Chap VI : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Déf : On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 à valeurs dans $\mathbb{K}$ toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple : La suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, c'est la suite de Fibonacci.

I) Structure de l'ensemble des solutions pour $a, b \in \mathbb{K}$ fixés :

Prop : Soit $a, b \in \mathbb{K}$.
L'ensemble $S_{a,b}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

est sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Preuve :

Conséquence :

Si on détermine deux suites (u_n) et (v_n) qui forment une base de $S_{a,b}$ alors toutes les autres suites qui vérifient (*) s'obtiennent comme combinaisons linéaires de (u_n) et (v_n).

II) Résolution dans $\mathbb{C}$:

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On cherche une base de $S_{a,b}$.

Si $(a,b) = (0,0)$ alors (*) s'écrit : $u_{n+2} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Une base de $S_{a,b}$ est alors donnée par les deux suites :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 0, 0, \dots$$

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 0, 0, \dots$$

Dans la suite on suppose $(a,b) \neq (0,0)$.

Cherchons une suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $S_{a,b}$:

$$\begin{aligned}(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{a,b} &\Leftrightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow r^n(r^2 - ar - b) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n=0 \\ &\Leftrightarrow r^2 = ar + b\end{aligned}$$

L'équation $\boxed{r^2 = ar + b}$ est appelée équation caractéristique (Ec).

Prop : Soit Δ le discriminant de (Ec).

Si $\Delta \neq 0$: Alors (Ec) admet deux solutions r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$ distinctes. Les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base de $S_{a,b}$.

Si $\Delta = 0$: Alors le polynôme $r^2 - ar - b$ admet une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$. Les suites $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base de $S_{a,b}$.

Preuve :

Exercice :

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Exprimer u_n en fonction de n.

Solution :

III) Résolution dans $\mathbb{R}$:

Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$ on peut chercher les suites réelles qui vérifient

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Là encore on note S_{ab} l'ensemble des suites réelles qui vérifient $(*)$.

c'est toujours un espace vectoriel de dimension 2.

Soit $r^2 = ar + b$ l'équation caractéristique. (EC)

On suppose aussi que $(a,b) \neq (0,0)$.

Si $(a,b) = (0,0)$ une base de S_{ab} est donnée par

$(1, 0, 0, \ldots$

$(0, 1, 0, \ldots$

Prop : Soit Δ le discriminant de (E_C).

* **Si $\Delta > 0$:**

Alors (E_C) admet deux solutions réelles r_1 et r_2 distinctes.

Les suites $(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment alors une base de $S_{a,b}$.

* **Si $\Delta = 0$:**

Alors le polynôme $r^2 - ar - b$ admet une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$.

Les suites $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment alors une base de $S_{a,b}$.

* **Si $\Delta < 0$:**

Alors (E_C) admet deux racines complexes conjuguées distinctes.

$r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$ avec $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\rho \neq 0$ et $\theta \not\equiv 0 \; [\pi]$.

Les suites $(\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ forment alors une base de $S_{a,b}$.

Preuve :

Récapitulatif :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K},\ u_1 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = a u_n + b u_{n+1},\ \forall n \geq 0. \end{cases}$

avec $a, b \in \mathbb{K}$:

On regarde l'éq. caractéristique, $r^2 - ar - b = 0$ (EC).

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$\Delta = a^2+4b$	Racines	Solution générale
$\Delta \neq 0$	r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$ avec $r_1 \neq r_2$	$u_n = \alpha r_1^n + \mu r_2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$
$\Delta = 0$	racine double $r_0 \in \mathbb{C}$	$u_n = \alpha r_0^n + \mu n r_0^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$\Delta = a^2+4b$	Racines	Solution générale
$\Delta > 0$	$r_1 \in \mathbb{R}$ et $r_2 \in \mathbb{R}$ avec $r_1 \neq r_2$	$u_n = \alpha r_1^n + \mu r_2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	racine double $r_0 \in \mathbb{C}$	$u_n = \alpha r_0^n + \mu n r_0^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	deux racines complexes conjuguées : $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$ avec $\rho \neq 0$ et $\theta \neq 0\ [\pi]$	$u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta),\ \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$