$ on pose $u = \tan(x)$

Si $F(x)\,dx$ n'est invariante par aucune de ces transformations on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a alors :

$$\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \; ; \; \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \; ; \; dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

Remarques : * les règles de Bioche fonctionnent aussi pour calculer $\int \sin^p(x)\cos^q(x)\,dx$.

* le CDV $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ fonctionne toujours.

Exemples :

1) $$\int \frac{\sin x}{2 + \cos x}\, dx = \int f(x)\, dx$$

2) $$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int f(x)\, dx$$

3) $$\int \frac{dx}{2+\sin(x)+\cos(x)}$$

2) Fractions rationnelles en sh, ch

Calcul de $\int F(x)\,dx$ où $F(x) = \dfrac{P(\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x))}{Q(\operatorname{sh}(x), \operatorname{ch}(x))}$

avec P, Q des polynômes à deux variables.

Méthode : On pose $u = e^x$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{u^2-1}{2u} \ ; \ \operatorname{ch}(x) = \frac{u^2+1}{2u} \ ; \ dx = \frac{du}{u}$$

Exemple : calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\,dx$.

3) Fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Méthode :

1) On met le trinôme sous forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

2) on fait un cdv pour se ramener à l'une des trois formes

$\sqrt{u^2+1}$; $\sqrt{u^2-1}$ ou $\sqrt{1-u^2}$

Il reste alors une fraction rationnelle en u et $\sqrt{u^2+1}$ ou bien $\sqrt{u^2-1}$ ou bien $\sqrt{1-u^2}$.

3) * Si fraction rationnelle en u et $\sqrt{u^2+1}$ on pose $u = sh(v)$

* Si fraction rationnelle en $u = \sqrt{u^2-1}$ on pose $u = ch(v)$

* Si fraction rationnelle en u et $\sqrt{1-u^2}$ on pose $u = \sin(v)$

4) On se retrouve avec une fraction rationnelle en sh, ch dans les deux premiers cas ou en sin, cos dans le troisième cas qu'on calcule alors comme précédemment.

<u>Exemple :</u> Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+3x+2}\right)^3}\,dx$

V) Primitives non calculables :

Il existe des fonctions continues, exprimées à l'aide de fonctions usuelles, dont les primitives ne peuvent pas être exprimées à l'aide de fonction usuelles.

c'est le cas par exemple des fonctions :

$$x \mapsto e^{-x^2} \quad ; \quad x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x} \quad ; \quad x \longmapsto \frac{1}{\ln(x)}.$$

Il existe un théorème (théorème de Liouville) qui donne des conditions pour qu'une primitive puisse être exprimée à l'aide de fonctions usuelles.

Si une primitive n'est pas exprimable à l'aide de fonctions usuelles, on lui donne un nom et on la définit à partir d'une l'intégrale :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \qquad \text{(Fonction d'erreur)}$$

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt \qquad \text{(Sinus intégral)}$$

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \qquad \text{(logarithme intégral)}$$