

# Approximation numérique pour la mécanique des fluides



Khaled Saleh

Université Claude Bernard Lyon 1, Institut Camille Jordan.

Janvier 2022

---

Image d'illustration : *La Grande Vague de Kanagawa*, Hokusai.

# Table des matières

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Équations de la mécanique des fluides barotropes</b>                               | <b>5</b>  |
| I.1        | Les équations fondamentales de la mécanique des fluides . . . . .                     | 5         |
| I.2        | Autres modèles d'écoulements compressibles . . . . .                                  | 7         |
| I.3        | Modèles d'écoulements incompressibles . . . . .                                       | 8         |
| <b>II</b>  | <b>Un schéma numérique pour le problème de Stokes stationnaire</b>                    | <b>11</b> |
| II.1       | Résolution du problème de Stokes . . . . .  | 11        |
| II.2       | Approximation numérique : maillage et fonctions discrètes . . . . .                   | 16        |
| II.3       | Le schéma numérique . . . . .   | 18        |
| II.4       | Estimations <i>a priori</i> sur la solution du schéma . . . . .                       | 19        |
| II.5       | Existence et unicité de la solution du schéma . . . . .                               | 20        |
| II.6       | Convergence du schéma vers la solution exacte . . . . .                               | 20        |
| II.7       | Écriture locale du schéma numérique . . . . .   | 28        |
| II.8       | Exercices . . . . .   | 31        |
| <b>III</b> | <b>Analyse fonctionnelle discrète</b>   | <b>33</b> |
| III.1      | Maillage et fonctions discrètes . . . . .   | 33        |
| III.2      | Quelques propriétés des éléments finis de Crouzeix-Raviart . . . . .                  | 36        |
| III.3      | Condition <i>inf-sup</i> discrète . . . . .   | 40        |
| III.4      | Injections de Sobolev discrètes . . . . .   | 41        |
| III.5      | Résultats de compacité . . . . .  | 45        |
| <b>IV</b>  | <b>Discrétisation sur grilles décalées pour les équations de Navier-Stokes</b>        | <b>51</b> |
| IV.1       | Quelques propriétés des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes . . . . . | 52        |
| IV.2       | Schéma numérique : maillages et inconnues discrètes . . . . .                         | 57        |
| IV.3       | Le schéma numérique pour le problème de Stokes stationnaire . . . . .                 | 59        |
| IV.4       | Un schéma numérique implicite pour Navier-Stokes . . . . .                            | 60        |
| IV.5       | Propriétés <i>a priori</i> de la solution du schéma numérique . . . . .               | 67        |
| IV.6       | Autres discrétisations en temps . . . . .   | 71        |
|            | <b>Bibliographie</b>  | <b>73</b> |



# Chapitre I

## Équations de la mécanique des fluides barotropes

### I.1 Les équations fondamentales de la mécanique des fluides

On considère l'espace  $d$ -dimensionnel  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d \in \{2, 3\}$ , dans lequel évolue un fluide (gaz ou liquide) au cours du temps. Dans la description dite eulérienne, l'état du fluide est décrit par la donnée d'un champ  $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  désignant la masse volumique locale en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  au temps  $t > 0$  et d'un champ de vitesse  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_d(\mathbf{x}, t))^T$  désignant la vitesse d'une particule de fluide qui se trouverait en  $\mathbf{x}$  à la date  $t$ . Nous allons établir très rapidement les équations de la mécanique des fluides en partant des principes fondamentaux de *conservation de la masse* et de *conservation de la quantité de mouvement*. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [16, 14, 18].

Le principe de *conservation de la masse* implique que pour tout volume borné  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  fixe, la variation de la masse incluse dans  $\mathcal{O}$  à savoir  $\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x}$  est égale au flux de masse (entrant – sortant) à travers le bord  $\partial\mathcal{O}$  de  $\mathcal{O}$ . Comme les particules de fluide sont transportées à la vitesse  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , la quantité de masse qui traverse  $\partial\mathcal{O}$  par unité de temps est donnée par  $-\int_{\partial\mathcal{O}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$  où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire sortant normal à  $\partial\mathcal{O}$ . Ainsi :

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int_{\partial\mathcal{O}} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(x) dS.$$

Si on applique la formule de Stokes, on obtient :

$$\int_{\mathcal{O}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Comme  $\mathcal{O}$  est arbitraire, on en déduit finalement que l'évolution de  $\rho$  est régie par l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante, appelée *équation de conservation de la masse* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{I.1}$$

Pour ce qui est de l'évolution de la vitesse, le principe de *conservation de quantité de mouvement* locale (à savoir la quantité  $\rho\mathbf{u}$ ) donne, en suivant les mêmes étapes que pour la conservation de la masse :

$$\int_{\mathcal{O}} \frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} d\mathbf{x} = - \int_{\partial\mathcal{O}} \rho\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\mathcal{O}} \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{O}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{I.2})$$

Les deux derniers termes de (I.2) représentent les forces extérieures qui s'appliquent au volume de fluide  $\mathcal{O}$  : les forces volumiques, représentées par le vecteur  $\mathbf{f}$  (forces de gravité, forces électromagnétiques...), et les forces surfaciques qui s'appliquent sur  $\partial\mathcal{O}$ , représentées par  $\boldsymbol{\sigma}$  qui est un tenseur symétrique appelé *tenseur des contraintes*. Sur un élément de surface de  $\partial\mathcal{O}$  orthogonal à un vecteur  $\mathbf{n}$ , le fluide extérieur à  $\mathcal{O}$  exerce des efforts dans toutes les directions représentés par le vecteur  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . On décompose ces efforts en efforts de compression, qui sont des efforts dans la direction  $\mathbf{n}$  et en efforts visqueux :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (\text{I.3})$$

La matrice  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de taille  $d$ ,  $p$  est un scalaire appelé *pression*, et  $\boldsymbol{\tau}$  est la *tenseur des contraintes visqueuses*, parfois improprement appelé tenseur des contraintes. Ainsi, en utilisant (I.2), (I.3) et la formule de Stokes, on obtient l'*équation de conservation de quantité de mouvement* :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (\text{I.4})$$

Si l'on suppose que l'écoulement est homogène et isotrope (invariance des propriétés physiques par translation et rotation), le tenseur des contraintes visqueuses  $\boldsymbol{\tau}$  est relié au champ de vitesse à travers la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u}) + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{I}. \quad (\text{I.5})$$

Le réel  $\mu$  est appelé la *viscosité* du fluide, les coefficients  $\mu$  et  $\lambda$  sont appelés les *coefficients de Lamé*. De même que la pression  $p$ , ils dépendent *a priori* de la masse volumique locale  $\rho$  et d'une variable  $T$  appelée température du fluide, dont l'évolution est fixée par une équation de conservation supplémentaire : l'équation de conservation de l'énergie. Dans le cadre de ce cours, nous nous restreindrons à des écoulements dits *barotropes*, c'est-à-dire un écoulement où la pression ne dépend que de la masse volumique

$$p = \wp(\rho).$$

Nous ferons simplement l'hypothèse naturelle (appelée hypothèse d'hyperbolicité) que la fonction  $\rho \mapsto \wp(\rho)$  est strictement croissante. Les coefficients de Lamé sont constants et vérifient  $\mu > 0$  et  $\mu + \lambda \geq 0$ . Le système composé des équations (I.1) et (I.4), et d'inconnues  $\rho(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , est donc fermé sans avoir à écrire une équation supplémentaire pour fixer l'évolution de  $T$  et s'écrit :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (\text{I.6a})$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \mathbf{div}(\rho\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla \wp(\rho) = \mathbf{f}. \quad (\text{I.6b})$$

Ce système est appelé le système des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes. Il s'écrit sous forme développée de la manière suivante, en notant  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = (\tau_{ij}(\mathbf{u}))_{1 \leq i, j \leq d}$  et  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, \\ \partial_t (\rho u_i) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) - \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}(\mathbf{u})) + \frac{\partial}{\partial x_i} \wp(\rho) &= f_i, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Si le tenseur des contraintes est régi par la loi de Hooke (I.5) alors :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}),$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}(\mathbf{u})) = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, \dots, d.$$

## I.2 Autres modèles d'écoulements compressibles

D'autres modèles d'écoulements compressibles peuvent être obtenus par simplification du système (I.6).

### Équations d'Euler barotropes :

Les équations d'Euler barotropes sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes (I.6) en considérant un terme de diffusion nul. Le système ainsi obtenu permet de modéliser des fluides dits "parfaits", c'est-à-dire sans perte d'énergie due au frottement local :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \wp(\rho) &= \mathbf{f}. \end{aligned}$$

### Équations de Stokes compressibles :

Une autre simplification est de considérer un écoulement sans terme de convection dans l'équation de quantité de mouvement. On obtient les équations de Stokes compressibles qui modélisent un écoulement où la vitesse est de faible amplitude, si bien que les phénomènes de convection sont négligeables devant les phénomènes de diffusion.

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla \wp(\rho) &= \mathbf{f}. \end{aligned}$$

### Équations de Stokes compressible stationnaires :

Si de plus l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire que la masse volumique et la vitesse ne dépendent pas du temps, les dérivées temporelles s'annulent et on obtient le système de Stokes compressible stationnaire :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ -\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla\varphi(\rho) &= \mathbf{f}.\end{aligned}$$

On peut aussi considérer des écoulements où les coefficients de Lamé sont tels que  $\mu + \lambda = 0$ . Le terme de diffusion visqueuse devient alors  $-\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) = -\mu\Delta\mathbf{u}$ .

### I.3 Modèles d'écoulements incompressibles

On dit qu'un écoulement est incompressible lorsque la masse volumique est simplement advectée par la vitesse du fluide sans phénomène de compression ni dilatation, *i.e.* lorsqu'elle vérifie l'EDP :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\rho = 0. \quad (\text{I.7})$$

En combinant cette équation avec l'équation de conservation de la masse (I.6a) on en déduit que la vitesse solution des équations de Navier-Stokes est à divergence nulle :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

### Équations de Navier-Stokes incompressibles à masse volumique variable :

Ces équations sont obtenues à partir des équations de Navier-Stokes (I.6) en ajoutant la contrainte de divergence nulle sur la vitesse. On obtient :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (\text{I.8a})$$

$$\partial_t\rho + \rho \cdot \nabla\mathbf{u} = 0, \quad (\text{I.8b})$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}. \quad (\text{I.8c})$$

Comme il y a une équation supplémentaire (I.8a), il n'y a plus besoin de relier la pression  $p$  à la masse volumique par une loi d'état pour fermer le système. Il est possible de voir  $(\rho, \mathbf{u})$  comme la solution d'un problème variationnel associé aux deux équations (I.8b) et (I.8c). La pression  $p$  peut alors être vue comme le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle (I.8a) sur la vitesse.

**Équations de Navier-Stokes incompressibles :**

Ces équations sont obtenues à partir de (I.8), en considérant que la masse volumique n'est plus simplement advectée, mais qu'elle est constante en espace et en temps :  $\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}$  où  $\bar{\rho} > 0$  est une constante donnée, dépendant du fluide considéré. On obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \bar{\rho} \partial_t \mathbf{u} + \bar{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{I.9}$$

On peut toujours se limiter à résoudre ces équations avec  $\bar{\rho} = 1$ . En effet, si  $(\mathbf{u}, p)$  est solution de

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \bar{\mu} \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \bar{\mathbf{f}}. \end{aligned}$$

alors  $(\mathbf{u}, \bar{\rho} p)$  est solution de (I.9) avec  $\mu = \bar{\rho} \bar{\mu}$  et  $\mathbf{f} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{f}}$ .

**Équations de Stokes incompressibles instationnaires :**

Là aussi, pour des écoulements où les phénomènes de diffusion sont dominants, on peut simplifier le modèle en :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{I.10}$$

**Équations de Stokes incompressibles :**

Le modèle stationnaire correspondant à (I.10) est le fameux modèle de Stokes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}. \end{aligned} \tag{I.11}$$

On peut se limiter à étudier le problème de Stokes avec  $\mu = 1$ . En effet, si  $(\mathbf{u}, p)$  est solution de

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \bar{\mathbf{f}}, \end{aligned}$$

alors  $(\mathbf{u}, \mu p)$  est solution de (I.11) avec  $\mathbf{f} = \mu \bar{\mathbf{f}}$ .



## Chapitre II

# Un schéma numérique pour le problème de Stokes stationnaire

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , de bord lipschitzien. On se donne une fonction  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$ , et on considère le problème de Stokes :

Trouver  $\mathbf{u}$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ) et  $p$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) définies sur  $\Omega$  telles que :

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.1a})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{II.1b})$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (\text{II.1c})$$

La condition aux limites  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$  est appelée condition de Dirichlet homogène. C'est la condition aux limites naturelle sur la vitesse pour un écoulement visqueux. Elle exprime le fait que le fluide adhère à la paroi  $\partial\Omega$ .

Le pression ne peut être déterminée qu'à une constante près. En effet, si  $(\mathbf{u}, p)$  est une solution de (II.1), alors pour tout réel  $c$ ,  $(\mathbf{u}, p + c)$  l'est aussi. Afin de restaurer l'unicité, on peut donc supposer que la pression recherchée est de *moyenne nulle* sur  $\Omega$ , ou de manière équivalente :

$$\int_{\Omega} p = 0. \quad (\text{II.2})$$

Cela permet en effet de restaurer l'unicité car le gradient, même pris dans un sens très faible (au sens des distributions), vérifie la propriété naturelle suivante dès lors que  $\Omega$  est connexe : si  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  est telle que  $\nabla p$  est nul dans  $\mathcal{D}'(\Omega)^d$ , alors  $p = \text{cste}$ . Ainsi, deux distributions qui ont même gradient diffèrent d'une constante.

### II.1 Résolution du problème de Stokes

On cherche des solutions faibles du problème de Stokes (II.1). On prend le produit scalaire de (II.1a) par une fonction test  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^d$  et on multiplie (II.1b) par une fonction test

$q \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Après intégration par parties dans la première équation, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{II.3})$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (\text{II.4})$$

Au vu de ces équations et de la condition de Dirichlet homogène (II.1c), il est naturel de rechercher la vitesse  $\mathbf{u}$  dans l'espace  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)^d$ . L'espace naturel dans lequel on va chercher la pression  $p$  est l'espace des fonctions de carré intégrable et de moyenne nulle sur  $\Omega$  :

$$\mathbf{L}_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}.$$

Comme  $\mathcal{D}(\Omega)^d$  est dense dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega) := \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d$ , on peut prendre les fonctions tests  $\mathbf{v}$  dans le même espace que  $\mathbf{u}$ . De plus, si  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  est solution alors pour tout  $q \in \mathcal{D}(\Omega)$  et tout réel  $c$  on a :

$$\int_{\Omega} (q + c) \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} + c \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} + c \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u},$$

grâce à la condition aux limites de Dirichlet homogène (II.1c). Ainsi, si  $q \in \mathcal{D}(\Omega)$  satisfait (II.4), alors  $q + c$  aussi, pour tout réel  $c$ . On peut donc supposer que  $q$  est de moyenne nulle et par densité, on peut prendre les fonctions tests  $q$  dans  $\mathbf{L}_0^2(\Omega)$ . On aboutit à la formulation variationnelle du problème de Stokes qui s'énonce ainsi :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}_0^2(\Omega)$  tels que :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \forall q \in \mathbf{L}_0^2(\Omega). \end{array} \quad (\text{II.5a})$$

Pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , on peut définir  $\Delta \mathbf{u}$  comme un élément de  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ , l'ensemble des formes linéaires continues sur  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , par la relation :

$$\langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} := - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

et on a alors  $\|\Delta \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = \sup \{ |\langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1}|, \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 1 \} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ . De façon similaire, toute fonction  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^d$  induit un élément de  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  par la relation

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

On alors  $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = \sup \{ |\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1}|, \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 1 \} \leq C_\Omega \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ , où  $C_\Omega$  est la constante de l'inégalité de Poincaré :  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ . Enfin, pour tout  $p \in \mathbf{L}_0^2(\Omega)$ , on définit son gradient comme un élément de  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  par la relation

$$\langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

et on a  $\|\nabla p\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq \sqrt{d} \|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  (car  $\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \sqrt{d} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ).

Avec ces définitions, on peut réécrire la formulation variationnelle (II.5) de la manière équivalente suivante :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}_0^2(\Omega)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \end{array} \right. \quad (\text{II.6a})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \mathbf{L}_0^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (\text{II.6b})$$

Le problème de Stokes est bien posé au sens de Hadamard :

### **Théorème II.1**

Il existe un unique couple  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{L}_0^2(\Omega)$ , solution faible du problème de Stokes (II.6) (i.e. vérifiant (II.5)). Cette solution vérifie les estimations a priori suivantes :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad (\text{II.7})$$

$$\|p\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2 \frac{C_\Omega}{C_{\text{LBB}}} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad (\text{II.8})$$

où  $C_\Omega$  est la constante de Poincaré et  $C_{\text{LBB}}$  est une constante qui ne dépend que de  $\Omega$ .

La démonstration de ce résultat se fait en deux étapes.

### **Étape 1 : élimination de la pression : résolution en vitesse :**

Considérons l'espace  $\mathbf{V}$  noyau de l'opérateur divergence dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  :

$$\mathbf{V} := \operatorname{Ker}(\operatorname{div}) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\}. \quad (\text{II.9})$$

L'opérateur (linéaire)  $\operatorname{div} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}_0^2(\Omega)$  étant continu, l'espace  $\mathbf{V}$  est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. C'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire hérité de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

Si  $\mathbf{u}$  est solution de (II.5) alors  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ . De plus, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ , on a  $\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  donc  $\mathbf{u}$  est aussi solution de la formulation faible suivante :

Trouver  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  tel que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (\text{II.10})$$

où l'application  $a : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$ . On a ainsi éliminé la pression  $p$  et on retrouve là pour la vitesse  $\mathbf{u}$  la formulation faible du problème de Poisson (multi-D)  $-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}$ . On montre aisément que l'application  $a$  est continue et coercive sur  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ , et l'application linéaire  $\mathbf{v} \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  est continue sur  $\mathbf{V}$ . On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram (voir [4]) pour montrer qu'il existe un unique champ de vitesse  $\mathbf{u}$  solution de (II.10). Il existe donc au plus une vitesse  $\mathbf{u}$  solution du problème de Stokes (II.5).

En prenant  $\mathbf{u}$  comme fonction test dans la formulation faible (II.10) (ou dans (II.5a)) on observe que :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)},$$

ce qui donne l'estimation *a priori* suivante sur la vitesse solution :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{II.11})$$

### Étape 2 : restitution de la pression :

Soit  $\mathbf{u}$  l'unique solution de (II.10). Par définition du problème (II.10), on sait que l'élément  $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}$  de  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  vérifie  $\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u} \in \text{Ker}(\text{div})^{\perp} = \mathbf{V}^{\perp}$ , où l'orthogonal est entendu au sens de la dualité entre  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  et  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . En effet,  $\mathbf{u}$  solution de (II.10) s'écrit :

$$\langle \mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker}(\text{div}).$$

On sait aussi que pour tout  $p \in L_0^2(\Omega)$ , l'élément  $\nabla p \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  est aussi dans  $\text{Ker}(\text{div})^{\perp} = \mathbf{V}^{\perp}$  puisque :

$$\langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} = - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker}(\text{div}).$$

Autrement dit, on a  $\text{Im}(\nabla) \subset \text{Ker}(\text{div})^{\perp}$ . Si l'on montre que l'on a en fait  $\text{Im}(\nabla) = \text{Ker}(\text{div})^{\perp}$ , alors l'opérateur gradient est surjectif sur  $\text{Ker}(\text{div})^{\perp}$ , et la pression  $p$  recherchée est donc définie par :

$$\nabla p = \mathbf{f} + \Delta \mathbf{u} \quad \Longleftrightarrow \quad p = \nabla^{-1}(\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}).$$

En réalité, comme les opérateurs gradient et divergence sont duaux, on a mieux que  $\text{Im}(\nabla) \subset \text{Ker}(\text{div})^{\perp}$ . On a en effet :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\nabla)^{\perp} &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \langle \nabla p, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} = 0, \forall p \in L_0^2(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v} = 0, \forall p \in L_0^2(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{v} = 0 \right\} \\ &= \text{Ker}(\text{div}), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que  $\overline{\text{Im}(\nabla)} = \text{Im}(\nabla)^{\perp\perp} = \text{Ker}(\text{div})^{\perp}$  car  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  est réflexif (c'est un espace de Hilbert, voir [4]). Ainsi, pour montrer que le gradient est inversible sur  $\text{Ker}(\text{div})^{\perp}$ , il reste à montrer que l'espace  $\text{Im}(\nabla)$  est fermé. Contrairement à la dimension finie, où tout espace vectoriel est fermé, ce résultat est ici non trivial, en ce qui concerne l'opérateur gradient. Il est la conséquence de la propriété suivante (en fait les deux propriétés sont équivalentes), classiquement appelée *condition inf-sup* ou *condition LBB* pour Ladyzenskaia-Babushka-Brezzi, que nous admettrons.

**Proposition II.2 (Condition inf-sup ou LBB)**

Il existe une constante  $C_{\text{LBB}} > 0$ , ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$  telle que :

$$\inf_{\substack{q \in L_0^2(\Omega) \\ q \neq 0}} \left( \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} q \text{div } \mathbf{v}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}} \right) \geq C_{\text{LBB}}. \quad (\text{II.12})$$

L'inégalité (II.12) est équivalente à dire que pour tout  $q \in L_0^2(\Omega)$ , il existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  avec  $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = 1$  tel que :

$$C_{\text{LBB}} \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_{\Omega} q \text{div } \mathbf{v}.$$

En particulier, pour tout  $q \in L_0^2(\Omega)$ , en choisissant ce  $\mathbf{v}$  on obtient que :

$$C_{\text{LBB}} \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_{\Omega} q \text{div } \mathbf{v} = -\langle \nabla q, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}_0^1} \leq \|\nabla q\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla q\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}.$$

L'inégalité

$$\|q\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{C_{\text{LBB}}} \|\nabla q\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (\text{II.13})$$

implique que  $\text{Im}(\nabla)$  est fermé. En effet, considérons une suite  $(\nabla q_n) \subset \text{Im}(\nabla)$  qui converge vers  $\phi \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  avec  $q_n \in L_0^2(\Omega)$  pour tout  $n$ . La suite  $(\nabla q_n)$  est de Cauchy, et par (II.13), la suite  $(q_n)$  est aussi de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  donc convergente vers un certain  $q \in L_0^2(\Omega)$ . Par continuité du gradient, on a alors  $\phi = \nabla q$  i.e.  $\phi \in \text{Im}(\nabla)$ . Donc  $\text{Im}(\nabla) = \overline{\text{Im}(\nabla)} = \text{Ker}(\text{div})^{\perp}$ . D'après le théorème de l'application ouverte, l'opérateur  $\nabla$  est inversible sur son image, d'inverse continu, et d'après (II.13) la constante de continuité est au plus  $C_{\text{LBB}}^{-1}$ . On peut donc définir  $p = \nabla^{-1}(\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u})$ .

Appliquons l'inégalité (II.13) à la pression  $p$  solution du problème de Stokes. On a  $\nabla p = \mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}$  dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  donc :

$$C_{\text{LBB}} \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla p\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = \|\mathbf{f} + \Delta \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq \left( \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} + \|\Delta \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \right).$$

Comme  $\|\Delta \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$  et  $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$ , on obtient grâce à l'estimation (II.11) sur la vitesse, l'estimation *a priori* suivante sur la pression solution :

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \frac{C_{\Omega}}{C_{\text{LBB}}} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{II.14})$$

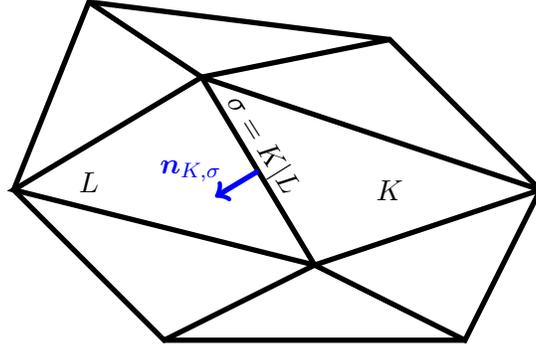


FIGURE II.1 – Notations pour un maillage triangulaire.

## II.2 Approximation numérique : maillage et fonctions discrètes

On suppose à partir de maintenant que  $\Omega$  est polygonal si  $d = 2$ , et polyédrique si  $d = 3$ .

### Définition II.1 (*Maillage triangulaire (voir Figure II.1)*)

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , polygonal si  $d = 2$ , et polyédrique si  $d = 3$ . Un maillage triangulaire de  $\Omega$  (ou triangulation) est une partition  $\mathcal{M}$  de  $\Omega$  en un nombre fini de simplexes  $K$  (triangles si  $d = 2$  et tétraèdres si  $d = 3$ ) tels que  $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \overline{K}$ . On suppose que le maillage est conforme i.e. que “toute face  $\sigma$  d’un élément  $K \in \mathcal{M}$  est soit contenue dans la frontière  $\partial\Omega$ , soit égale à une face d’un autre élément  $L$ ”, et on note alors  $\sigma = K|L$ . Pour chaque  $K \in \mathcal{M}$ , on note  $\mathcal{E}(K)$  l’ensemble des  $(d+1)$  faces de  $K$ , et par  $\mathcal{E}$  l’ensemble des faces du maillage. On note  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  resp.  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  l’ensemble des faces externes resp. internes :  $\mathcal{E}_{\text{ext}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial\Omega\}$  and  $\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{ext}}$ . Pour  $K \in \mathcal{M}$  et  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ ,  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\sigma$  et sortant de la maille  $K$ . On note  $|K|$  la mesure  $d$ -dimensionnelle de  $K$  et  $|\sigma|$  la mesure  $(d-1)$ -dimensionnelle d’une face  $\sigma$ .

### Définition II.2 (*Pas du maillage*)

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage, pour chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ , on définit  $h_K$  le diamètre de  $K$  (mesure du plus grand segment inclus dans  $K$ ). Le pas du maillage est défini par :

$$h_{\mathcal{M}} = \max_{K \in \mathcal{M}} h_K.$$

### Définition II.3 (*Régularité du maillage*)

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage, pour chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ , on définit  $\varrho_K$  le rayon de la plus grande boule inscrite dans  $K$ . Le paramètre de régularité d’un maillage  $\mathcal{M}$  donné est défini par

le réel :

$$\theta_{\mathcal{M}} = \max_{K \in \mathcal{M}} \frac{h_K}{\varrho_K}. \quad (\text{II.15})$$

Définissons à présent les espaces fonctionnels discrets pour la pression et la vitesse.

**Définition II.4 (Espaces fonctionnels discrets pour la pression)**

On note  $L_{\mathcal{M}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions scalaires constantes sur chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ . Pour tout  $q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $K \in \mathcal{M}$ , on note  $q_K$  la valeur constante de  $q$  sur  $K$ . On note  $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  l'espace des fonctions constantes sur chaque maille  $K \in \mathcal{M}$  et de moyenne nulle sur  $\Omega$  :

$$L_{\mathcal{M},0}(\Omega) = \left\{ q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \mid \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| q_K = 0 \right\}.$$

Pour la vitesse, on va approcher les fonctions de  $H^1(\Omega)$  grâce à l'élément fini de *Crouzeix-Raviart* [5]. Notons  $\Pi_1$  l'espace des polynômes affines dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$\Pi_1 = \text{span}\{1, x_i, i = 1, \dots, d\}.$$

Les degrés de liberté pour la vitesse sont associés aux faces  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$  par les formes linéaires :

$$\left\{ F_{\sigma}, \sigma \in \mathcal{E} \right\} \quad \text{avec} \quad F_{\sigma}(u) = \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} u.$$

**Définition II.5 (Espaces fonctionnels discrets pour la vitesse)**

- On définit l'espace de fonctions  $H_{\mathcal{M}}(\Omega)$  associé à l'élément fini de *Crouzeix-Raviart* :

$$H_{\mathcal{M}}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid u|_K \in \Pi_1, \forall K \in \mathcal{M}; \right. \\ \left. \text{avec } F_{\sigma}(u) \text{ continue à travers chaque face } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \right\}.$$

- On définit  $H_{\mathcal{M},0}(\Omega) \subset H_{\mathcal{M}}(\Omega)$  l'espace des fonctions discrètes dont les degrés de liberté associés aux faces de bord sont nuls :

$$H_{\mathcal{M},0}(\Omega) = \left\{ u \in H_{\mathcal{M}}(\Omega) \mid F_{\sigma}(u) = 0 \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \right\}.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, nous notons  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega) := H_{\mathcal{M}}(\Omega)^d$  et  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) := H_{\mathcal{M},0}(\Omega)^d$ .

**Remarque II.1**

Comme  $u|_K \in \Pi_1$ , on a  $\frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} u|_K = u|_K(\mathbf{x}_{\sigma})$  où  $\mathbf{x}_{\sigma}$  est le centre de masse de la face  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ . Ainsi, une définition alternative de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  est :

$$\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid u|_K \in \Pi_1, \forall K \in \mathcal{M}; \right. \\ \left. \text{et } u|_K(\mathbf{x}_{\sigma}) = u|_L(\mathbf{x}_{\sigma}) \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L \right\}.$$

**Définition II.6 (Fonctions de forme)**

On appelle fonctions de forme les fonctions  $\zeta_{\sigma} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}$ , telles que pour tous  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{E}$ ,  $F_{\sigma'}(\zeta_{\sigma}) = \delta_{\sigma}^{\sigma'}$  où  $\delta_{\sigma}^{\sigma'} = 1$  si  $\sigma = \sigma'$  et  $\delta_{\sigma}^{\sigma'} = 0$  sinon. On a alors, pour tout  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  :

$$u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_{\sigma} \zeta_{\sigma}, \quad \text{où } u_{\sigma} = F_{\sigma}(u) = \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} u = u(\mathbf{x}_{\sigma}), \forall \sigma \in \mathcal{E}.$$

On a  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  si, et seulement si  $u_{\sigma} = 0$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ .

Notons qu'une fonction de forme  $\zeta_{\sigma} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  a son support inclus dans les mailles adjacentes à  $\sigma$ .

## II.3 Le schéma numérique

Pour  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ , on définit sur tout  $\Omega$ ,  $\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u}$ , le gradient discret associé à l'élément fini de Crouzeix-Raviart comme la fonction (à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d \times d}$ ) régulière sur chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ , égale à  $\nabla(\mathbf{u}|_K)$ . De même, on définit sur tout  $\Omega$ ,  $\text{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}$ , la fonction scalaire égale sur chaque maille  $K \in \mathcal{M}$  à  $\text{div}(\mathbf{u}|_K)$ .

La méthode d'approximation numérique consiste à écrire la formulation variationnelle (II.5) du problème de Stokes en remplaçant les espaces continus  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et  $L_0^2(\Omega)$  par leurs équivalents discrets  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  et  $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ , ainsi que les opérateurs différentiels gradient et divergence par leurs analogues discrets définis ci-dessus. Le schéma numérique s'écrit donc :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \times L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  tels que :

$$\left| \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \text{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega), \quad (\text{II.16a}) \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} q \text{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega). \quad (\text{II.16b}) \right.$$

## II.4 Estimations *a priori* sur la solution du schéma

Soit  $(\mathbf{u}, p)$  une solution du schéma numérique (II.16). On cherche des estimations sur cette solution, c'est-à-dire des bornes *a priori* sur des normes de la vitesse et de la pression. De même qu'en continu, on obtient ces estimations *a priori* en prenant comme fonction test dans la formulation faible la solution elle-même. Commençons par l'estimation *a priori* sur la vitesse discrète. On prend  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans (II.16a) ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} - \int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

Or, par (II.16b), le terme  $\int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}$  est nul ce qui donne :

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

On introduit la semi-norme  $\mathbf{H}^1$  discrète  $\|\cdot\|_{1,2,\mathcal{M}}$ , définie pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  par :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 := \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}.$$

La semi-norme  $\|\cdot\|_{1,2,\mathcal{M}}$  est en fait une norme sur l'espace  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  grâce à une inégalité de Poincaré discrète (voir la Proposition III.8 du chapitre III pour la démonstration). Si le paramètre de régularité de la discrétisation vérifie  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , alors il existe une constante  $C(\theta_0)$  telle que :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\theta_0) \|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega). \quad (\text{II.17})$$

On en déduit une estimation *a priori* sur la vitesse approchée qui est l'analogue discret de l'estimation *a priori* (II.11) sur la solution exacte :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}} \leq C(\theta_0) \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{II.18})$$

L'estimation *a priori* sur la pression s'obtient de manière analogue au cas continu. Elle découle d'une condition *inf-sup discrète* vérifiée par les espaces discrets  $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  et  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ . C'est cette propriété qui justifie l'utilisation des éléments finis de Crouzeix-Raviart pour l'approximation numérique sur des simplexes des modèles d'écoulements incompressibles. On a le résultat suivant, qui sera démontré au chapitre III.

### **Proposition II.3 (Condition inf-sup discrète)**

On suppose que le paramètre de régularité  $\theta_{\mathcal{M}}$  de la discrétisation vérifie  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$  pour une constante  $\theta_0 > 0$  fixée. Alors il existe une constante  $C_{\text{LBB}}(\Omega, \theta_0)$  telle que :

$$\inf_{\substack{q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ q \neq 0}} \left( \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{v}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}}} \right) \geq C_{\text{LBB}}(\Omega, \theta_0). \quad (\text{II.19})$$

L'inégalité (II.19) est équivalente à dire que pour tout  $q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ , il existe  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  avec  $\|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}} = 1$  tel que  $\int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{v} \geq C_{\text{LBB}}(\Omega, \theta_0) \|q\|_{L^2(\Omega)}$ . En appliquant ceci à la pression  $p$  solution de (II.16), on a l'existence d'un  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  avec  $\|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}} = 1$  tel que :

$$\begin{aligned} C_{\text{LBB}}(\Omega, \theta_0) \|p\|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{v} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}} \|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}} + C(\theta_0) \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Poincaré discrète  $\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\theta_0) \|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}}$  et parce que  $\|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}} = 1$ . En utilisant l'estimation *a priori* (II.18) sur la vitesse, on en déduit l'estimation *a priori* suivante sur la pression  $p$  solution, analogue discret de l'estimation *a priori* (II.14) pour la solution exacte :

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2C(\theta_0)}{C_{\text{LBB}}(\Omega, \theta_0)} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{II.20})$$

## II.5 Existence et unicité de la solution du schéma

Les espaces vectoriels  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  et  $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  sont de dimensions finies et donc isomorphes à leurs espaces duaux respectifs  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)'$  et  $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)'$ . Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \times L_{\mathcal{M},0}(\Omega) &\longrightarrow \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)' \times L_{\mathcal{M},0}(\Omega)' \\ (\mathbf{u}, p) &\longmapsto \left( \mathbf{v} \mapsto \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{v}, q \mapsto \int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u} \right). \end{aligned}$$

D'après les estimations *a priori* (II.18) sur la vitesse discrète et (II.20) sur la pression discrète, cette application est injective. Elle est donc surjective (les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont de même dimension), d'où l'existence d'une unique solution au schéma pour tout  $\mathbf{f}$ .

## II.6 Convergence du schéma vers la solution exacte

### II.6.1 Principes généraux pour la preuve de la convergence

On considère  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages telle que  $h^{(m)} = h_{\mathcal{M}^{(m)}}$  tende vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ . À chaque  $m \in \mathbb{N}$  est associée une solution  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})$  du schéma numérique (II.16) et on s'attend à ce que  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})$  converge, lorsque  $m \rightarrow +\infty$  - c'est-à-dire lorsque le pas des discrétisations  $h^{(m)}$  tend vers zéro- vers un couple  $(\mathbf{u}, p)$  solution faible du problème de Stokes (II.1). La démonstration d'un tel résultat se fait classiquement en trois étapes :

1. *Compacité* : on commence par démontrer que l'on peut extraire une sous-suite de  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , toujours notée  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , qui converge en un sens à préciser vers un couple  $(\mathbf{u}, p)$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . La compacité découle en général des estimations *a priori* sur  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})$ .
2. *Régularité de la limite* : on démontre que la limite  $(\mathbf{u}, p)$  vérifie l'intégrabilité et la régularité requise par la solution exacte. Ici on vérifie que  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  et  $p \in L_0^2(\Omega)$ .
3. *Passage à la limite dans le schéma* : Cette étape vise à montrer que la limite  $(\mathbf{u}, p)$  est bien une solution faible du problème exact, c'est-à-dire qu'elle vérifie (II.5). Ceci se démontre en écrivant la formulation faible du schéma (II.16) pour  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})$  et en passant à la limite dans cette formulation lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Il faut alors que les convergences de  $\mathbf{u}^{(m)}$  vers  $\mathbf{u}$  et de  $p^{(m)}$  vers  $p$  soient suffisantes pour faire ce passage à la limite.

On démontre ci-dessous le théorème suivant :

#### **Théorème II.4 (Convergence du schéma numérique)**

Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de triangulations telle que  $h^{(m)} = h_{\mathcal{M}^{(m)}}$  tende vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ . On suppose que la suite de maillages est régulière au sens où il existe  $\theta_0 > 0$  telle que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\theta^{(m)} := \theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$ . Pour chaque  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})$  la solution du schéma numérique (II.16). Alors, il existe  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  tels que  $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \mathbf{u}$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ ,  $p^{(m)} \rightharpoonup p$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  et tels que  $(\mathbf{u}, p)$  est une solution faible du problème de Stokes.

### II.6.2 Compacité et régularité de la limite

Soit donc une suite  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  de triangulations telles que  $h^{(m)} = h_{\mathcal{M}^{(m)}}$  tende vers 0 lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$  et soit  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})$  la solution du schéma numérique (II.16) obtenue pour un maillage  $\mathcal{M}^{(m)}$  donné. On suppose que la famille de maillage  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est régulière : il existe  $\theta_0 > 0$  telle que

$$\theta^{(m)} = \theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.21})$$

On a alors les estimations *a priori* suivantes sur la suite  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  :

$$\|\mathbf{u}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C(\theta_0) \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (\text{II.22})$$

$$\|p^{(m)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2C(\theta_0)}{C_{\text{LBB}}(\Omega, \theta_0)} \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.23})$$

On obtient facilement de la compacité faible sur la pression. L'estimation (II.23) sur la pression implique qu'il existe une sous-suite de  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , encore notée  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , et  $p \in L^2(\Omega)$  telle que  $p^{(m)} \rightharpoonup p$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ .

Pour comprendre comment fonctionne la méthode de compacité sur la vitesse, on va *supposer momentanément* que la suite des vitesses discrètes vérifie  $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  avec l'estimation *a priori* suivante :

$$\|\mathbf{u}^{(m)}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.24})$$

Comme  $\Omega$  est borné, on sait par le théorème de Rellich que  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  s'injecte compactement dans  $L^2(\Omega)^d$ . L'estimation (II.24) sur la vitesse implique donc que la famille  $\{\mathbf{u}^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$  est compacte dans  $L^2(\Omega)^d$  : quitte à extraire à nouveau une sous-suite, il existe une fonction  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d$  telle que  $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \mathbf{u}$  fortement dans  $L^2(\Omega)^d$ .

Pour montrer que la limite  $\mathbf{u}$  appartient en fait à  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  on procède comme suit. On étend  $\mathbf{u}^{(m)}$  et  $\mathbf{u}$  à tout  $\mathbb{R}^d$  en les prolongeant par zéro en dehors de  $\Omega$ . On a alors  $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \mathbf{u}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)^d$ , ce qui entraîne  $\nabla \mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \nabla \mathbf{u}$  au sens des distributions. Or, comme  $\mathbf{u}^{(m)} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , son prolongement par zéro est dans  $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$  (voir [4]) avec  $\|\nabla \mathbf{u}^{(m)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . On en déduit que la limite faible  $\nabla \mathbf{u}$  est aussi dans  $L^2(\mathbb{R}^d)^{d \times d}$  avec  $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$ . Ceci implique que le prolongement de  $\mathbf{u}$  est dans  $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^d)$  et comme  $\mathbf{u} = 0$  en dehors de  $\Omega$ , on a  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$  c'est-à-dire  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

Ce raisonnement pour la compacité sur la vitesse n'est pas applicable ici car contrairement aux méthodes numériques d'*approximation interne*, l'approximation de la vitesse par les éléments finis de Crouzeix-Raviart ne fournit pas des solutions approchées dans l'espace  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . En effet, les fonctions  $\mathbf{u}^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$  présentent des sauts à travers les faces du maillage. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème de Rellich. Il faut *re-démontrer* un résultat de compacité pour les suites de fonctions qui sont bornées dans la norme discrète  $\|\cdot\|_{1,2,\mathcal{M}}$ . C'est l'objet du chapitre III où sont démontrés des résultats d'analyse fonctionnelle (injections de Sobolev, compacité, condition inf-sup discrète) pour les fonctions discrètes de l'espace  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ . En particulier, nous démontrerons le théorème suivant, que nous admettons pour l'instant :

### Théorème II.5

Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $u^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$ . On suppose qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\|u^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C, \forall m \in \mathbb{N}$ . On suppose aussi que  $h_{\mathcal{M}^{(m)}} \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Alors :

1. Il existe une sous-suite de  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , toujours notée  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , qui converge dans  $L^2(\Omega)$  vers un certain  $u \in L^2(\Omega)$ .
2. La limite  $u$  appartient à  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  avec  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ .

Appliqué à la suite  $(\mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  composante pas composante, ce résultat donne l'existence d'une fonction  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  telle que, quitte à extraire à nouveau une sous-suite de  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \mathbf{u}$  fortement dans  $L^2(\Omega)^d$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .

### II.6.3 Passage à la limite dans le schéma numérique

#### Passage à la limite dans l'équation de conservation de la masse :

On souhaite démontrer que la vitesse limite  $\mathbf{u}$  vérifie l'équation de divergence nulle au sens faible (II.5b). Par densité de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , il suffit de vérifier cette égalité pour les fonctions test régulières :

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in C_c^\infty(\Omega) \text{ telle que } \int_{\Omega} q = 0. \quad (\text{II.25})$$

Soit donc  $q \in C_c^\infty(\Omega)$  telle que  $\int_{\Omega} q = 0$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit  $q^{(m)} \in L_{\mathcal{M}^{(m)},0}$  en posant  $q_K = \frac{1}{|K|} \int_K q$  pour tout  $K \in \mathcal{M}^{(m)}$ . A  $m$  fixé, on prend  $q^{(m)}$  comme fonction test dans la formulation faible de l'équation discrète de continuité (II.5b). On obtient :

$$\int_{\Omega} q^{(m)} \operatorname{div}_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{u}^{(m)} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.26})$$

Si l'on démontre que  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{u}^{(m)} \rightharpoonup \operatorname{div} \mathbf{u}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  et que  $q^{(m)} \rightarrow q$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ , alors on peut passer à la limite lorsque  $m \rightarrow +\infty$  dans (II.26) et on obtient alors (II.25). C'est l'objet des lemmes II.7 et II.8 ci-dessous.

On commence par un résultat technique qui sera démontré au chapitre III.

#### **Lemme II.6**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_0 > 0$ . Pour toute fonction  $v$  définie sur  $\Omega$  et tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , avec  $\sigma = K|L$ , on note  $[v]_{\sigma} =$  le saut de  $v$  à travers  $\sigma$  ( i.e.  $|[v]_{\sigma}(\mathbf{x})| = |v|_K(\mathbf{x}) - v|_L(\mathbf{x})|$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$ ), et pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ ,  $\sigma \in K$ , on note  $[v]_{\sigma}(\mathbf{x}) = v|_K(\mathbf{x})$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$ . Enfin, on note  $h_{\sigma}$  le diamètre de  $\sigma$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ . Alors il existe une constante  $C(d, \theta_0)$  telle que :

$$\left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_{\sigma}} \int_{\sigma} |[v]_{\sigma}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(d, \theta_0) \|v\|_{1,2,\mathcal{M}}, \quad \forall v \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega). \quad (\text{II.27})$$

#### **Lemme II.7 (Convergence faible de la divergence discrète)**

Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . On suppose que  $h^{(m)} = h_{\mathcal{M}^{(m)}} \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . On se donne une suite  $(\mathbf{v}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{v}^{(m)} \in H_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$ . On suppose qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\|\mathbf{v}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$  et qu'il existe  $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d$  tel que  $\mathbf{v}^{(m)} \rightharpoonup \mathbf{v}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)^d$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Alors  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  (au sens des distributions) est dans  $L^2(\Omega)$  et quitte à extraire une sous-suite, on a  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} \rightharpoonup \operatorname{div} \mathbf{v}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration :** Soit  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathcal{M}(m)} \mathbf{v}^{(m)} \phi &= \sum_{K \in \mathcal{M}(m)} \int_K \operatorname{div} \mathbf{v}^{(m)} \phi \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{M}(m)} \left( - \int_K \mathbf{v}^{(m)} \cdot \nabla \phi + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} \mathbf{v}^{(m)} \cdot (\phi \mathbf{n}_{K,\sigma}) \right) \\
 &= - \int_{\Omega} \mathbf{v}^{(m)} \cdot \nabla \phi + R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi)
 \end{aligned} \tag{II.28}$$

avec

$$R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(m)} \int_{\sigma} [\mathbf{v}^{(m)}]_{\sigma} \cdot (\phi \mathbf{n}_{K,\sigma}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(m)} \int_{\sigma} [\mathbf{v}^{(m)}]_{\sigma} \cdot ((\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})) \mathbf{n}_{K,\sigma}),$$

car l'intégrale du saut de  $\mathbf{v}^{(m)}$  à travers une face  $\sigma$  est nulle. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit que :

$$|R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi)| \leq \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(m)} \frac{1}{h_{\sigma}} \int_{\sigma} |[\mathbf{v}^{(m)}]_{\sigma}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(m)} \int_{\sigma} h_{\sigma} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant l'inégalité (II.27) on obtient :

$$\begin{aligned}
 |R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi)| &\leq C(d, \theta_0) \|\mathbf{v}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}(m)} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(m)} \int_{\sigma} h_{\sigma} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C C(d, \theta_0) \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(m)} \int_{\sigma} h_{\sigma} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Comme  $\phi$  est régulière, on a pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$ ,  $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})| \leq h_{\sigma} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq h^{(m)} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)}$  par le théorème des accroissements finis. On en déduit que

$$|R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi)| \leq h^{(m)} C C'(d, \theta_0) |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

En faisant tendre  $m$  vers  $+\infty$  dans (II.28), on obtient, comme  $\mathbf{v}^{(m)} \rightharpoonup \mathbf{v}$  faiblement dans  $L^2$  que :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_{\mathcal{M}(m)} \mathbf{v}^{(m)} \phi \rightarrow - \int_{\Omega} \mathbf{v}^{(m)} \cdot \nabla \phi \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}(m)} \mathbf{v}^{(m)} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}$  au sens des distributions. Comme par ailleurs  $\|\mathbf{v}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}(m)} \leq C$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , la suite de fonctions  $(\operatorname{div}_{\mathcal{M}(m)} \mathbf{v}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . Elle admet donc une sous-suite qui converge faiblement dans  $L^2(\Omega)$ , mais aussi dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , vers une fonction  $w \in L^2(\Omega)$ . On en déduit que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = w$  donc  $\operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$ . ■

En appliquant le lemme II.7 à la suite  $(\mathbf{u}^{(m)})$ , on obtient que (quitte à extraire une sous-suite)  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}(m)} \mathbf{u}^{(m)} \rightharpoonup \operatorname{div} \mathbf{u}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ .

**Lemme II.8**

Soit  $q \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . On suppose que  $h^{(m)} = h_{\mathcal{M}^{(m)}} \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit  $q^{(m)} \in L_{\mathcal{M}^{(m)}}(\Omega)$  en posant  $q_K = \frac{1}{|K|} \int_K q$  pour tout  $K \in \mathcal{M}^{(m)}$ . Alors  $q^{(m)} \rightarrow q$  fortement dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration :** Laissée en exercice. ■

**Passage à la limite dans l'équation de quantité de mouvement :**

On souhaite à présent démontrer que la limite  $(\mathbf{u}, p)$  vérifie l'équation de quantité de mouvement au sens faible (II.5a). Par densité de  $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^d$  dans  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , il suffit de vérifier cette égalité pour les fonctions test régulières :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^d. \quad (\text{II.29})$$

Soit  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^d$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathbf{v}^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$  en posant  $\mathbf{v}^{(m)} = I_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}$  où pour un maillage donné  $\mathcal{M}$ , l'opérateur  $I_{\mathcal{M}}$  est défini par :

$$I_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \mathbf{H}_0^1(\Omega) & \longrightarrow \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ u & \longmapsto I_{\mathcal{M}} u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \left( \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} u \right) \zeta_{\sigma}. \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

A  $m$  fixé, on prend  $\mathbf{v}^{(m)}$  comme fonction test dans la formulation faible de l'équation discrète de quantité de mouvement (II.16a). On obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{u}^{(m)} : \nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} - \int_{\Omega} p^{(m)} \operatorname{div}_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^{(m)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.31})$$

On sait que  $p^{(m)} \rightharpoonup p$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$ . Ainsi, pour passer à la limite dans (II.31) et obtenir (II.29), il suffit de démontrer que  $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{u}^{(m)} \rightharpoonup \nabla \mathbf{u}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  ainsi que les convergences fortes dans  $L^2(\Omega)$  de  $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} \rightarrow \nabla \mathbf{v}$  et  $\operatorname{div}_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}$  et la convergence  $\mathbf{v}^{(m)} \rightarrow \mathbf{v}$  faible dans  $L^2(\Omega)$ . C'est l'objet des lemmes II.9 et II.10 ci-dessous.

**Lemme II.9 (Convergence faible du gradient discret)**

Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . On suppose que  $h^{(m)} = h_{\mathcal{M}^{(m)}} \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . On se donne une suite  $(\mathbf{v}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{v}^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$ . On suppose qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\|\mathbf{v}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$  et que  $\mathbf{v}^{(m)} \rightharpoonup \mathbf{v}$  faiblement

dans  $L^2(\Omega)^d$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Alors  $\nabla \mathbf{v}$  (au sens des distributions) est dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  et quitte à extraire une sous-suite, on a  $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} \rightharpoonup \nabla \mathbf{v}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration :** Soit  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)^{d \times d}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} : \phi &= \sum_{K \in \mathcal{M}^{(m)}} \int_K \nabla \mathbf{v}^{(m)} : \phi \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}^{(m)}} \left( - \int_K \mathbf{v}^{(m)} \cdot \operatorname{div} \phi + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} \mathbf{v}^{(m)} \cdot (\phi \cdot \mathbf{n}) \right) \quad (\text{II.32}) \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{v}^{(m)} \cdot \operatorname{div} \phi + R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi) \end{aligned}$$

avec

$$R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} [\mathbf{v}^{(m)}]_{\sigma} \cdot \phi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} [\mathbf{v}^{(m)}]_{\sigma} \cdot (\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma},$$

car l'intégrale du saut de  $\mathbf{v}^{(m)}$  à travers une face  $\sigma$  est nulle. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit que

$$|R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi)| \leq \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \frac{1}{h_{\sigma}} \int_{\sigma} |[\mathbf{v}^{(m)}]_{\sigma}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} h_{\sigma} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant l'inégalité (II.27) on obtient :

$$\begin{aligned} |R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi)| &\leq C(d, \theta_0) \|\mathbf{v}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}^{(m)}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} h_{\sigma} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C C'(d, \theta_0) \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} h_{\sigma} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comme  $\phi$  est régulière, on a  $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})| \leq h^{(m)} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$  par le théorème des accroissements finis. On en déduit que :

$$|R(\mathbf{v}^{(m)}, \phi)| \leq h^{(m)} C C'(d, \theta_0) |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

En faisant tendre  $m$  vers  $+\infty$  dans (II.32), on obtient, comme  $\mathbf{v}^{(m)} \rightharpoonup \mathbf{v}$  faiblement dans  $L^2(\Omega)^d$  que :

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} : \phi \rightarrow - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \phi, \quad \text{quand } m \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,  $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} \rightharpoonup \nabla \mathbf{v}$  au sens des distributions. Comme par ailleurs  $\|\mathbf{v}^{(m)}\|_{1,2,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ , la suite de fonctions  $(\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$ . Elle admet donc une sous-suite qui converge faiblement dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$ , mais aussi dans  $\mathcal{D}'(\Omega)^{d \times d}$ , vers une fonction  $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^{d \times d}$ . On en déduit que  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{w}$  donc  $\nabla \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^{d \times d}$ . ■

**Lemme II.10**

Soit  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^d$ . Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . On suppose que  $h^{(m)} = h_{\mathcal{M}^{(m)}} \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathbf{v}^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}^{(m)},0}$  en posant  $\mathbf{v}^{(m)} = I_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}$ . Alors :

- $\mathbf{v}^{(m)} \rightarrow \mathbf{v}$  fortement dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ ,
- $\operatorname{div}_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}$  fortement dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ ,
- $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} \rightarrow \nabla \mathbf{v}$  fortement dans  $L^2(\Omega)^{d \times d}$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration :** Ce résultat est une conséquence directe des propriétés d'approximation de l'opérateur  $I_{\mathcal{M}}$  rappelées dans lemme II.11 ci-dessous et qui sont établies au chapitre III (voir aussi [5]). On démontre le premier point :

$$\|\mathbf{v}^{(m)} - \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{M}^{(m)}} \|\mathbf{v} - I_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}\|_{L^2(K)}^2 \leq (h^{(m)})^2 C(\theta_0) |\mathbf{v}|_{H^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

Pour la convergence du gradient discret, on écrit :

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}^{(m)} - \nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^{d \times d}}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{M}^{(m)}} \|\nabla \mathbf{v} - \nabla I_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{v}\|_{L^2(K)^{d \times d}}^2 \\ &\leq h^{(m)} C(\theta_0) |\mathbf{v}|_{H^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

La convergence de la divergence discrète résulte de celle du gradient discret. ■

**Lemme II.11 (Propriétés de l'opérateur  $I_{\mathcal{M}}$ )**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$  avec  $\theta_0 > 0$ . L'opérateur  $I_{\mathcal{M}}$  satisfait les propriétés suivantes : il existe  $C(\theta_0)$  telles que :

- Stabilité : pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  :

$$\|I_{\mathcal{M}} \mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}} \leq C(\theta_0) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}.$$

- Propriétés d'approximation : pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  :

$$\|\mathbf{v} - I_{\mathcal{M}} \mathbf{v}\|_{L^2(K)} + h_K \|\nabla(\mathbf{v} - I_{\mathcal{M}} \mathbf{v})\|_{L^2(K)^{d \times d}} \leq C(\theta_0) h_K^2 |\mathbf{v}|_{H^2(K)}, \quad \forall K \in \mathcal{M}.$$

**II.6.4 Fin de la preuve du Théorème II.4**

On a donc démontré, par des extractions de sous-suites successives qu'il existe une sous-suite de  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , encore notée  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  telle que, lorsque  $m \rightarrow +\infty$ ,  $\mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \mathbf{u}$  fortement dans  $L^2(\Omega)^d$  et  $p^{(m)} \rightharpoonup p$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  avec  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$  une solution faible du problème de Stokes instationnaire (II.5). Or, on sait que la solution faible

du problème de Stokes instationnaire est unique (c.f. Théorème II.1). C'est donc toute la suite  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $(\mathbf{u}, p)$ . Ceci est une conséquence du résultat suivant :

**Proposition II.12**

Soit  $X$  un espace topologique séparé. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $X$  et  $u \in X$ . Alors  $u_n$  converge vers  $u$  si, et seulement si de toute sous-suite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire une sous-sous-suite qui converge vers  $u$ .

En effet, on a démontré que de toute sous-suite de  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire une sous-sous-suite qui converge vers un couple  $(\mathbf{v}, q)$  solution du problème de Stokes instationnaire. Or cette solution étant unique, on a  $(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{u}, p)$ . Donc de toute sous-suite de  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , on peut extraire une sous-sous-suite qui converge vers  $(\mathbf{u}, p)$ . Donc toute la suite  $(\mathbf{u}^{(m)}, p^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(\mathbf{u}, p)$ .

## II.7 Écriture locale du schéma numérique

Il est possible d'écrire une version "locale" du schéma numérique, qui rappelle la forme forte du problème de Stokes stationnaire (II.1). Pour cela, on va introduire un deuxième maillage, appelé maillage dual du maillage  $\mathcal{M}$ , dont les mailles sont associées aux faces  $\sigma \in \mathcal{E}$  du maillage  $\mathcal{M}$ .

**Définition II.7 (Maillage dual)**

Soit  $\mathcal{M}$  une triangulation comme introduite à la Définition II.1 et soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des faces des mailles de  $\mathcal{M}$ . On définit un "maillage dual" associé aux faces  $\sigma \in \mathcal{E}$  comme suit. Pour  $K \in \mathcal{M}$  et  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ , on commence par définir  $D_{K,\sigma}$  comme le cône de base  $\sigma$  et de sommet le centre de gravité de  $K$  (voir Figure II.2). On obtient alors une partition de  $K$  en  $d + 1$  sous-volumes de même mesure  $|D_{K,\sigma}| = |K|/(d + 1)$ . Le volume  $D_{K,\sigma}$  est appelé la demi-maille duale associée à  $K$  et  $\sigma$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ ,  $\sigma = K|L$ , on définit la maille duale  $D_\sigma$  associée à  $\sigma$  en posant  $D_\sigma = D_{K,\sigma} \cup D_{L,\sigma}$  et pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}(K)$ , on définit  $D_\sigma$  par  $D_\sigma = D_{K,\sigma}$ . L'ensemble  $\cup_{\sigma \in \mathcal{E}} D_\sigma$  est alors un autre maillage de  $\Omega$  appelé "maillage dual" et est associé à l'ensemble  $\mathcal{E}$ . On note  $\bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)$  l'ensemble des faces de  $D_\sigma$ , et  $\varepsilon = D_\sigma|D_{\sigma'}$  la face séparant les deux mailles duales  $D_\sigma$  et  $D_{\sigma'}$ . Comme pour le maillage primal, on note  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{int}}$  l'ensemble des faces duales incluses dans le domaine  $\Omega$  et  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{ext}}$  l'ensemble des faces duales situées sur le bord  $\partial\Omega$ . Dans ce dernier cas, il existe alors  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$  tel que  $\varepsilon = \sigma$ .

Rappelons l'écriture du schéma numérique.

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \times L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  tels que :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega), \\ \forall q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega). \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(II.33a)} \\ \text{(II.33b)} \end{array}$$

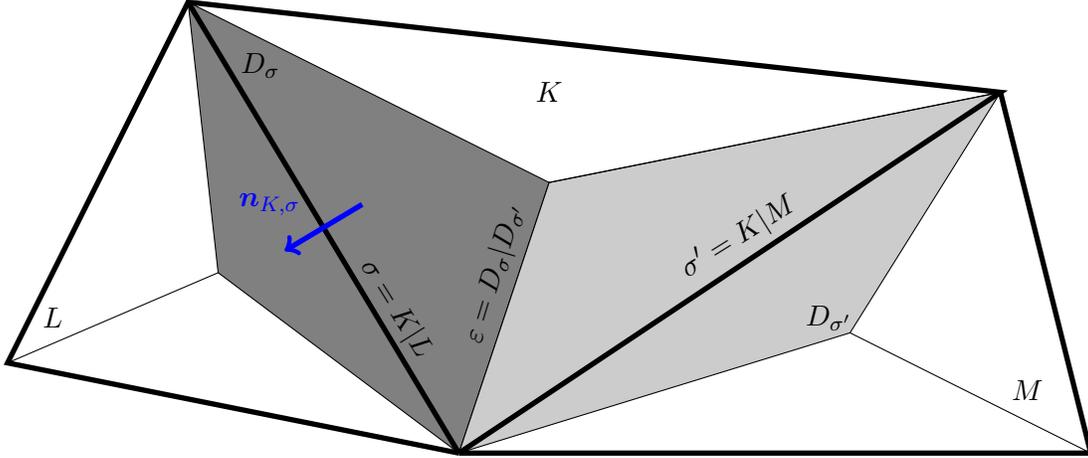


FIGURE II.2 – Notations pour les mailles primales et duales.

Soit  $K \in \mathcal{M}$ . En prenant  $q = \mathbb{1}_K$  comme fonction test dans (II.33b), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = \int_K \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} \left( \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{u}_{\sigma'} \zeta_{\sigma'} \right) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad (\text{II.34}) \end{aligned}$$

car les fonctions de forme satisfont  $\int_{\sigma} \zeta_{\sigma'} = |\sigma| \delta_{\sigma}^{\sigma'}$ .

Soit maintenant  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ . En prenant  $\mathbf{v} = \zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)}$  comme fonction test dans (II.33a), où  $\mathbf{e}^{(i)}$  est le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} (\zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} (\zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)}) = 0. \quad (\text{II.35})$$

La pression discrète  $p$  est constante sur chaque maille  $K$  donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p \operatorname{div}_{\mathcal{M}} (\zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)}) &= \sum_{K \in \mathcal{M}} p_K \int_K \operatorname{div} (\zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} p_K \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma'} (\zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)}) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma'} \\ &= p_K |\sigma| (\mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}) + p_L |\sigma| (\mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{L,\sigma}) = -|\sigma| (p_L - p_K) (\mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}). \end{aligned}$$

On remarque que le vecteur de  $\mathbb{R}^d$  dont les composantes sont  $\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} : \nabla_{\mathcal{M}} (\zeta_{\sigma} \mathbf{e}^{(i)})$  pour  $i = 1, \dots, d$  s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathcal{M}} \zeta_{\sigma}.$$

On déduit de ces calculs une forme locale du schéma numérique (II.33). Définissons les opérateurs différentiels locaux discrets suivants :

$$(\Delta \mathbf{u})_\sigma = -\frac{1}{|D_\sigma|} \int_\Omega \nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathcal{M}} \zeta_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}},$$

$$(\nabla p)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L,$$

$$(\text{div } \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall K \in \mathcal{M},$$

$$\mathbf{f}_\sigma = \frac{1}{|D_\sigma|} \int_\Omega \mathbf{f} \zeta_\sigma, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

En rassemblant les égalités (II.34) pour tout  $K \in \mathcal{M}$  et (II.35) pour tout  $\zeta \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , on voit que le schéma numérique (II.33) peut s'écrire :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \times L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  tels que :

$$\left| \begin{array}{ll} -(\Delta \mathbf{u})_\sigma + (\nabla p)_\sigma = \mathbf{f}_\sigma, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \quad (\text{II.36a}) \\ (\text{div } \mathbf{u})_K = 0, & \forall K \in \mathcal{M}. \quad (\text{II.36b}) \end{array} \right.$$

On peut vérifier que cette écriture locale est en effet équivalente à (II.33). Pour tout  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ , en prenant le produit scalaire de (II.36a) par  $|D_\sigma| \mathbf{v}_\sigma$  (où  $\mathbf{v}_\sigma = F_\sigma(\mathbf{v}) = |\sigma|^{-1} \int_\sigma \mathbf{v}$ ) et en sommant sur  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , on retrouve (II.33a). De même, pour tout  $q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ , en multipliant (II.36b) par  $|K| q_K$  (où  $q_K = q|_K$ ) et en sommant sur  $K \in \mathcal{M}$ , on retrouve aussi (II.33b).

Cette écriture locale sera utile pour écrire un schéma numérique pour les équations de Navier-Stokes compressibles. Ce schéma sera un schéma hybride : *volumes-finis* pour la convection et *éléments finis* pour la diffusion.

## II.8 Exercices

### Exercice II.1

Admitting the following result, prove the inf-sup condition of Proposition II.2 :

Let  $\Omega$  be a bounded Lipschitz domain of  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Then, there exists a linear operator  $\mathcal{B} : L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  (called the Bogovskii operator) depending only on  $\Omega$  with the following properties :

(i) For all  $p \in L_0^2(\Omega)$ ,

$$\operatorname{div}(\mathcal{B}p) = p, \text{ a.e. in } \Omega.$$

(ii)  $\mathcal{B}$  is continuous : there exists  $C = C(\Omega)$ , such that for any  $p \in L_0^2(\Omega)$  :

$$\|\mathcal{B}p\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

### Exercice II.2

Let  $\Omega$  be a smooth open bounded subset of  $\mathbb{R}^d$  and  $T > 0$ . Let  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$  and  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times (0, T))^d$  and consider a solution  $\mathbf{u}$  of the non stationary incompressible Stokes equations :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} &= 0, & \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(\cdot, t = 0) &= \mathbf{u}_0, & \Omega. \end{aligned}$$

Prove that if  $\mathbf{u}$  is smooth then it satisfies the following a priori estimate :

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \int_0^T \|\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 ds \leq C \left( \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^d}^2 \right)$$

for some constant  $C$  depending only on  $\Omega$ .

### Exercice II.3

Prove that  $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\|_{1, 2, \mathcal{M}}$  defines a semi-norm on  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  and a norm on  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}, 0}(\Omega)$ .

### Exercice II.4

Prove Lemma II.8.

### Exercice II.5

Prove Proposition II.12 (say in a normed vector space).



# Chapitre III

## Analyse fonctionnelle discrète

L'objectif de ce chapitre est d'étendre aux espaces de fonctions régulières par morceaux issus de l'approximation par les éléments finis de Crouzeix-Raviart [5], des résultats classiques d'analyse fonctionnelle vérifiés par les espaces de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  pour  $1 \leq p < +\infty$ . On démontre en particulier un analogue discret de la propriété *inf-sup* qui justifie l'utilisation de ce type de discrétisation pour les modèles d'écoulements incompressibles. Nous démontrons également des analogues discrets des injections continues des espaces de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  dans des espaces  $L^q(\Omega)$  pour des  $q > p$  bien choisis, ainsi que des résultats de compacité, qui sont le pendant discret du théorème d'injections compactes de Rellich. Ces résultats s'étendent naturellement à une approximation par les éléments finis de Rannacher-Turek [20] qui ont les mêmes degrés de liberté que les éléments finis de Crouzeix-Raviart. Les démonstrations s'inspirent très largement de travaux de R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, et de leurs collaborateurs. Nous renvoyons notamment au livre [8] et à l'annexe de l'article [9], où des résultats similaires sont démontrés pour des approximations par volumes finis.

### III.1 Maillage et fonctions discrètes

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , polygonal si  $d = 2$ , et polyédrique si  $d = 3$ . On définit un maillage triangulaire de  $\Omega$  comme suit

**Définition III.1 (Maillage triangulaire (voir Figure III.1))**

Un maillage triangulaire de  $\Omega$  (ou triangulation) est une partition  $\mathcal{M}$  de  $\Omega$  en un nombre fini de simplexes  $K$  (triangles si  $d = 2$  et tétraèdres si  $d = 3$ ) tels que  $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \overline{K}$ . On suppose que le maillage est conforme i.e. que "toute face  $\sigma$  d'un élément  $K \in \mathcal{M}$  est soit contenue dans la frontière  $\partial\Omega$ , soit égale à une face d'un autre élément  $L$ ", et on note alors  $\sigma = K|L$ . Pour chaque  $K \in \mathcal{M}$ , on note  $\mathcal{E}(K)$  l'ensemble des  $(d + 1)$  faces de  $K$ , et par  $\mathcal{E}$  l'ensemble des faces du maillage. On note  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  resp.  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  l'ensemble des faces externes resp. internes :  $\mathcal{E}_{\text{ext}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial\Omega\}$  et  $\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{ext}}$ . Pour  $K \in \mathcal{M}$  et  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ ,  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\sigma$  et sortant de la maille  $K$ . On note  $|K|$  la mesure  $d$ -dimensionnelle de  $K$  et  $|\sigma|$  la mesure  $(d - 1)$ -dimensionnelle d'une face  $\sigma$ .

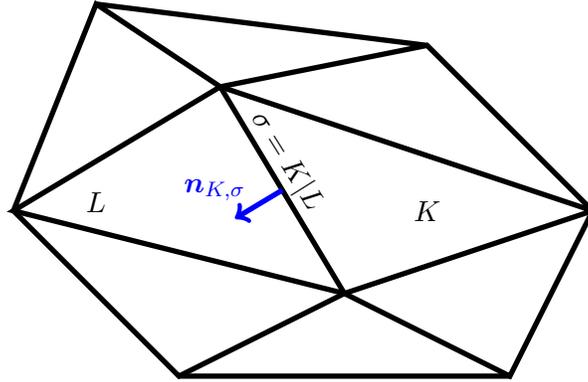


FIGURE III.1 – Notations pour un maillage triangulaire.

**Définition III.2 (Pas du maillage)**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage, pour chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ , on définit  $h_K$  le diamètre de  $K$  (mesure du plus grand segment inclus dans  $K$ ). Le pas du maillage est défini par :

$$h_{\mathcal{M}} = \max_{K \in \mathcal{M}} h_K.$$

**Définition III.3 (Régularité du maillage)**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage, pour chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ , on définit  $\varrho_K$  le rayon de la plus grande boule inscrite dans  $K$ . Le paramètre de régularité d'un maillage  $\mathcal{M}$  donné est défini par

$$\theta_{\mathcal{M}} = \max_{K \in \mathcal{M}} \frac{h_K}{\varrho_K}. \quad (\text{III.1})$$

**Définition III.4**

On note  $L_{\mathcal{M}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions scalaires constantes sur chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ . Pour tout  $q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $K \in \mathcal{M}$ , on note  $q_K$  la valeur constante de  $q$  sur  $K$ . On note  $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  l'espace des fonctions constantes sur chaque maille  $K \in \mathcal{M}$  et de moyenne nulle sur  $\Omega$  :

$$L_{\mathcal{M},0}(\Omega) = \left\{ q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \mid \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| q_K = 0 \right\}.$$

L'espace  $L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  est un espace d'approximation pour les fonctions de  $L^2(\Omega)$ . On approche les fonctions de  $H^1(\Omega)$  grâce à l'élément fini de *Crouzeix-Raviart*. Notons  $\Pi_1$  l'espace des

polynômes affines dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$\Pi_1 = \text{span}\{1, x_i, i = 1, \dots, d\}.$$

Les degrés de liberté sont associés aux faces  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$  par les formes linéaires :

$$\left\{ F_\sigma, \sigma \in \mathcal{E} \right\} \quad \text{avec} \quad F_\sigma(u) = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u.$$

**Définition III.5 (Espace de fonctions discrètes)**

- On définit l'espace de fonctions  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  associé à l'élément fini de Crouzeix-Raviart :

$$\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid u|_K \in \Pi_1, \forall K \in \mathcal{M}; \right.$$

avec  $F_\sigma(u)$  continue à travers chaque face  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  }.

- On définit  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \subset \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  l'espace des fonctions discrètes dont les degrés de liberté associés aux faces de bord sont nuls :

$$\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) = \left\{ u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega) \mid F_\sigma(u) = 0 \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \right\}.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, nous noterons  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega) := \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)^d$  et  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) := \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)^d$ .

**Définition III.6 (Fonctions de forme)**

On appelle fonctions de forme les fonctions  $\zeta_\sigma \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}$ , telles que pour tous  $\sigma, \sigma' \in \mathcal{E}$ ,  $F_{\sigma'}(\zeta_\sigma) = \delta_{\sigma\sigma'}$  où  $\delta_{\sigma\sigma'} = 1$  si  $\sigma = \sigma'$  et  $\delta_{\sigma\sigma'} = 0$  sinon. On a alors, pour tout  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  :

$$u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_\sigma \zeta_\sigma, \quad \text{où} \quad u_\sigma = F_\sigma(u) = \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma u, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}.$$

On a  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  si, et seulement si  $u_\sigma = 0$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ .

Notons qu'une fonction de forme  $\zeta_\sigma \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  a son support inclus dans les mailles adjacentes à  $\sigma$ .

Les fonctions de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  présentent des sauts au niveau des faces du maillage. Ainsi, leurs gradients au sens des distributions contiennent des mesures supportées par les faces  $\sigma$  du maillage. Il est donc clair que pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega) \not\subset W^{1,p}(\Omega)$ . On peut cependant définir pour les fonctions de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  un équivalent discret des semi-normes normes  $W^{1,p}$ .

**Définition III.7 (Opérateurs discrets et semi-norme  $W^{1,q}$  discrète)**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$ . On définit des opérateurs gradients et divergence discrets pour les fonctions discrètes régulières par morceaux  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  :

$$\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_K(\mathbf{x}), \quad (\text{III.2})$$

$$\text{div}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_K(\mathbf{x}). \quad (\text{III.3})$$

Pour une fonction scalaire  $u \in H_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et pour tout  $1 \leq q < +\infty$ , on définit  $\|u\|_{1,q,\mathcal{M}}$  la semi-norme  $W^{1,q}$  discrète de  $u$  par :

$$\|u\|_{1,q,\mathcal{M}} := \left( \int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{M}} u|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{III.4})$$

Pour une fonction à valeurs vectorielles  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et pour tout  $1 \leq q < +\infty$ , on définit  $\|\mathbf{u}\|_{1,q,\mathcal{M}}$  la semi-norme  $W^{1,q}$  discrète de  $\mathbf{u}$  par :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,q,\mathcal{M}} := \left( \int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{M}} \mathbf{u}|^q \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{III.5})$$

Il est assez facile de vérifier que sur  $H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ , la semi-norme  $\|\cdot\|_{1,p,\mathcal{M}}$  est en fait une norme, c'est notamment une conséquence de l'inégalité de Poincaré discrète (voir la Proposition III.8).

## III.2 Quelques propriétés des éléments finis de Crouzeix-Raviart

On définit  $I_{\mathcal{M}}$  l'opérateur d'"interpolation" suivant de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  :

$$I_{\mathcal{M}} : \begin{cases} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ u & \longmapsto & I_{\mathcal{M}} u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \left( \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} u \right) \zeta_{\sigma}. \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

Naturellement, pour  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  ( $= H_0^1(\Omega)^d$ ), on définit  $I_{\mathcal{M}} \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  par

$$I_{\mathcal{M}} \mathbf{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \left( \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \mathbf{u} \right) \zeta_{\sigma}.$$

**Lemme III.1 (Propriétés de l'opérateur  $I_{\mathcal{M}}$ )**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_{\mathcal{M}}$  définie en (III.1). L'opérateur  $I_{\mathcal{M}}$  satisfait les propriétés suivantes : il existe  $C(\theta_0)$  telles que :

(i) Stabilité : pour tout  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  :

$$\|I_{\mathcal{M}}u\|_{1,2,\mathcal{M}} \leq C(\theta_0) \|u\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}.$$

(ii) Propriétés d'approximation : pour tout  $u \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  :

$$\|u - I_{\mathcal{M}}u\|_{L^2(K)} + h_K \|\nabla(u - I_{\mathcal{M}}u)\|_{L^2(K)^d} \leq C(\theta_0) h_K^2 |u|_{\mathbf{H}^2(K)}, \quad \forall K \in \mathcal{M}.$$

(iii) Préservation de la divergence : Pour tout  $q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(I_{\mathcal{M}}\mathbf{u}) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}$$

### Remarque III.1

Un opérateur qui vérifie les propriétés (i) et (iii) du lemme ci-dessus est appelé “opérateur de Fortin”.

**Démonstration :** La preuve des deux premiers points, que l’on peut trouver dans [5], utilise des arguments classiques (transport des inégalités vers l’élément de référence, lemme de Bramble-Hilbert...). Nous démontrons le troisième point. Soit  $q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ . Notons  $q_K$  la valeur constante de  $q$  sur la maille  $K$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(I_{\mathcal{M}}\mathbf{u}) &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K q \operatorname{div}(I_{\mathcal{M}}\mathbf{u}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \int_K \operatorname{div}(I_{\mathcal{M}}\mathbf{u}) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} I_{\mathcal{M}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}} \left( \frac{1}{|\sigma'|} \int_{\sigma'} \mathbf{u} \right) \zeta_{\sigma'} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}. \end{aligned}$$

Or on sait que  $\int_{\sigma} \zeta_{\sigma'} = |\sigma| \delta_{\sigma}^{\sigma'}$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \operatorname{div}_{\mathcal{M}}(I_{\mathcal{M}}\mathbf{u}) &= \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \int_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \int_K \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A présent, démontrons un résultat qui nous sera utile par la suite.

### Lemme III.2

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_{\mathcal{M}}$  définie en (III.1). Pour toute fonction  $v$  définie sur  $\Omega$  et tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , avec  $\sigma = K|L$ , on note  $[v]_{\sigma}$  le saut de  $v$  à travers  $\sigma$  (i.e.  $|[v]_{\sigma}(\mathbf{x})| = |v|_K(\mathbf{x}) - v|_L(\mathbf{x})|$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$ ), et pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$ ,  $\sigma \in K$ , on note

$[v]_\sigma(\mathbf{x}) = v|_K(\mathbf{x})$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$ . Enfin, on note  $h_\sigma$  le diamètre de  $\sigma$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ . Alors :

- Pour tout  $1 \leq p < \infty$ , il existe une constante  $C(p, d, \theta_0)$  telle que :

$$\left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |[v]_\sigma|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, d, \theta_0) \|v\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega). \quad (\text{III.7})$$

- Pour tout  $1 < p < \infty$ , il existe une constante  $C(p, d, \theta_0)$  telle que pour tout  $\alpha > 1$  :

$$\left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_\sigma |[v]_\sigma^\alpha| \right) \leq \alpha C(p, d, \theta_0) \|v\|_{\mathbf{L}^{p'(\alpha-1)}(\Omega)}^{\alpha-1} \|v\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall v \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega), \quad (\text{III.8})$$

où  $1 < p' < \infty$  est donné par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Démonstration :** On commence par démontrer (III.7). Comme pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , l'intégrale du saut d'une fonction  $v \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  à travers une face  $\sigma$  est nulle, par le théorème de la moyenne, il existe  $\mathbf{x}_\sigma \in \sigma$  tel que  $[v]_\sigma(\mathbf{x}_\sigma) = 0$  (pour l'élément de Crouzeix-Raviart,  $\mathbf{x}_\sigma$  est le centre de  $\sigma$ ). On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |[v]_\sigma|^p &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |[v]_\sigma - [v]_\sigma(\mathbf{x}_\sigma)|^p = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |[v - v(\mathbf{x}_\sigma)]_\sigma|^p \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = K|L}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma \left| \int_0^1 \left( \nabla v|_K(\mathbf{x}_\sigma + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma)) - \nabla v|_L(\mathbf{x}_\sigma + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma)) \right) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma) ds \right|^p d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \\ \sigma \in \mathcal{E}(K)}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma \left| \int_0^1 \nabla v|_K(\mathbf{x}_\sigma + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma) ds \right|^p d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on note  $\nabla v(\mathbf{x}, s)$  au lieu de  $\nabla v(\mathbf{x}_\sigma + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma))$  pour alléger la notation. L'inégalité de Hölder ainsi que l'inégalité  $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$  pour  $a, b \geq 0$  donnent :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |[v]_\sigma|^p &\leq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = K|L}} \frac{2^p}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma|^p \int_0^1 \left( |\nabla v|_K(\mathbf{x}, s)|^p + |\nabla v|_L(\mathbf{x}, s)|^p \right) ds d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \\ \sigma \in \mathcal{E}(K)}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma|^p \int_0^1 |\nabla v|_K(\mathbf{x}, s)|^p ds d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Comme  $h_\sigma$  est le diamètre de  $\sigma$ , on a  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\sigma| \leq h_\sigma$  pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$ . En intervertissant les intégrations par le théorème de Fubini, on obtient que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_\sigma^{p-1}} \int_\sigma |[v]_\sigma|^p \leq C(p) \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} h_\sigma \int_\sigma |\nabla v|_K|^p. \quad (\text{III.9})$$

Soit  $\hat{K}$  l'élément de référence qui est le  $d$ -simplexe dont les sommets sont l'origine  $\hat{a}_0 = (0, \dots, 0)$  et les points  $\hat{a}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la  $i$ -ème qui vaut 1,

### III.2. Quelques propriétés des éléments finis de Crouzeix-Raviart

pour  $i = 1, \dots, d$ . Pour  $K \in \mathcal{M}$ , soit  $\mathcal{A}_K$  l'application affine qui envoie les sommets de  $\hat{K}$  sur ceux de  $K$ . On note  $\hat{v}$  la fonction définie pour  $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$  par  $\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = v(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{x} = \mathcal{A}_K(\hat{\mathbf{x}})$ . Comme  $v|_K \in \Pi_1$  et que  $\mathcal{A}_K$  est affine, on a  $\hat{v} \in \Pi_1$ , espace qui est de dimension finie. De même,  $\nabla \hat{v}$  appartient à un espace vectoriel de dimension finie. Par équivalence des normes sur un espace de dimension finie, il existe une constante  $C(d)$  telle que pour toute fonction  $\hat{w} \in \Pi_1$  :

$$\sum_{\hat{\sigma} \in \mathcal{E}(\hat{K})} \int_{\hat{\sigma}} |\nabla \hat{w}|^p \leq C(d) \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{w}|^p.$$

En notant  $\mathcal{B}_K = \text{Jac}(\mathcal{A}_K(\hat{\mathbf{x}}))$ , qui ne dépend pas de  $\hat{\mathbf{x}}$  car  $\mathcal{A}_K$  est affine, le changement de variable  $\mathbf{x} = \mathcal{A}_K(\hat{\mathbf{x}})$  montre que :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} |\nabla v(\mathbf{x})|^p d_{\sigma}(\mathbf{x}) &\leq \|\mathcal{B}_K^{-1}\|^p \frac{|\sigma|}{|\hat{\sigma}|} \int_{\hat{\sigma}} |\nabla \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})|^p d_{\hat{\sigma}}(\hat{\mathbf{x}}) \\ \int_{\hat{K}} |\nabla \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})|^p d_{\hat{K}} &\leq \|\mathcal{B}_K\|^p \frac{|\hat{K}|}{|K|} \int_K |\nabla v(\mathbf{x})|^p d_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

avec  $\|\mathcal{B}_K\| \leq h_K/\hat{\rho}$  et  $\|\mathcal{B}_K^{-1}\| \leq \hat{h}/\rho_K$ . Par définition du paramètre de régularité du maillage, il existe  $C(\theta_0)$  tel que  $h_{\sigma} \frac{|\sigma|}{|K|} \leq C(\theta_0)$ . Comme les quantités  $\hat{h}$ ,  $\hat{\rho}$ ,  $|\hat{\sigma}|$  et  $|\hat{K}|$  ne dépendent que de  $d$ , on en déduit qu'il existe  $C(p, d, \theta_0)$  telle que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} h_{\sigma} \int_{\sigma} |\nabla v|_K|^p \leq C(p, d, \theta_0) \int_K |\nabla v|_K|^p,$$

ce qui, combiné avec (III.9), termine la preuve de (III.7).

A présent, démontrons (III.8). Comme  $[v]_{\sigma}(\mathbf{x}_{\sigma}) = 0$ , on a  $[[v]^{\alpha}]_{\sigma}(\mathbf{x}_{\sigma}) = 0$ . De plus, comme  $\alpha > 1$ ,  $|v|^{\alpha}$  est régulière là où  $v$  est régulière et on a en particulier que  $\nabla |v|^{\alpha} = \alpha \text{sgn}(v)|v|^{\alpha-1} \nabla v$ . En reprenant les mêmes étapes que pour la preuve de (III.7), on trouve que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\sigma} |[v]^{\alpha}]_{\sigma}| \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} h_{\sigma} \int_{\sigma} |\nabla |v|^{\alpha}_K| \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} h_{\sigma} \alpha \int_{\sigma} |v|_K|^{\alpha-1} |\nabla v|_K|.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder dans l'intégrale sur  $\sigma$ , on obtient :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\sigma} |[v]^{\alpha}]_{\sigma}| \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} h_{\sigma} \alpha \|v\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\sigma)}^{\alpha-1} \|\nabla v\|_{L^p(\sigma)}.$$

On montre, toujours en utilisant le changement de variable  $\mathbf{x} = \mathcal{A}_K(\hat{\mathbf{x}})$  que pour tout  $1 \leq q < \infty$  :

$$\left| \begin{array}{l} \|v\|_{L^q(\sigma)} \leq \left(\frac{|\sigma|}{|\hat{\sigma}|}\right)^{\frac{1}{q}} \|\hat{v}\|_{L^q(\hat{\sigma})}, \\ \|\hat{v}\|_{L^q(\hat{K})} \leq \left(\frac{|\hat{K}|}{|K|}\right)^{\frac{1}{q}} \|v\|_{L^q(K)}, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \|\nabla v\|_{L^q(\sigma)} \leq \|\mathcal{B}_K^{-1}\| \left(\frac{|\sigma|}{|\hat{\sigma}|}\right)^{\frac{1}{q}} \|\nabla \hat{v}\|_{L^q(\hat{\sigma})}, \\ \|\nabla \hat{v}\|_{L^q(\hat{K})} \leq \|\mathcal{B}_K\| \left(\frac{|\hat{K}|}{|K|}\right)^{\frac{1}{q}} \|\nabla v\|_{L^q(K)}. \end{array} \right.$$

On en déduit, en utilisant un argument de dimensionnalité finie et le fait que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  :

$$h_{\sigma} \alpha \|v\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\sigma)}^{\alpha-1} \|\nabla v\|_{L^p(\sigma)} \leq \alpha \frac{|\hat{K}|}{|\hat{\sigma}|} h_{\sigma} \frac{|\sigma|}{|K|} \|v\|_{L^{p'(\alpha-1)}(K)}^{\alpha-1} \|\nabla v\|_{L^p(K)}.$$

Les quantités  $|\hat{K}|$  et  $|\hat{\sigma}|$  ne dépendent que de  $d$  et par définition du paramètre de régularité du maillage, il existe  $C(\theta_0)$  tel que  $h_\sigma \frac{|\sigma|}{|K|} \leq C(\theta_0)$  ce qui conclut la preuve de (III.8). ■

### III.3 Condition *inf-sup* discrète

Nous démontrons ici la propriété qui justifie l'utilisation des éléments finis de Crouzeix-Raviart - et donc d'une discrétisation sur grilles décalées où les inconnues de pression et de vitesse ne sont pas discrétisées aux mêmes endroits - pour l'approximation numérique des modèles d'écoulements incompressibles.

Rappelons la propriété dite *inf-sup*, vérifiée au niveau continu par les espaces  $L_0^2(\Omega)$  et  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .

#### Proposition III.3 (*Condition inf-sup ou LBB*)

Il existe une constante  $C_{\text{LBB}} > 0$ , ne dépendant que de l'ouvert  $\Omega$  telle que :

$$\inf_{\substack{q \in L_0^2(\Omega) \\ q \neq 0}} \left( \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}} \right) \geq C_{\text{LBB}}. \quad (\text{III.10})$$

Il s'agit de démontrer une propriété du même type vérifiée par le couple d'espaces de fonctions discrètes  $(L_{\mathcal{M},0}(\Omega), \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega))$  où  $L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  est muni de la norme  $L^2$ , et où  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  est muni de la norme  $W^{1,2}$  discrète.

#### Proposition III.4 (*Condition inf-sup discrète*)

Soit  $C(\Omega, \theta_0) = C_{\text{LBB}}/C(\theta_0)$  où  $C(\theta_0)$  est la constante de stabilité du Lemme III.1. Alors :

$$\inf_{\substack{q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ q \neq 0}} \left( \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{v}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{1,2, \mathcal{M}}} \right) \geq C(\Omega, \theta_0). \quad (\text{III.11})$$

**Démonstration :** Soit  $q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  telle que  $q \neq 0$ . On a :

$$\begin{aligned}
 \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega) \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\{ \frac{\sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K q \operatorname{div} \mathbf{v}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}}} \right\} &\geq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\{ \frac{\sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K q \operatorname{div}(I_{\mathcal{M}}\mathbf{v})}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|I_{\mathcal{M}}\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}}} \right\} \\
 &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|I_{\mathcal{M}}\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}}} \right\} \\
 &= \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1} \|I_{\mathcal{M}}\mathbf{v}\|_{1,2,\mathcal{M}}} \right\} \\
 &\geq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^d \\ \mathbf{v} \neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_0^1}} \right\} \frac{1}{C(\theta_0)} \geq \frac{C_{\text{LBB}}}{C(\theta_0)}.
 \end{aligned}$$

On obtient le résultat en passant à l'inf sur  $q \in L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  dans cette inégalité. ■

### III.4 Injections de Sobolev discrètes

Rappelons le fameux résultat d'injection continu pour les espaces de Sobolev dont une démonstration peut être trouvée dans [4].

#### ***Théorème III.5 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)***

Soit  $1 \leq p < d$ . Alors il existe une constante  $C(p, d)$  telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(p, d) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d), \quad (\text{III.12})$$

où  $p^* = \frac{dp}{d-p}$ . En particulier, on a  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$  avec injection continue.

Ainsi, une fonction  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$  est aussi dans  $L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$  dès lors que son gradient au sens des distributions est aussi dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Autrement dit, comme  $p^* > p$ , une fonction de  $L^p(\mathbb{R}^d)$  est un peu plus intégrable qu'attendu, pourvu que son gradient au sens des distributions est aussi dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ .

Nous cherchons à démontrer un équivalent discret de l'inégalité (III.12) pour les fonctions de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  avec  $\|u\|_{1,p,\mathcal{M}}$  au lieu de  $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ . Commençons par le cas  $p = 1$ . L'inégalité (III.12) s'écrit :

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \leq C(d) \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d). \quad (\text{III.13})$$

Telle quelle, l'inégalité (III.13) n'a pas de sens pour  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  car les gradients (au sens des distributions) des fonctions de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  ne sont pas dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$  puisque ces fonctions sont discontinues à travers les faces du maillage. Mais heureusement, l'inégalité (III.13) s'étend à un espace plus large que  $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  qui lui contient l'espace  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ . Il s'agit d'un espace dans lequel les gradients sont contrôlés dans un sens plus faible que  $L^1$ . Pour une fonction  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , on note :

$$\|u\|_{\text{BV}} := \sup \left\{ \langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}, \text{ avec } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d \text{ t.q. } \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq 1 \right\}.$$

Rappelons que par définition, pour  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , on a  $\langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi$ . On dit qu'une fonction  $u$  appartient à l'espace  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$  des fonctions à variations bornées si  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\|u\|_{\text{BV}} < \infty$ .

### Remarque III.2

L'espace  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$  est l'espace des fonctions  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$  dont le gradient au sens des distributions est une mesure finie. En effet, pour  $u \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$ , l'application  $\phi \mapsto \langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$  satisfait :  $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ ,  $|\langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}| \leq \|u\|_{\text{BV}} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ . Elle peut être étendue en une forme linéaire continue sur  $C^0(\mathbb{R}^d)$  par le théorème de Hahn-Banach (voir les premières pages de [4]). Or, le dual de  $C^0(\mathbb{R}^d)$  s'identifie aux mesures finies sur  $\mathbb{R}^d$  par le théorème de Radon-Nikodym (voir par exemple [21]). L'espace  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$  est donc l'espace des fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^d)$  dont le gradient est une mesure finie sur  $\mathbb{R}^d$ . Il contient naturellement l'espace  $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$  puisque pour tout  $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ , on a  $\|u\|_{\text{BV}} = \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ , mais il contient aussi l'espace  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  comme nous allons le démontrer ci-dessous.

Montrons que (III.13) est toujours vraie pour les fonctions de  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$  avec  $\|u\|_{\text{BV}}$  au lieu de  $\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ . Pour tout  $u \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$ , il existe (voir par exemple [1]) une suite  $(u_n) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$  et presque partout, et telle que  $\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|u_n\|_{\text{BV}} \rightarrow \|u\|_{\text{BV}}$ . La suite  $(\|u_n\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)})$  est bornée et comme  $u_n \rightarrow u$  presque partout, le lemme de Fatou donne  $\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)}$ . En passant à la limite dans (III.13) pour  $u_n$  on obtient :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &= C(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_{\text{BV}} \\ &= C(d) \|u\|_{\text{BV}}. \end{aligned} \tag{III.14}$$

Pour démontrer un équivalent discret de (III.13), il suffit donc de démontrer que toute fonction  $u$  de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  s'étend à  $\mathbb{R}^d$  en une fonction de  $\text{BV}(\mathbb{R}^d)$  avec  $\|u\|_{\text{BV}} \lesssim \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}$ . Ce résultat, qui est vrai sous contrainte de régularité sur le maillage, découle naturellement du Lemme III.2 sur le contrôle des sauts des fonctions de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ .

En effet, soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_0 > 0$  et soit  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ . On étend  $u$  par 0 en dehors de  $\Omega$  et on a alors  $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . Pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ , on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla u, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= - \int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div} \phi = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi = - \sum_K \int_K u \operatorname{div} \phi \\
 &= \sum_K \left( \int_K \nabla u \cdot \phi - \int_{\partial K} u \phi \cdot \mathbf{n} \right) \\
 &= \sum_K \left( \int_K \nabla u \cdot \phi - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_{\sigma} u \phi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \right) \\
 &= \sum_K \int_K \nabla u \cdot \phi - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\sigma} [u]_{\sigma} \phi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\
 &\leq \left( \sum_K \int_K |\nabla u| + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_{\sigma} |[u]_{\sigma}| \right) \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\
 &\leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}} \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}
 \end{aligned} \tag{III.15}$$

par définition de la norme  $\|u\|_{1,1,\mathcal{M}}$  et grâce à l'inégalité (III.7) (avec  $p = 1$ ). En vertu de (III.15), une fonction  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  (étendu par 0 en dehors de  $\Omega$ ) est dans  $\mathbf{BV}(\mathbb{R}^d)$  avec :

$$\|u\|_{\mathbf{BV}} \leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}. \tag{III.16}$$

En combinant (III.16) avec (III.14), nous avons démontré le résultat suivant :

**Proposition III.6 (Injection  $W^{1,1} \subset L^{1^*}$  discrète)**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_0 > 0$ . Il existe une constante  $C(d, \theta_0) > 0$  telle que :

$$\|u\|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega). \tag{III.17}$$

On peut maintenant démontrer un analogue discret de l'inégalité de Sobolev (III.12) pour  $1 \leq p < d$  quelconque :

**Proposition III.7 (Injection  $W^{1,p} \subset L^{p^*}$  discrète pour  $1 \leq p < d$ )**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_0 > 0$ . On suppose que  $1 \leq p < d$ . Alors il existe une constante  $C(p, d, \theta_0) > 0$  telle que :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C(p, d, \theta_0) \|u\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega), \tag{III.18}$$

où  $p^* = \frac{dp}{d-p}$ , et on a  $C(p, d, \theta_0) \rightarrow +\infty$  lorsque  $p \rightarrow d$ .

Par interpolation d'espaces de Lebesgue, on a le corollaire suivant, dont une conséquence est une *inégalité de Poincaré discrète*.

**Proposition III.8**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_0 > 0$ . On suppose que  $1 \leq p < d$ . Alors, pour tout  $q \in [p, p^*]$ , il existe une constante  $C(p, q, d, \theta_0) > 0$  telle que :

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, d, \theta_0) \|u\|_{1, p, \mathcal{M}}, \quad \forall u \in H_{\mathcal{M}, 0}(\Omega). \quad (\text{III.19})$$

Pour  $q = p$ , cette inégalité s'appelle l'inégalité de Poincaré discrète.

**Démonstration de la Prop. (III.7) :** Soit  $p$  tel que  $1 \leq p < d$ . Soit  $u \in H_{\mathcal{M}, 0}(\Omega)$  que l'on étend par 0 en dehors de  $\Omega$ . Soit  $\alpha > 1$  un réel. Comme  $u$  est régulière sur chaque maille  $K$ ,  $|u|^\alpha$  l'est aussi et on a  $\nabla|u|^\alpha = \alpha \operatorname{sgn}(u)|u|^{\alpha-1} \nabla u$  sur tout  $K$ . En reprenant le calcul (III.15) appliqué cette fois-ci à la fonction  $|u|^\alpha$ , on obtient pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$  :

$$\begin{aligned} \langle \nabla|u|^\alpha, \phi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &\leq \left( \sum_K \int_K |\nabla|u|^\alpha| + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \int_\sigma |[|u|^\alpha]_\sigma| \right) \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left( \sum_K \int_K |\nabla|u|^\alpha| + \alpha C(p, d, \theta_0) \|u\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\Omega)}^{\alpha-1} \|u\|_{1, p, \mathcal{M}} \right) \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

grâce à l'inégalité (III.8) du Lemme III.2. De plus, on a :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K |\nabla|u|^\alpha| \leq \alpha \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K |u|^{\alpha-1} |\nabla u|.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder sur l'intégrale puis sur la somme, on obtient (avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ) :

$$\sum_K \int_K |\nabla|u|^\alpha| \leq \alpha \left( \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K |u|^{p'(\alpha-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \alpha \|u\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\Omega)}^{\alpha-1} \|u\|_{1, p, \mathcal{M}}.$$

On injecte cette inégalité dans (III.20) ce qui donne que pour tout  $u \in H_{\mathcal{M}, 0}(\Omega)$  et tout  $\alpha > 1$ , on a  $|u|^\alpha \in \text{BV}(\mathbb{R}^d)$  avec  $\| |u|^\alpha \|_{\text{BV}} \leq \alpha (1 + C(p, d, \theta_0)) \|u\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\Omega)}^{\alpha-1} \|u\|_{1, p, \mathcal{M}}$ . L'inégalité (III.14) appliquée à  $|u|^\alpha$  donne alors :

$$\|u\|_{L^{\alpha \cdot 1^*}(\Omega)}^\alpha = \| |u|^\alpha \|_{L^{1^*}(\Omega)} \leq \alpha C'(p, d, \theta_0) \|u\|_{L^{p'(\alpha-1)}(\Omega)}^{\alpha-1} \|u\|_{1, p, \mathcal{M}}.$$

On choisit alors  $\alpha$  tel que  $\alpha \cdot 1^* = p'(\alpha - 1)$  i.e.  $\alpha = p'/(p' - 1^*)$  ce qui donne (III.18) avec  $p^* = \alpha \cdot 1^* = p'1^*/(p' - 1^*) = pd/(d - p)$ . On a bien  $\alpha > 1$  et  $\alpha C'(p, d, \theta_0) \rightarrow \infty$  lorsque  $p \rightarrow d$  car  $\alpha \rightarrow \infty$  lorsque  $p \rightarrow d$ . ■

Enfin, pour  $p \geq d$ , on a le résultat suivant.

**Proposition III.9 (Injection  $W^{1,p} \subset L^q$  discrète pour  $p \geq d$ )**

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_0 > 0$ . On suppose que  $p \geq d$ . Alors pour tout  $q \in ]p, \infty[$ , il existe une constante  $C(p, q, d, \theta_0) > 0$  telle que :

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p, q, d, \theta_0) \|u\|_{1,p,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega). \quad (\text{III.21})$$

**Démonstration :** Soit  $q \in ]p, \infty[$  et soit  $1 \leq p_1 < d$  tel que  $p_1^* = q$  (un tel  $p_1$  existe toujours car  $p_1^* \rightarrow \infty$  quand  $p_1 \rightarrow d$ ). En appliquant la Proposition III.7, on obtient que pour tout  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ ,  $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C(p_1, d, \theta_0) \|u\|_{1,p_1,\mathcal{M}}$ . Puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on montre que  $\|u\|_{1,p_1,\mathcal{M}} \leq C(\Omega, p, p_1) \|u\|_{1,p,\mathcal{M}}$  d'où le résultat. ■

**Remarque III.3**

Dans le cadre continu, on sait que si  $p > d$ , alors  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$  avec injection continue. Il serait intéressant de savoir si cela s'étend au cadre discret, i.e. s'il existe une constante  $C(p, d, \theta_0)$  telle que  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(p, d, \theta_0) \|u\|_{1,p,\mathcal{M}}$  pour tout  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  dès lors que  $p > d$ . Il est en revanche impossible d'avoir l'injection  $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subset C^0(\mathbb{R}^d)$  puisque les fonctions de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  ne sont pas continues...

## III.5 Résultats de compacité

Dans cette partie, nous démontrons un analogue discret du théorème de compacité de Rellich à savoir que des suites qui sont bornées pour les normes  $W^{1,p}$  discrètes sont relativement compactes dans  $L^p(\Omega)$ . Ces résultats se fondent naturellement sur le théorème de Kolmogorov qui caractérise les parties relativement compactes de  $L^p(\Omega)$ . Une démonstration de ce théorème ainsi que du théorème de Rellich peut être trouvée dans [4].

**Théorème III.10 (Kolmogorov)**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$  et  $A \subset L^p(\Omega)$ . Alors  $A$  est relativement compact dans  $L^p(\Omega)$  si, et seulement si, il existe un opérateur de prolongement :

$$\begin{aligned} P : A &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}^d) \\ u &\longmapsto P(u) \end{aligned}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

1.  $P(u) = u$  presque partout sur  $\Omega$ , pour tout  $u \in A$ ,
2. L'ensemble  $\{P(u), u \in A\}$  est borné dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ ,
3.  $\|P(u)(\cdot + \mathbf{y}) - P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$  lorsque  $\mathbf{y} \rightarrow 0$ , uniformément en  $u \in A$ .

### III.5.1 Famille bornée en norme $W^{1,1}$ discrète : compacité dans $L^1$

On commence par établir une estimation sur les translations des fonctions discrètes  $u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ .

#### Proposition III.11 (*Translations dans $L^1$* )

Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\Omega$  tel que  $\theta_{\mathcal{M}} \leq \theta_0$ , avec  $\theta_0 > 0$ . Alors, il existe une constante  $C(d, \theta_0) > 0$  telle que :

$$\|u(\cdot + \mathbf{y}) - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq |\mathbf{y}| C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}, \quad \forall u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega), \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d,$$

où  $u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  est prolongée à tout  $\mathbb{R}^d$  en posant  $u = 0$  en dehors de  $\Omega$ , et  $|\mathbf{y}|$  est la norme euclidienne de  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ .

**Démonstration :** Soit  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ , on a :

$$|u(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - u(\mathbf{x})| = \left| \int_0^1 \nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \, ds \right| \leq |\mathbf{y}| \int_0^1 |\nabla u(\mathbf{x} + s\mathbf{y})| \, ds.$$

En intégrant par rapport à  $\mathbf{x}$  et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\|u(\cdot + \mathbf{y}) - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq |\mathbf{y}| \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u| = |\mathbf{y}| \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (\text{III.22})$$

Par densité de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  dans  $W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ , l'inégalité (III.22) est aussi vraie pour les fonctions  $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ . Puis en procédant comme dans la preuve de la Proposition III.6, on montre que l'on peut encore étendre ce résultat aux fonctions  $u \in BV(\mathbb{R}^d)$  :

$$\|u(\cdot + \mathbf{y}) - u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq |\mathbf{y}| \|u\|_{BV}, \quad \forall u \in BV(\mathbb{R}^d).$$

Soit maintenant  $u \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  que l'on étend par 0 en dehors de  $\Omega$ . D'après (III.16), on a  $u \in BV(\mathbb{R}^d)$  avec  $\|u\|_{BV} \leq C(d, \theta_0) \|u\|_{1,1,\mathcal{M}}$  d'où le résultat. ■

On en déduit le résultat suivant, analogue discret de l'injection compacte  $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$  pour  $\Omega$  borné.

#### Théorème III.12

Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $u^{(m)} \in H_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$  que l'on prolonge par 0 en dehors de  $\Omega$ . On suppose qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\|u^{(m)}\|_{1,1,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C, \forall m \in \mathbb{N}$ . Alors il existe une sous-suite de  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  convergente dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$  et donc dans  $L^1(\Omega)$ .

**Démonstration :** On applique le Théorème de Kolmogorov à l'ensemble  $A = \cup_{m \in \mathbb{N}} \{u^{(m)}\}$ . L'hypothèse 1. du théorème est bien vérifiée. De plus, la Proposition III.6 montre que la suite  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^{1^*}(\Omega)$  et donc dans  $L^1(\Omega)$  et dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$  puisque  $1^* > 1$  et que

$\Omega$  est borné. L'hypothèse 2. du théorème est donc aussi vérifiée. Enfin, grâce à la Proposition III.11 et au fait que  $\|u^{(m)}\|_{1,1,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C, \forall m \in \mathbb{N}$ , on voit aussi que  $\|u^{(m)}(\cdot + \mathbf{y}) - u^{(m)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$  lorsque  $\mathbf{y} \rightarrow 0$ , uniformément en  $m \in \mathbb{N}$ . On peut donc appliquer le Théorème de Kolmogorov, ce qui donne l'existence d'une sous-suite de  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  convergente dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$  et donc dans  $L^1(\Omega)$ . ■

### III.5.2 Famille bornée en norme $W^{1,p}$ discrète : compacité dans $L^p$

#### Théorème III.13

Soit  $1 \leq p < \infty$ . Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $u^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}^{(m)}}$  que l'on prolonge par 0 en dehors de  $\Omega$ . On suppose qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C, \forall m \in \mathbb{N}$ . Alors il existe une sous-suite de  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  convergente dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$  et donc dans  $L^p(\Omega)$ .

**Démonstration :** Comme  $\Omega$  est borné, l'hypothèse  $\|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C, \forall m \in \mathbb{N}$  et l'inégalité de Hölder, montrent que la suite  $(\|u^{(m)}\|_{1,1,\mathcal{M}^{(m)}})$  est bornée. On en déduit que la suite  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^{1^+}(\Omega)$  et donc dans  $L^1(\Omega)$  et dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ . On peut donc appliquer le Théorème de Kolmogorov, ce qui donne l'existence d'une sous-suite de  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , toujours notée  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , qui converge dans  $L^1(\Omega)$  vers un certain  $u \in L^1(\Omega)$ .

On conclut de la manière suivante. En invoquant la Proposition III.7 ou la Proposition III.9, on a que  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est aussi bornée dans  $L^q(\Omega)$  pour un certain  $q > p$ . Quitte à extraire à nouveau une sous-suite, on peut supposer que  $u^{(m)} \rightharpoonup v$  avec  $v \in L^q(\Omega)$  et par unicité de la limite au sens des distributions, on a  $u = v$  i.e.  $u \in L^q(\Omega)$ . En interpolant  $L^p$  entre  $L^1$  et  $L^q$ , on obtient (voir [4]) :

$$\|u^{(m)} - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u^{(m)} - u\|_{L^1(\Omega)}^\beta \|u^{(m)} - u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\beta},$$

où  $\beta \in [0, 1]$  vérifie  $\frac{1}{p} = \beta + \frac{1-\beta}{q}$ . Ceci prouve que  $u^{(m)} \rightarrow u$  fortement dans  $L^p(\Omega)$ . ■

### III.5.3 Régularité de la limite

En continu, la limite forte dans  $L^p(\Omega)$  d'une suite de fonctions bornée dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  obtenue par extraction grâce au théorème de Rellich est en fait dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Nous démontrons un analogue discret de ce résultat qui suppose que le pas de la suite de maillages considérés tende vers zéro.

#### Théorème III.14

Soit  $(\mathcal{M}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de maillages régulière de  $\Omega$  i.e. satisfaisant  $\theta_{\mathcal{M}^{(m)}} \leq \theta_0$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $\theta_0 > 0$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , soit  $u^{(m)} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}^{(m)},0}(\Omega)$ . On suppose qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $\|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C, \forall m \in \mathbb{N}$ . On suppose aussi que  $h_{\mathcal{M}^{(m)}} \rightarrow 0$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Alors :

1. Il existe une sous-suite de  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , toujours notée  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , qui converge dans  $L^p(\Omega)$  vers un certain  $u \in L^p(\Omega)$ .
2. La limite  $u$  appartient à  $W_0^{1,p}(\Omega)$  avec  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C$ .
3. La suite  $(\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\nabla u$  dans  $L^p(\Omega)^d$ .

**Démonstration :** Le fait qu'il existe une sous-suite de  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , toujours notée  $(u^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ , qui converge dans  $L^p(\Omega)$  vers un certain  $u \in L^p(\Omega)$ , est une conséquence du Théorème III.13. Il reste donc à montrer que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  avec  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C$ . En prolongeant  $u^{(m)}$  et  $u$  par 0 en dehors de  $\Omega$ , on a aussi  $u^{(m)} \rightarrow u$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ . Comme  $u = 0$  en dehors de  $\Omega$ , il suffit pour que  $u$  soit dans  $W_0^{1,p}(\Omega)$  de montrer que  $\nabla u$  au sens des distributions s'identifie à une fonction de  $L^p(\mathbb{R}^d)^d$ . Montrons pour cela que  $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u^{(m)}$  converge faiblement vers  $\nabla u$  dans  $L^p(\mathbb{R}^d)^d$ .

On a

$$\|\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u^{(m)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u^{(m)}\|_{L^p(\Omega)} = \|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}} \leq C.$$

De plus pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u^{(m)} \cdot \phi &= \sum_{K \in \mathcal{M}^{(m)}} \int_K \nabla u^{(m)} \cdot \phi \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}^{(m)}} \left( - \int_K u^{(m)} \operatorname{div} \phi + \int_{\partial K} u^{(m)} \phi \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} u^{(m)} \operatorname{div} \phi + R(u^{(m)}, \phi) \end{aligned}$$

avec

$$R(u^{(m)}, \phi) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} [u^{(m)}]_{\sigma} \phi \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} [u^{(m)}]_{\sigma} (\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma},$$

car l'intégrale du saut  $u^{(m)} \in H_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  à travers  $\sigma$  est nulle. Par l'inégalité de Hölder's, on voit que pour tout  $1 < p < \infty$  :

$$|R(u^{(m)}, \phi)| \leq \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \frac{1}{h_{\sigma}^{p-1}} \int_{\sigma} |[u^{(m)}]_{\sigma}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} h_{\sigma}^{\frac{p'(p-1)}{p}} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

En remarquant que  $p' = p/(p-1)$  en utilisant l'inégalité (III.7) on obtient :

$$|R(u^{(m)}, \phi)| \leq C(p, d, \theta_0) \|u^{(m)}\|_{1,p,\mathcal{M}^{(m)}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}^{(m)}} \int_{\sigma} h_{\sigma} |\phi - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Comme  $\phi$  est régulière, on a  $|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_{\sigma})| \leq h_{\mathcal{M}^{(m)}} \|\nabla \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \sigma$ . Donc, pour tout  $1 < p < \infty$  :

$$|R(u^{(m)}, \phi)| \leq C h_{\mathcal{M}^{(m)}},$$

et on démontre un résultat similaire pour  $p = 1$ . Comme  $u^{(m)} \rightarrow u$  fortement dans  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , on obtient que pour tout  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$  :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} u \cdot \phi \rightarrow - \int_{\mathbb{R}^d} u \operatorname{div} \phi, \quad \text{lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

Ainsi,  $\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{u}^{(m)} \rightarrow \nabla \mathbf{u}$  au sens des distributions. Comme la suite  $(\nabla_{\mathcal{M}^{(m)}} \mathbf{u}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^p(\mathbb{R}^d)^d$ , elle admet donc une sous-suite qui converge faiblement dans  $L^p(\Omega)^d$ , mais aussi dans  $\mathcal{D}'(\Omega)^d$ , vers une fonction  $\mathbf{w} \in L^p(\mathbb{R}^d)^d$ . On en déduit que  $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{w}$  donc  $\nabla \mathbf{u} \in L^p(\mathbb{R}^d)^d$  avec en outre  $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)^d} = \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C$ . Comme  $u = 0$  en dehors de  $\Omega$ , ceci implique que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  avec  $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq C$ . ■



## Chapitre IV

# Discrétisation sur grilles décalées pour les équations de Navier-Stokes compressibles

L’objectif de ce chapitre est d’étendre au système des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes le schéma numérique par éléments finis de Crouzeix-Raviart introduit au chapitre II pour le problème de Stokes stationnaire. Cette extension se fait en discrétisant le terme de diffusion grâce aux éléments finis de Crouzeix-Raviart (comme pour le problème de Stokes), et en introduisant une discrétisation par volumes finis des termes de convection. On parle alors de méthodes hybrides volumes finis – éléments finis. L’intérêt d’une telle extension est d’obtenir pour le modèle compressible une méthode numérique qui soit stable dans les régimes de faible compressibilité, voire qui dégénère vers un schéma éprouvé et stable pour le modèle incompressible lorsque la masse volumique discrète est constante. On parle alors de méthodes numériques *préservant l’asymptotique bas Mach*<sup>1</sup>.

Le schéma que nous décrivons dans ce chapitre appartient à une classe de schémas numériques pour divers modèles de mécanique des fluides, comprenant des discrétisations spatiales structurées ou non, prenant en compte des maillages tétraédriques ou hexaédriques [2, 17, 3, 10, 12, 11], et des discrétisations temporelles diverses [13, 15, 22]. Tous ces schémas ont en commun une discrétisation spatiale sur “grilles décalées”, au sens où les degrés de liberté des quantités scalaires (pression, masse volumique, énergie interne) sont associés aux centres des mailles tandis que les degrés de liberté de la vitesse sont associés aux faces des mailles. La stabilité de ces schémas dans les régimes faiblement compressibles voire incompressibles est directement liée à la propriété *inf-sup* discrète vérifiée par cette discrétisation sur grille décalée. Cette condition *inf-sup* discrète fournit un contrôle de la pression en norme  $L^2$  à

---

1. Le nombre de Mach est un nombre sans dimension qui exprime le rapport de la vitesse locale du fluide  $|\mathbf{u}|$  à la vitesse de propagation du son dans ce même fluide donnée par  $c^2 = \phi'(\rho)$  pour un fluide barotrope. Lorsque ce nombre est très petit, les compressions dues aux variations de pression peuvent être négligées, et l’écoulement peut être considéré, en première approximation, comme étant incompressible. Voir par exemple les articles [19, 6, 7].

travers le contrôle de son gradient en norme  $H^{-1}$ .

## IV.1 Quelques propriétés des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes

Soit  $T \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d \in \{2, 3\}$ . On considère le système des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes qui décrit l'évolution sur l'intervalle de temps  $[0, T)$  d'un fluide visqueux occupant le volume  $\Omega$ , et dont la pression locale est une fonction uniquement de la masse volumique locale du fluide. En l'absence de forces volumiques extérieures s'appliquant sur le fluide, ce système s'écrit :

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{IV.1a})$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla_{\varphi}(\rho) = 0. \quad (\text{IV.1b})$$

On complète le système (IV.1) avec des conditions initiales ainsi que des conditions aux limites lorsque  $\Omega$  est un ouvert borné (supposé régulier) :

$$\rho|_{t=0} = \rho_0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (\text{IV.2})$$

La condition aux limites  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$  est appelée condition de Dirichlet homogène. C'est la condition aux limites naturelle sur la vitesse pour un écoulement visqueux. Elle exprime le fait que le fluide adhère à la paroi immobile  $\partial\Omega$ . D'autres conditions aux limites sont envisageables. La condition de Neumann homogène par exemple s'écrit  $\nabla \mathbf{u}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ , elle exprime la non pénétration du fluide à travers la paroi, mais elle autorise un glissement tangent à celle-ci. On peut aussi considérer des conditions aux limites différentes selon les zones de  $\partial\Omega$ .

Dans la suite, on démontre quelques propriétés qualitatives des solutions du système (IV.1)-(IV.2) lorsque celles-ci sont supposées régulières.

### IV.1.1 Positivité de la masse volumique

La première propriété attendue pour les solutions régulières de (IV.1)-(IV.2) est la positivité de la masse volumique. Plus précisément, on s'attend à ce que si la masse volumique initiale  $\rho_0$  est positive, alors la masse volumique  $\rho(\mathbf{x}, t)$  reste positive pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$  et pour tout  $t \in (0, T)$ . La méthode classique pour démontrer cette propriété est de suivre au cours du temps une particule fluide se trouvant en  $\mathbf{X}_0 \in \Omega$  à  $t = 0$ , dont la masse volumique initiale  $\rho_0(\mathbf{X}_0)$  est donc positive, et de montrer que sa masse volumique reste positive au cours du temps. Notons  $\mathbf{X}(t)$  le point de  $\Omega$  où se trouve la particule à  $t \geq 0$ . En tout temps  $t \geq 0$ , la particule est animée de la vitesse locale du fluide au point où elle se trouve, à savoir  $\mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t)$ . On en déduit que la trajectoire de la particule  $t \mapsto \mathbf{X}(t)$  est une courbe intégrale de la vitesse  $\mathbf{u}$  *i.e.* qu'elle est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \mathbf{X}'(t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t), & t \in [0, T], \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

#### IV.1. Quelques propriétés des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes

Regardons l'évolution au cours du temps de  $\rho(\mathbf{X}(t), t)$  la masse volumique de la particule au temps  $t$ . Pour cela, dérivons  $\rho(\mathbf{X}(t), t)$  par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(\mathbf{X}(t), t) &= \mathbf{X}'(t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{X}(t), t) + \partial_t \rho(\mathbf{X}(t), t) \\ &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \cdot \nabla \rho(\mathbf{x}(t), t) + \partial_t \rho(\mathbf{X}(t), t) && \text{car } \mathbf{X} \text{ est solution de (IV.3),} \\ &= -\rho(\mathbf{X}(t), t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) && \text{car } (\rho, \mathbf{u}) \text{ est solution de (IV.1).} \end{aligned}$$

En supposant que  $\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^\infty} < \infty$  (ce qui est toujours vrai lorsque  $\Omega$  est borné si  $\mathbf{u}$  est régulière), on en déduit que :

$$\rho(\mathbf{X}(t), t) = \rho_0(\mathbf{X}_0) \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{X}(s), s)) \, ds\right), \quad \forall t \in (0, T).$$

Ainsi, si la masse volumique de la particule est initialement positive, elle reste positive en tout temps.

Comme  $\mathbf{u}$  est régulière sur  $\Omega \times [0, T]$ , pour tout  $\mathbf{X}_0 \in \Omega$ , le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution unique au problème de Cauchy (IV.3) globale *i.e.* définie pour tout  $t \in [0, T]$ . Ainsi, les courbes intégrales de  $\mathbf{u}$  forment une partition de  $\Omega \times [0, T]$ . Par tout point  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]$ , il passe une unique courbe caractéristique  $t \mapsto \mathbf{X}(t)$  solution de (IV.3), telle que  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}$ . Le pied de cette caractéristique  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0)$  est forcément dans  $\Omega$  car les courbes caractéristiques partant de  $\partial\Omega$  sont stationnaires à cause de la condition aux limites de Dirichlet homogène sur la vitesse  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$ . On a alors :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{X}(t), t) = \rho_0(\mathbf{X}_0) \exp\left(-\int_0^t \operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{X}(s), s)) \, ds\right),$$

qui est une quantité positive. On a démontré le résultat suivant :

##### **Proposition IV.1 (Positivité de la masse volumique)**

Soit  $(\rho, \mathbf{u})$  une solution régulière des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1). On suppose que  $(\rho, \mathbf{u})$  vérifie les conditions initiales et aux limites (IV.2) avec  $\rho_0 \geq 0$ . Alors pour tout  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ , la masse volumique est positive :  $\rho(\mathbf{x}, t) \geq 0$ . Si on suppose que  $\rho_0 > 0$  alors  $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$  pour tout  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$ .

#### IV.1.2 Bilans d'énergie

Une autre propriété remarquable des solutions régulières des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1), est que celles-ci vérifient des équations supplémentaires traduisant la conservation de l'énergie. On commence par établir le bilan d'énergie cinétique.

**Proposition IV.2 (Équation d'énergie cinétique)**

Soit  $(\rho, \mathbf{u})$  une solution régulière des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1). Alors  $(\rho, \mathbf{u})$  satisfait l'EDP suivante appelée équation d'énergie cinétique :

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \operatorname{div} \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} + \nabla \wp(\rho) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (\text{IV.4})$$

**Démonstration :** Pour tout couple  $(\rho, \mathbf{u})$  de fonctions régulières, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \Big|_{i=1, \dots, d} \\ &= \sum_{j=1}^d u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \Big|_{i=1, \dots, d} + \sum_{j=1}^d \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i) \Big|_{i=1, \dots, d} \\ &= \mathbf{u} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned}$$

On en déduit l'identité vectorielle suivante :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{u} \left( \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) + \rho \left( \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right).$$

Si  $(\rho, \mathbf{u})$  est une solution régulière des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1), l'équation de bilan de quantité de mouvement peut donc se réécrire :

$$\rho \left( \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) + \nabla \wp(\rho) = 0.$$

On prend le produit scalaire de cette équation par  $\mathbf{u}$  ce qui donne :

$$\rho \partial_t \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} + \nabla \wp(\rho) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

En sommant cette équation et  $\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \times (\text{IV.1a})$  on obtient (IV.4). ■

On a aussi le résultat suivant :

**Proposition IV.3 (Équation d'énergie interne)**

Soit  $(\rho, \mathbf{u})$  une solution régulière des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1). On suppose que  $(\rho, \mathbf{u})$  vérifie les conditions initiales et aux limites (IV.2) avec  $\rho_0 \geq 0$ . On note  $\mathcal{H}$  la fonction définie par :

$$\mathcal{H}(\rho) = \rho \int^{\rho} \frac{\wp(s)}{s^2} ds.$$

Alors  $(\rho, \mathbf{u})$  satisfait l'EDP suivante appelée équation d'énergie interne :

$$\partial_t(\mathcal{H}(\rho)) + \operatorname{div}(\mathcal{H}(\rho) \mathbf{u}) + \wp(\rho) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (\text{IV.5})$$

#### IV.1. Quelques propriétés des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes

**Démonstration :** Soit  $\rho \mapsto f(\rho)$  une fonction régulière quelconque. On multiplie l'équation de conservation de la masse (IV.1a) par  $f'(\rho)$  et on trouve :

$$\partial_t(f(\rho)) + \operatorname{div}(f(\rho)\mathbf{u}) + (\rho f'(\rho) - f(\rho)) \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

On choisit alors  $f$  solution de  $\rho f'(\rho) - f(\rho) = \wp(\rho)$ , (i.e.  $f(\rho) = \mathcal{H}(\rho) := \rho \int^{\rho} \frac{\wp(s)}{s^2} ds$ ) ce qui donne (IV.5). ■

#### Remarque IV.1 (*Gaz parfaits*)

Si la pression  $\wp$  du fluide est déterminée à partir de la masse volumique à travers l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\wp(\rho) = S \rho^\gamma,$$

où  $\gamma \geq 1$ , le coefficient adiabatique, est une constante dépendant des propriétés physiques du fluide et où  $S$  est une constante que l'on prend égale à 1, alors la fonction  $\mathcal{H}$  est définie par  $\mathcal{H}(\rho) = \rho \log \rho$  si  $\gamma = 1$  et  $\mathcal{H}(\rho) = (\gamma - 1)^{-1} \rho^\gamma$  si  $\gamma > 1$ .

En sommant l'équation d'énergie cinétique (IV.4) et l'équation d'énergie interne (IV.5), on obtient l'équation d'énergie totale :

#### Proposition IV.4 (*Bilan d'énergie totale*)

Soit  $(\rho, \mathbf{u})$  une solution régulière des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1). On suppose que  $(\rho, \mathbf{u})$  vérifie les conditions initiales et aux limites (IV.2) avec  $\rho_0 \geq 0$ . Alors  $(\rho, \mathbf{u})$  satisfait l'EDP suivante appelée équation d'énergie totale :

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \mathcal{H}(\rho) \right) + \operatorname{div} \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} + \mathcal{H}(\rho) \mathbf{u} + \wp(\rho) \mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (\text{IV.6})$$

En intégrant l'équation (IV.6) sur  $\Omega \times [0, t]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(t) |\mathbf{u}(t)|^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(\rho(t)) + \mu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + (\mu + \lambda) \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(\rho_0), \quad \forall t \in (0, T). \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

**Démonstration :** On a :

$$\int_0^t \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} = \int_0^t \int_{\Omega} (\mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})) \cdot \mathbf{u}.$$

Par intégration par parties et en remarquant que  $\mathbf{u}$  est nulle sur le bord de  $\Omega$ , on voit que :

$$\int_0^t \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} = \mu \int_0^t \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \int_0^t \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2. \quad (\text{IV.8})$$

Ainsi, en intégrant l'équation (IV.6) sur  $\Omega \times [0, t]$  et en remarquant que l'intégrale du terme en divergence s'annule (toujours grâce aux conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur  $\mathbf{u}$ ), on obtient (IV.7). ■

### IV.1.3 Solutions faibles

En rassemblant les résultats, on obtient les estimations *a priori* suivantes, vérifiées par les solutions régulières de (IV.1)-(IV.2).

#### **Proposition IV.5 (*Estimations a priori*)**

Soit  $(\rho, \mathbf{u})$  une solution régulière des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1). On suppose que la pression est donnée par l'équation d'état des gaz parfaits  $\wp(\rho) = \rho^\gamma$  avec  $\gamma > 1$  et que  $(\rho, \mathbf{u})$  vérifie les conditions initiales et aux limites (IV.2). On suppose que  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  sont telles que  $\rho_0 \geq 0$ ,  $\mathcal{H}(\rho_0) \in L^1(\Omega)$  et  $\sqrt{\rho_0}\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$ , alors  $(\rho, \mathbf{u})$  vérifie les estimations *a priori* suivantes :

- $\rho \geq 0$ ,
- $\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \rho(t) |\mathbf{u}(t)|^2 < \infty$ ,
- $\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} \rho(t)^\gamma < \infty$ ,
- $\int_0^T \|\nabla \mathbf{u}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < \infty$ .

Il peut être intéressant de considérer des solutions de (IV.1) qui ne sont pas régulières mais qui vérifient tout de même la positivité de la masse volumique et les estimations *a priori* associées à l'énergie. Les dérivées temporelles et spatiales sont alors entendues au sens faible. On a la définition suivante :

#### **Définition IV.1 (*Solutions faibles*)**

Soit  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  tels que  $\rho_0 \geq 0$  p.p. sur  $\Omega$ . On suppose que  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  sont telles que  $\mathcal{H}(\rho_0) \in L^1(\Omega)$  et  $\sqrt{\rho_0}\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$ . On suppose que la pression est donnée par l'équation d'état des gaz parfaits  $\wp(\rho) = \rho^\gamma$  avec  $\gamma > 1$ . Une solution faible des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes (IV.1)-(IV.2) est un couple  $(\rho, \mathbf{u})$  satisfaisant les estimations *a priori* de la Proposition IV.5 ainsi que les équations (IV.1a) et (IV.1b) au sens faible :

(i) Pour tout  $\phi$  dans  $C_c^\infty(\Omega \times [0, T])$ ,

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) (\partial_t \phi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} dt = \int_{\Omega} \rho_0(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}.$$

(ii) Pour tout  $\mathbf{v}$  dans  $C_c^\infty(\Omega \times [0, T])^d$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left( -\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right. \\ \left. + \mu \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\mu + \lambda) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right. \\ \left. - \wp(\rho(\mathbf{x}, t)) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} dt = \int_\Omega \rho_0(\mathbf{x}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

## IV.2 Schéma numérique : maillages et inconnues discrètes

On suppose que l'ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est borné, polygonal si  $d = 2$ , et polyédrique si  $d = 3$ . On cherche à écrire un schéma numérique pour approcher les solutions de (IV.1)-(IV.2). On va s'inspirer de l'écriture locale du schéma numérique vu pour le système de Stokes au chapitre II.

### Définition IV.2 (*Discrétisation spatiale sur grilles décalées*)

Une discrétisation sur grilles décalées de  $\Omega$ , notée  $\mathcal{D}$ , est définie par un couple  $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$ , où :

- $\mathcal{M}$  est une famille finie composée de simplexes  $K \in \mathcal{M}$  (triangles pour  $d = 2$ , tétraèdres pour  $d = 3$ ) appelée "maillage primal" qui forme une partition de  $\Omega$  :  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \bar{K}$ . On suppose que le maillage est conforme i.e. que "toute face  $\sigma$  d'un élément  $K \in \mathcal{M}$  est soit contenue dans la frontière  $\partial\Omega$ , soit égale à une face d'un autre élément  $L$ ", et on note alors  $\sigma = K|L$ . Pour chaque  $K \in \mathcal{M}$ , on note  $\mathcal{E}(K)$  l'ensemble des  $(d+1)$  faces de  $K$ , et par  $\mathcal{E}$  l'ensemble des faces du maillage. On note  $\mathcal{E}_{\text{ext}}$  resp.  $\mathcal{E}_{\text{int}}$  l'ensemble des faces externes resp. internes :  $\mathcal{E}_{\text{ext}} = \{\sigma \in \mathcal{E}, \sigma \subset \partial\Omega\}$  et  $\mathcal{E}_{\text{int}} = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_{\text{ext}}$ . Le vecteur unitaire normal à  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$  et sortant de  $K$  est noté  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ . Dans la suite, la notation  $|K|$  où  $|\sigma|$  désigne indifféremment la mesure  $d$  ou  $(d-1)$ -dimensionnelle de  $K$  dans  $\mathbb{R}^d$  ou de  $\sigma$  dans  $\mathbb{R}^{d-1}$ .
- On définit un "maillage dual" associé aux faces  $\sigma \in \mathcal{E}$  comme suit. On commence par définir  $D_{K,\sigma}$  comme le cône de base  $\sigma$  et de sommet le centre de gravité de  $K$  (voir Figure IV.1). On obtient alors une partition de  $K$  en  $d+1$  sous-volumes de même mesure  $|D_{K,\sigma}| = |K|/(d+1)$ . Le volume  $D_{K,\sigma}$  est appelé la demi-maille duale associée à  $K$  et  $\sigma$ . Pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ ,  $\sigma = K|L$ , on définit la maille duale  $D_\sigma$  associée à  $\sigma$  en posant  $D_\sigma = D_{K,\sigma} \cup D_{L,\sigma}$  et pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}} \cap \mathcal{E}(K)$ , on définit  $D_\sigma$  par  $D_\sigma = D_{K,\sigma}$ . L'ensemble  $\cup_{\sigma \in \mathcal{E}} D_\sigma$  est alors un autre maillage de  $\Omega$  appelé "maillage dual" et est associé à l'ensemble  $\mathcal{E}$ . On note  $\bar{\mathcal{E}}(D_\sigma)$  l'ensemble des faces de  $D_\sigma$ , et  $\varepsilon = D_\sigma|D_{\sigma'}$  la face séparant les deux mailles duales  $D_\sigma$  et  $D_{\sigma'}$ . Comme pour le maillage primal, on note  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{int}}$  l'ensemble des faces duales incluses dans le domaine  $\Omega$  et  $\bar{\mathcal{E}}_{\text{ext}}$  l'ensemble des faces duales situées sur le bord  $\partial\Omega$ . Dans ce dernier cas, il existe alors  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$  tel que  $\varepsilon = \sigma$ .

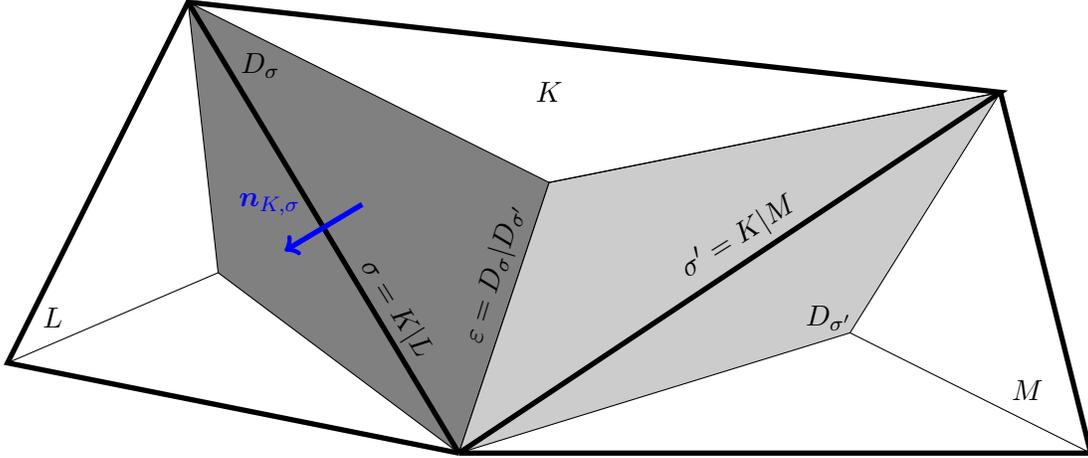


FIGURE IV.1 – Notations pour la discrétisation sur grilles décalées.

Partant de cette définition, on propose une discrétisation sur grilles décalées des équations de Navier-Stokes. Les degrés de liberté pour la masse volumique (*i.e.* les inconnues discrètes pour la masse volumique) sont associés aux mailles du maillage primal  $\mathcal{M}$  et sont notés :

$$\{\rho_K, K \in \mathcal{M}\}.$$

Quant aux degrés de liberté pour la vitesse, ils sont localisés au niveau des faces du maillage primal, et sont donc associés aux cellules du maillage dual  $D_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}$ . La condition aux limites de Dirichlet homogène sur la vitesse  $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$  est prise en compte en fixant à zéro les inconnues de vitesse associées à des faces externes, si bien que les inconnues discrètes pour la vitesse sont notées :

$$\{\mathbf{u}_\sigma \in \mathbb{R}^d, \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}\}.$$

Aux inconnues discrètes nous associons des fonctions constantes par mailles comme suit.

**Définition IV.3 (Espaces fonctionnels discrets)**

Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$  une discrétisation de  $\Omega$  sur grilles décalées comme introduite à la Définition IV.2.

- On note  $L_{\mathcal{M}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  l'espace des fonctions scalaires constantes sur chaque maille du maillage primal  $K \in \mathcal{M}$ . Pour tout  $q \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $K \in \mathcal{M}$ , on note  $q_K$  la valeur constante de  $q$  sur  $K$ . La fonction  $q$  est alors donnée par :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{M}} q_K \mathbb{1}_K(\mathbf{x}) \quad \text{p.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega,$$

où  $\mathbb{1}_K$  est la fonction indicatrice de  $K$ .

- On note  $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$  l'espace des fonctions scalaires constantes sur chaque maille du maillage dual  $D_{\sigma}$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}$ . Pour tout  $u \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$  et  $\sigma \in \mathcal{E}$ , on note  $u_{\sigma}$  la valeur constante de  $u$  sur  $D_{\sigma}$ . La fonction  $u$  est alors donnée par :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} u_{\sigma} \mathbb{1}_{D_{\sigma}}(\mathbf{x}) \quad \text{p.p.t. } \mathbf{x} \in \Omega.$$

On note  $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega) = \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)^d$ . Finalement, on note  $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega) = \{u \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega), u_{\sigma} = 0 \text{ pour tout } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}\}$  et  $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega) = \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)^d$ .

Les masses volumiques discrètes seront des éléments de l'espace discret  $\mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  tandis que les vitesses discrètes seront des éléments de l'espace discret  $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$ . Notons que nous opérons là un changement de point de vue par rapport au schéma de Crouzeix-Raviart pour le problème de Stokes en ce qui concerne la représentation des vitesses discrètes. Au lieu d'associer aux degrés de liberté  $\{\mathbf{u}_{\sigma} \in \mathbb{R}^d, \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}\}$  une fonction  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  affine sur chaque maille  $K$ , nous lui associons une fonction constante sur les mailles du maillage dual. Ceci est plus naturel lorsque l'on considère des méthodes de discrétisation par volumes finis, comme ce sera le cas ici pour la discrétisation des termes de convection. Évidemment, les espaces  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$  sont en bijection.

**Définition IV.4 (Pas de la discrétisation spatiale)**

Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$  une discrétisation sur grilles décalées. Pour chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ , on définit  $h_K$  le diamètre de  $K$  (mesure du plus grand segment inclus dans  $K$ ). Le pas de la discrétisation est défini par :

$$h_{\mathcal{D}} = \max_{K \in \mathcal{M}} h_K.$$

**Définition IV.5 (Régularité de la discrétisation spatiale)**

Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{M}, \mathcal{E})$  une discrétisation sur grilles décalées. Pour chaque maille  $K \in \mathcal{M}$ , on définit  $\varrho_K$  le rayon de la plus grande boule inscrite dans  $K$ . Le paramètre de régularité de la discrétisation  $\mathcal{D}$  est défini par

$$\theta_{\mathcal{D}} = \max_{K \in \mathcal{M}} \frac{h_K}{\varrho_K}. \tag{IV.9}$$

### IV.3 Le schéma numérique pour le problème de Stokes stationnaire

Rappelons l'écriture locale du schéma par éléments finis de Crouzeix-Raviart pour le problème de Stokes stationnaire étudié au chapitre II. Ce schéma peut se mettre sous la forme :

Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega) \times L_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\Delta \mathbf{u})_{\sigma} + (\nabla p)_{\sigma} = \mathbf{f}_{\sigma}, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \\ (\text{div } \mathbf{u})_K = 0, & \forall K \in \mathcal{M}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.10a)} \\ \text{(IV.10b)} \end{array}$$

avec

$$(\Delta \mathbf{u})_{\sigma} = -\frac{1}{|D_{\sigma}|} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \nabla_{\mathcal{M}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \zeta_{\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \quad \text{(IV.11)}$$

$$(\nabla p)_{\sigma} = \frac{|\sigma|}{|D_{\sigma}|} (p_L - p_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \quad \text{(IV.12)}$$

$$(\text{div } \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad \text{(IV.13)}$$

$$\mathbf{f}_{\sigma} = \frac{1}{|D_{\sigma}|} \int_{\Omega} \mathbf{f} \zeta_{\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad \text{(IV.14)}$$

Dans (IV.11), la fonction  $\hat{\mathbf{u}}$  est la fonction de  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  qui a les mêmes degrés de liberté que  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ . Autrement dit, si  $\mathbf{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{u}_{\sigma} \mathbf{1}_{D_{\sigma}}$ , alors  $\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{u}_{\sigma} \zeta_{\sigma}$  où pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ ,  $\zeta_{\sigma}$  est la fonction de forme de l'élément fini de Crouzeix-Raviart associée à la face  $\sigma$ .

Nous allons étendre le schéma pour le système de Stokes stationnaire en un schéma pour les équations de Navier-Stokes compressibles en s'appuyant sur cette écriture locale du schéma.

## IV.4 Un schéma numérique implicite pour Navier-Stokes

On se donne une donnée initiale  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  et on cherche à approcher la solution des équations de Navier-Stokes compressibles (IV.1)-(IV.2). Soit  $\delta t > 0$  un pas de temps que l'on supposera constant pour simplifier. On suppose aussi que  $T$  est un multiple entier de  $\delta t$ , *i.e.* que  $T = N \delta t$  avec  $N \in \mathbb{N}$ . On note  $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  l'approximation de la solution  $(\rho, \mathbf{u})$  de (IV.1)-(IV.2) au temps  $t_n = n \delta t$  pour  $1 \leq n \leq N$ . Et on considère un schéma numérique implicite pour le calcul de cette solution approchée  $(\rho^n, \mathbf{u}^n)_{n=1,\dots,N}$  :

### Initialisation :

En supposant que les données initiales sont dans  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , on pose :

$$\begin{aligned} \rho_K^0 &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall K \in \mathcal{M}, \\ \mathbf{u}_{\sigma}^0 &= \frac{1}{|D_{\sigma}|} \int_{D_{\sigma}} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, & \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad \text{(IV.15)}$$

### Marche en temps :

Connaissant  $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , résoudre en  $(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  le système discret suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \operatorname{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \end{array} \right. \quad \forall K \in \mathcal{M}, \quad (\text{IV.16a})$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma \\ - \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1})_\sigma + (\nabla p^{n+1})_\sigma = 0, \end{array} \right. \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (\text{IV.16b})$$

Définissons à présent les opérateurs différentiels spatiaux discrets apparaissant dans (IV.16a) et (IV.16b). On va s'inspirer pour cela des définitions (IV.11) à (IV.13) des opérateurs différentiels discrets pour le système de Stokes stationnaire.

#### IV.4.1 Discrétisation du bilan de masse

Étant donnés  $(\rho, \mathbf{u}) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , le terme  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})$  est discrétisé en posant :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u})_K = \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}), \quad (\text{IV.17})$$

où  $F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u})$ , le flux de masse numérique à travers une face  $\sigma$  est, nul à travers les faces externes  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}$  conformément à la condition aux limites de Dirichlet homogène sur la vitesse, et est défini pour les faces internes de la manière suivante :

$$F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}) = |\sigma| \rho_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L, \quad (\text{IV.18})$$

avec pour  $\rho_\sigma$  la valeur *décentrée amont* (upwind) par rapport à la vitesse transverse à  $\sigma$   $\mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$  :

$$\rho_\sigma = \begin{cases} \rho_K, & \text{si } \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \geq 0, \\ \rho_L, & \text{si } \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \leq 0. \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

Lorsque  $\rho$  est constant égal à 1 dans toutes les mailles  $K$ , on retrouve la formule (IV.13) pour la divergence discrète. Notons que (IV.17) est une formule de volumes finis avec  $F_{K,\sigma}$  le flux numérique approchant la quantité  $\int_\sigma \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$ . En effet, pour  $(\rho, \mathbf{u})$  réguliers :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})_K &= \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}) \\ &\approx \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} \int_\sigma \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|K|} \int_K \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}). \end{aligned}$$

#### IV.4.2 Discrétisation du bilan de quantité de mouvement

**Terme de diffusion :**

On s'inspire de la formule (IV.11) pour la discrétisation du laplacien afin de définir une approximation du terme de diffusion  $\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}))$  par éléments finis de Crouzeix-Raviart. Étant donné  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , on pose :

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{div}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})_\sigma &= \mu \left( \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \boldsymbol{\nabla} \hat{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \zeta_\sigma \, d\mathbf{x} \right) \\
 &\quad + (\mu + \lambda) \left( \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \mathbf{div}(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nabla} \zeta_\sigma \, d\mathbf{x} \right), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (\text{IV.20})
 \end{aligned}$$

où à  $\mathbf{u} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{u}_\sigma \mathbf{1}_{D_\sigma}$ , on associe  $\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \mathbf{u}_\sigma \zeta_\sigma$  avec  $\zeta_\sigma$  la fonction de forme de l'élément fini de Crouzeix-Raviart associée à la face  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ .

L'identification entre  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$  et  $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$  nous permet de munir  $\mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$  de la même semi-norme  $H^1$  discrète que  $\mathbf{H}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ , définie pour tout  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E}}(\Omega)$  par :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 = \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \boldsymbol{\nabla} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\nabla} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

La semi-norme  $\|\cdot\|_{1,2,\mathcal{M}}$  est en fait une norme sur l'espace  $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  (et sur  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$ ). En effet, si le paramètre de régularité de la discrétisation vérifie  $\theta_{\mathcal{D}} \leq \theta_0$ , on peut montrer qu'il existe  $C(\theta_0)$  telle que  $C(\theta_0) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|\hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C(\theta_0)^{-1} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d}$ . En combinant ceci avec l'inégalité de Poincaré discrète sur l'espace  $\mathbf{H}_{\mathcal{M},0}(\Omega)$  (voir la Proposition III.8), on en déduit une inégalité de Poincaré discrète sur l'espace  $\mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  : il existe une constante  $C(\theta_0)$  telle que :

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C(\theta_0) \|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega). \quad (\text{IV.21})$$

Il est facile de démontrer que la discrétisation du terme de diffusion satisfait une version discrète de la propriété de coercivité découlant du calcul suivant :

$$\int_{\Omega} -\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} = \mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \int_{\Omega} (\mathbf{div} \mathbf{u})^2 \geq \mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u}.$$

La forme bilinéaire associée à la discrétisation du terme de diffusion contrôle la semi-norme  $H^1$  discrète :

##### **Lemme IV.6 (Coercivité de l'opérateur de diffusion discret)**

Pour tout champ de vitesse discret  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , on a :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (-\mathbf{div}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})_\sigma) \\
 &= \mu \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \boldsymbol{\nabla} \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\nabla} \hat{\mathbf{u}} + (\mu + \lambda) \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K (\mathbf{div} \hat{\mathbf{u}})^2 \geq \mu \|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2.
 \end{aligned}$$

**Démonstration :** On commence par remarquer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  et tous vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  dans  $\mathbb{R}^d$  on a  $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} \mathbf{u}_j \mathbf{v}_i = A : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})$ . Ainsi, pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ , on a  $(\nabla \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \zeta_\sigma) \cdot \mathbf{u}_\sigma = \nabla \hat{\mathbf{u}} : (\mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \zeta_\sigma)$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (-\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})_\sigma) \\
 &= \mu \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K (\nabla \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \zeta_\sigma) \cdot \mathbf{u}_\sigma + (\mu + \lambda) \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} \nabla \zeta_\sigma) \cdot \mathbf{u}_\sigma \\
 &= \mu \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \nabla \hat{\mathbf{u}} : (\mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \zeta_\sigma) + (\mu + \lambda) \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} (\mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla \zeta_\sigma) \\
 &= \mu \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \nabla \hat{\mathbf{u}} : \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} (\mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \zeta_\sigma) + (\mu + \lambda) \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} \sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} (\mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla \zeta_\sigma).
 \end{aligned}$$

Comme  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{u}_\sigma \zeta_\sigma(\mathbf{x})$ , il est facile de vérifier que  $\sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} (\mathbf{u}_\sigma \otimes \nabla \zeta_\sigma) = \nabla \hat{\mathbf{u}}$  et que  $\sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} (\mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla \zeta_\sigma) = \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}$ . On en déduit que :

$$\sum_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (-\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})_\sigma) = \mu \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K \nabla \hat{\mathbf{u}} : \nabla \hat{\mathbf{u}} + (\mu + \lambda) \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})^2 \geq \mu \|\mathbf{u}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2,$$

car  $\mu + \lambda \geq 0$ . ■

### Gradient de pression discret :

On reprend la formule (IV.12) pour la discrétisation du gradient discret de la pression. Étant donné  $\rho \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$ , la discrétisation du terme  $\nabla \wp(\rho)$  est définie par :

$$(\nabla p)_\sigma = \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\wp(\rho_L) - \wp(\rho_K)) \mathbf{n}_{K,\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L. \quad (\text{IV.22})$$

Ce choix de discrétisation particulier pour le gradient de pression satisfait un analogue discret de la propriété de dualité entre le gradient et la divergence, vérifiée dès que  $\mathbf{u}$  satisfait des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{u} + \int_\Omega \nabla p \cdot \mathbf{u} = \int_\Omega \operatorname{div}(p\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

### Lemme IV.7 (*Dualité gradient-divergence discrète*)

Pour tous  $(\rho, \mathbf{u}) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , on a l'égalité suivante :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \wp(\rho_K) (\operatorname{div} \mathbf{u})_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (\nabla p)_\sigma = 0. \quad (\text{IV.23})$$

**Démonstration :** En utilisant  $(\operatorname{div} \mathbf{u})_K = |K|^{-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}$  :

$$\begin{aligned}
 \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \wp(\rho_K) (\operatorname{div} \mathbf{u})_K &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \wp(\rho_K) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = K|L}} |\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (\wp(\rho_K) - \wp(\rho_L)) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\
 &= - \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}} \\ \sigma = K|L}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot \frac{|\sigma|}{|D_\sigma|} (\wp(\rho_L) - \wp(\rho_K)) \mathbf{n}_{K,\sigma} \\
 &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \mathbf{u}_\sigma \cdot (\nabla p)_\sigma. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Terme de convection :**

On décrit maintenant la discrétisation de l'opérateur de convection  $\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u})$  dans l'équation de quantité de mouvement discrète. Cette discrétisation est définie de manière à pouvoir reproduire au niveau discret le calcul continu suivant, crucial pour l'établissement du bilan d'énergie cinétique :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{u} \left( \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right)}_{=0} + \rho \left( \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right).$$

Il faut donc choisir les quantités  $\rho_{D_\sigma}^{n+1}$ ,  $\rho_{D_\sigma}^n$  et  $\mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma$  de manière à avoir une équation de conservation de la masse satisfaite sur toutes les mailles duales  $D_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ .

Soient donc  $(\rho, \mathbf{u}) \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  des champs de masse volumique et de vitesse discrets. La valeur de  $\rho_{D_\sigma}^k$  pour  $k = n$  et  $k = n+1$  est une interpolation de la masse volumique discrète du maillage primal vers le maillage dual définie par :

$$|D_\sigma| \rho_{D_\sigma}^k = |D_{K,\sigma}| \rho_K^k + |D_{L,\sigma}| \rho_L^k, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}, \sigma = K|L. \quad (\text{IV.24})$$

Pour le terme en divergence, afin de pouvoir considérer d'autres discrétisations temporelles (schémas semi-implicites), on définit l'approximation d'un opérateur de convection de vitesse plus général à savoir  $\mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ . Étant donné une masse volumique discrète  $\rho \in \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ , et deux champs de vitesses discrètes  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  et  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , cette discrétisation est construite comme suit :

$$\mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_\sigma = \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon}(\rho, \mathbf{u}) \mathbf{v}_\varepsilon, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (\text{IV.25})$$

$F_{\sigma,\varepsilon}(\rho, \mathbf{u})$  est le flux de masse à travers une face  $\varepsilon$  de la cellule duale  $D_\sigma$ . Sa valeur est fixée à zéro si  $\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}_{\text{ext}}$ . Pour  $\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}_{\text{int}}$ ,  $F_{\sigma,\varepsilon}(\rho, \mathbf{u})$  est une combinaison linéaire des flux de masses  $F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u})$  sortants de la maille  $K$  contenant  $\varepsilon$ . Plus précisément, les flux duaux sont calculés en vertu de la définition suivante :

**Définition IV.6 (Flux de masse duaux)**

Les flux à travers les faces du maillage dual sont définis de manière à satisfaire les trois contraintes suivantes :

(H1) Les flux duaux  $(F_{\sigma,\varepsilon}(\rho, \mathbf{u}))_{\varepsilon \subset K}$  inclus dans  $K$  sont solution du système linéaire suivant :

$$F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}) + \sum_{\varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma), \varepsilon \subset K} F_{\sigma,\varepsilon}(\rho, \mathbf{u}) = \frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma'}(\rho, \mathbf{u}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}(K). \quad (\text{IV.26})$$

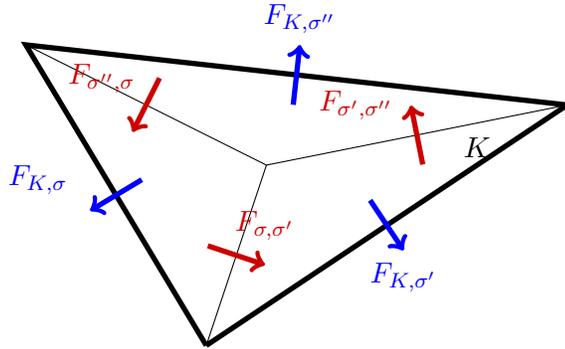
(H2) Les flux duaux sont conservatifs, i.e. pour toute face duale  $\varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}$ , on a  $F_{\sigma,\varepsilon}(\rho, \mathbf{u}) = -F_{\sigma',\varepsilon}(\rho, \mathbf{u})$ .

(H3) Les flux duaux sont des fonctions bornées des flux primaux  $(F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}))_{\sigma \in \mathcal{E}(K)}$  :

$$|F_{\sigma,\varepsilon}(\rho, \mathbf{u})| \leq \max \{ |F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u})|, \sigma \in \mathcal{E}(K) \}, \quad \forall \varepsilon \in \bar{\mathcal{E}}(D_\sigma), \varepsilon \subset K. \quad (\text{IV.27})$$

**Exemple IV.1 (Calcul des flux duaux en dimension  $d = 2$ )**

Notons  $\sigma, \sigma'$  et  $\sigma''$  les faces d'une maille  $K$ . Étant connus les flux primaux  $F_{K,\sigma}, F_{K,\sigma'}$  et  $F_{K,\sigma''}$  sortants à travers les faces de la maille  $K$ , on cherche les flux duaux inclus dans  $K$ . Notons les ainsi :  $F_{\sigma,\sigma'}$  le flux dual allant de  $D_\sigma$  à  $D_{\sigma'}$ ,  $F_{\sigma',\sigma''}$  celui de  $D_{\sigma'}$  vers  $D_{\sigma''}$  et  $F_{\sigma'',\sigma}$  celui de  $D_{\sigma''}$  vers  $D_\sigma$ .



Par construction du maillage dual, on a  $\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|} = 1/3$  (lorsque  $d = 2$ ) pour tout  $K \in \mathcal{M}$  et tout  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ . Ainsi, les hypothèses (H1) et (H2) expriment le fait que ces trois nombres sont solution du système linéaire :

$$\begin{aligned} F_{K,\sigma} + F_{\sigma,\sigma'} - F_{\sigma'',\sigma} &= \frac{1}{3} \left( F_{K,\sigma} + F_{K,\sigma'} + F_{K,\sigma''} \right), \\ F_{K,\sigma'} - F_{\sigma,\sigma'} + F_{\sigma',\sigma''} &= \frac{1}{3} \left( F_{K,\sigma} + F_{K,\sigma'} + F_{K,\sigma''} \right), \\ F_{K,\sigma''} - F_{\sigma',\sigma''} + F_{\sigma'',\sigma} &= \frac{1}{3} \left( F_{K,\sigma} + F_{K,\sigma'} + F_{K,\sigma''} \right). \end{aligned}$$

Ce système admet une infinité de solutions (faire la somme des lignes pour voir que les équations sont liées). Une solution particulière qui satisfait l'hypothèse (H3) est donnée par :

$$F_{\sigma,\sigma'} = \frac{1}{3}(F_{K,\sigma'} - F_{K,\sigma}), \quad F_{\sigma',\sigma''} = \frac{1}{3}(F_{K,\sigma''} - F_{K,\sigma'}), \quad F_{\sigma'',\sigma} = \frac{1}{3}(F_{K,\sigma} - F_{K,\sigma''}).$$

Pour compléter la définition du terme de convection dans la quantité de mouvement, il reste à donner l'expression de la vitesse  $\mathbf{v}_\varepsilon$  au niveau de la face duale  $\varepsilon$ . Comme déjà mentionné, une face duale se trouvant sur le bord de  $\Omega$  est aussi une face primale, et le flux à travers celle-ci est nul. Ainsi, les valeurs de  $\mathbf{v}_\varepsilon$  ne sont à définir que sur les faces duales internes. On choisit une valeur centrée :

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_\sigma + \mathbf{v}_{\sigma'}), \quad \text{pour } \varepsilon = D_\sigma | D'_\sigma.$$

On a le résultat suivant, qui justifie ces choix pour la discrétisation du terme de convection, et qui est crucial pour l'établissement d'une équation d'énergie cinétique discrète.

#### Lemme IV.8 (Conservation de la masse discrète sur les mailles duales)

Avec la définition (IV.24) de  $\rho_{D_\sigma}^n$  et  $\rho_{D_\sigma}^{n+1}$  et la Définition IV.6 des flux duaux  $F_{\sigma,\varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$ , une équation discrète de bilan de masse est satisfaite sur toutes les mailles duales :

$$\frac{|D_\sigma|}{\delta t}(\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma)} F_{\sigma,\varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}. \quad (\text{IV.28})$$

**Démonstration :** Soit  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$  avec  $\sigma = K|L$  une face interne. On écrit les bilans de masse discrets vérifiés sur les mailles  $K$  et  $L$  :

$$\begin{aligned} \frac{|K|}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} F_{K,\sigma}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) &= 0, \\ \frac{|L|}{\delta t}(\rho_L^{n+1} - \rho_L^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(L)} F_{L,\sigma}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) &= 0. \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par  $\frac{|D_{K,\sigma}|}{|K|}$  et la deuxième par  $\frac{|D_{L,\sigma}|}{|L|}$  puis on somme les deux équations ce qui donne, en utilisant (IV.24), (IV.26) et le fait que  $F_{K,\sigma}(\rho, \mathbf{u}) + F_{L,\sigma}(\rho, \mathbf{u}) = 0$ , que (IV.28) est satisfaite. ■

## IV.5 Propriétés a priori de la solution du schéma numérique

Dans cette section, nous énonçons et démontrons les propriétés vérifiées par toute solution du schéma numérique (IV.15)-(IV.16), sans préjuger de l'existence d'une telle solution.

On commence par la positivité de la masse volumique discrète, qui est une conséquence du choix décentré amont pour la masse volumique (IV.19).

### Proposition IV.9

Soit  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  des données initiales telles que  $\rho_0 \geq 0$ . Alors toute solution du schéma implicite (IV.15)-(IV.16) satisfait la positivité de la masse volumique discrète :

$$\rho_K^n \geq 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}, \forall n = 0, \dots, N.$$

Si  $\rho_0 > 0$  presque partout dans  $\Omega$ , alors  $\rho_K^n > 0$  pour tous  $K \in \mathcal{M}$  et  $n = 0, \dots, N$ .

### Remarque IV.2

La positivité de la masse volumique discrète est très importante en pratique car souvent, la pression  $\wp(\rho)$  n'est pas définie pour  $\rho < 0$ . Ainsi, s'il existe un  $\rho_K^n < 0$ , le calcul de  $\wp(\rho_K^n)$  renvoie un "NaN" et le calcul s'effondre...

**Démonstration :** Notons  $M = \text{card}(\mathcal{M})$  le nombre de mailles total. En ordonnant  $\mathcal{M}$ , on peut définir  $R^n = (\rho_K^n)_{K \in \mathcal{M}} \in \mathbb{R}^M$ . Comme  $\rho_0 \geq 0$ , on a que  $R^0 \geq 0$  par (IV.15), où l'inégalité est entendue composante par composante. L'équation de discrétisation de la masse (IV.1a) est équivalente au système linéaire  $(J + A) R^{n+1} = R^n$  où  $J = (\text{diag}(|K|))_{K \in \mathcal{M}}$  et où  $A$  est une matrice carrée de taille  $M \times M$  qui vérifie les propriétés suivantes grâce à la discrétisation *upwind* (IV.19) :  $A_{ii} \geq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, M$ ,  $A_{ij} \leq 0$  pour  $i, j = 1, \dots, M$ ,  $i \neq j$  et  $\sum_{i=1}^M A_{ij} = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, M$ . Notons que la somme précédente est prise sur les lignes et non les colonnes. On en déduit que la matrice  $(J + A)^T$  est une  $M$ -matrice car elle est à diagonale strictement dominante. Sa transposée  $J + A$  est donc elle aussi une  $M$ -matrice, elle préserve donc la positivité au sens où pour tout vecteur  $R \in \mathbb{R}^M$ ,  $(J + A)R \geq 0 \Rightarrow R \geq 0$  (l'implication est aussi vraie avec des inégalités strictes). Donc si  $R^n = (J + A) R^{n+1} \geq 0$ , on a aussi  $R^{n+1} \geq 0$  et on conclut par récurrence sur  $n$ . ■

Nous démontrons ensuite un équivalent discret de l'équation d'énergie cinétique satisfaite au niveau continu par les solutions (régulières) de (IV.1)-(IV.2) :

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \right) + \text{div} \left( \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \right) - \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} + \nabla \wp(\rho) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

**Proposition IV.10 (Bilan d'énergie cinétique discret)**

Soit  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  des données initiales telles que  $\rho_0 \geq 0$ . Alors toute solution du schéma implicite (IV.15)-(IV.16) satisfait une équation d'énergie cinétique discrète : pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , et  $0 \leq n \leq N-1$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta t} \left( \rho_{D_\sigma}^{n+1} |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} }} F_{\sigma, \varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} \\ - \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + (\nabla p)_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + R_\sigma^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

avec  $R_\sigma^{n+1} = \frac{1}{2\delta t} \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2$ .

**Démonstration :** On commence par démontrer un équivalent discret de l'identité vectorielle suivante, vérifiée au niveau continu :

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{u} \left( \partial_t \rho + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u}) \right) + \rho \left( \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right). \quad (\text{IV.30})$$

On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \left( \rho_{D_\sigma}^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n \right) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma \\ = \rho_{D_\sigma}^n \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \mathbf{u}^{n+1} \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} }} F_{\sigma, \varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}_\varepsilon^{n+1} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u}_\varepsilon^{n+1} = (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} + \mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1})/2 = \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + (\mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^{n+1})/2$  pour  $\varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}$ , que l'on injecte dans l'équation ci-dessus, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} \left( \rho_{D_\sigma}^{n+1} \mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n \mathbf{u}_\sigma^n \right) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1} \otimes \mathbf{u}^{n+1})_\sigma \\ = \left( \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} }} F_{\sigma, \varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \right) \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \\ + \rho_{D_\sigma}^n \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} }} F_{\sigma, \varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) (\mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^{n+1}), \end{aligned}$$

qui est bien un équivalent discret de (IV.30). Le terme entre parenthèses est nul grâce au bilan de masse discret (IV.28) vérifié sur les mailles duales. Ainsi, en prenant le produit scalaire de l'équation de quantité de mouvement discrète (IV.16b) par l'inconnue de vitesse  $\mathbf{u}_\sigma^{n+1}$ , on obtient l'égalité  $T_\sigma^{\text{conv}} - \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^{n+1})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + (\nabla p^{n+1})_\sigma \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} = 0$  avec :

$$\begin{aligned} T_\sigma^{\text{conv}} &= \left( \rho_{D_\sigma}^n \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} }} F_{\sigma, \varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) (\mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^{n+1}) \right) \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \\ &= \rho_{D_\sigma}^n \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n) \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'} }} F_{\sigma, \varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) (\mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^{n+1}) \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1}. \end{aligned}$$

#### IV.5. Propriétés a priori de la solution du schéma numérique

Dans le premier terme, on utilise ensuite l'identité  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2/2 - |\mathbf{b}|^2/2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2/2$  avec  $\mathbf{a} = \mathbf{u}_\sigma^{n+1}$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{u}_\sigma^n$  pour obtenir :

$$T_\sigma^{\text{conv}} = \rho_{D_\sigma}^n \frac{1}{2\delta t} (|\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - |\mathbf{u}_\sigma^n|^2) + \frac{1}{2\delta t} \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2 \\ - \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1}.$$

En écrivant que  $\rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 = \rho_{D_\sigma}^{n+1} |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - (\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2$ , on obtient :

$$T_\sigma^{\text{conv}} = \frac{1}{2\delta t} \left( \rho_{D_\sigma}^{n+1} |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \frac{1}{2|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} \cdot \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \\ + \frac{1}{2\delta t} \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^{n+1} - \mathbf{u}_\sigma^n|^2 - \left( \frac{1}{\delta t} (\rho_{D_\sigma}^{n+1} - \rho_{D_\sigma}^n) + \frac{1}{|D_\sigma|} \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathcal{E}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D_{\sigma'}}} F_{\sigma,\varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \right) \frac{|\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2}{2}.$$

En utilisant une deuxième fois l'équation de conservation de la masse discrète (IV.28) satisfaite sur les mailles duales, on voit que le dernier terme est nul ce qui conclut la preuve.  $\blacksquare$

Nous avons aussi un équivalent discret de l'équation d'énergie interne satisfaite par les solutions régulières de (IV.1)-(IV.2) :

$$\partial_t(\mathcal{H}(\rho)) + \text{div}(\mathcal{H}(\rho)\mathbf{u}) + \wp(\rho) \text{div} \mathbf{u} = 0.$$

#### Proposition IV.11 (Équation d'énergie interne discrète)

Soit  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  des données initiales telles que  $\rho_0 \geq 0$ . Alors toute solution du schéma implicite (IV.15)-(IV.16) satisfait une équation d'énergie interne discrète : pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , et  $0 \leq n \leq N - 1$  :

$$\frac{1}{\delta t} \left( \mathcal{H}(\rho_K^{n+1}) - \mathcal{H}(\rho_K^n) \right) + \text{div}(\mathcal{H}(\rho^{n+1})\mathbf{u}^{n+1})_K + \wp(\rho_K^{n+1}) (\text{div} \mathbf{u}^{n+1})_K + R_K^{n+1} = 0, \quad (\text{IV.31})$$

avec :

$$R_K^{n+1} = \frac{1}{2\delta t} \mathcal{H}''(\bar{\rho}_K^{n+1}) (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)^2 \\ + \frac{1}{2|K|} \sum_{\sigma=K|L} |\sigma| (\mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma})^- \mathcal{H}''(\bar{\rho}_\sigma^{n+1}) (\rho_L^{n+1} - \rho_K^{n+1})^2,$$

où  $\bar{\rho}_K^{n+1} \in [\min(\rho_K^{n+1}, \rho_K^n), \max(\rho_K^{n+1}, \rho_K^n)]$ ,  $\bar{\rho}_\sigma^{n+1} \in [\min(\rho_\sigma^{n+1}, \rho_K^{n+1}), \max(\rho_\sigma^{n+1}, \rho_K^{n+1})]$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$ , et pour  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a^- \geq 0$  est défini par  $a^- = -\min(a, 0)$ . Si  $\mathcal{H}$  est une fonction convexe, ce qui est le cas si  $\wp$  est croissante, alors  $R_K^{n+1}$  est positif.

**Démonstration :** La conservation de la masse discrète (IV.16a) se réécrit pour tout  $K \in \mathcal{M}$  :

$$\frac{1}{\delta t}(\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \rho_K^{n+1}(\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1})_K + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| (\rho_\sigma^{n+1} - \rho_K^{n+1}) \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} = 0. \quad (\text{IV.32})$$

Un développement de Taylor à l'ordre 2 pour  $\mathcal{H}$  donne l'identité  $\mathcal{H}'(a)(a-b) = \mathcal{H}(a) - \mathcal{H}(b) + \frac{1}{2}\mathcal{H}''(c)(a-b)^2$  pour tous  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , où  $c$  est compris entre  $a$  et  $b$ . On multiplie (IV.32) par  $\mathcal{H}'(\rho_K^{n+1})$  et on utilise cette identité avec  $a = \rho_K^{n+1}$  et  $b = \rho_K^n$  ce qui donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left( \mathcal{H}(\rho_K^{n+1}) - \mathcal{H}(\rho_K^n) \right) + \mathcal{H}'(\rho_K^{n+1}) \rho_K^{n+1} (\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1})_K \\ & + \frac{1}{|K|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}(K)} |\sigma| \mathcal{H}'(\rho_K^{n+1}) (\rho_\sigma^{n+1} - \rho_K^{n+1}) \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} + \frac{1}{2\delta t} \mathcal{H}''(\bar{\rho}_K^{n+1}) (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n)^2 = 0, \end{aligned}$$

où  $\bar{\rho}_K^{n+1}$  est compris entre  $\rho_K^{n+1}$  et  $\rho_K^n$ . La même identité utilisée dans la somme sur  $\sigma \in \mathcal{E}(K)$  avec  $a = \rho_K^{n+1}$  et  $b = \rho_\sigma^{n+1}$  donne (en observant que  $\rho_\sigma^{n+1} = \rho_L^{n+1}$  si  $\mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \leq 0$  et  $\rho_\sigma^{n+1} = \rho_K^{n+1}$  sinon) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left( \mathcal{H}(\rho_K^{n+1}) - \mathcal{H}(\rho_K^n) \right) + \operatorname{div}(\mathcal{H}(\rho^{n+1}) \mathbf{u}^{n+1})_K \\ & + \left( \rho_K^{n+1} \mathcal{H}'(\rho_K^{n+1}) - \mathcal{H}(\rho_K^{n+1}) \right) (\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1})_K + R_K^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

On obtient (IV.31) en remarquant que  $\rho \mathcal{H}'(\rho) - \mathcal{H}(\rho) = \wp(\rho)$  pour tout  $\rho$ . ■

Enfin, nous démontrons un équivalent discret de l'inégalité d'énergie totale (intégrée sur  $\Omega$ ) satisfaite par les solutions régulières de (IV.1)-(IV.2) :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(t) |\mathbf{u}(t)|^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(\rho(t)) + \mu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 |\mathbf{u}_0|^2 + \int_{\Omega} \mathcal{H}(\rho_0), \quad \forall t \in (0, T).$$

**Proposition IV.12 (Bilan d'énergie totale discret)**

Soit  $(\rho_0, \mathbf{u}_0)$  des données initiales telles que  $\rho_0 > 0$ . Alors toute solution du schéma implicite (IV.15)-(IV.16) satisfait un bilan d'énergie totale discret : pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ , et  $0 \leq n \leq N-1$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| \left( \rho_{D_\sigma}^{n+1} |\mathbf{u}_\sigma^{n+1}|^2 - \rho_{D_\sigma}^n |\mathbf{u}_\sigma^n|^2 \right) + \frac{1}{2\delta t} \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| \left( \mathcal{H}(\rho_K^{n+1}) - \mathcal{H}(\rho_K^n) \right) \\ & + \mu \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{1,2,\mathcal{M}}^2 + \mathcal{R}^{n+1} \leq 0, \quad (\text{IV.33}) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{R}^{n+1} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} |D_\sigma| R_\sigma^{n+1} + \sum_{K \in \mathcal{M}} |K| R_K^{n+1} \geq 0$ .

**Démonstration :** On somme  $|D_\sigma| \times$  (IV.29) sur les faces  $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$ ,  $|K| \times$  (IV.31) sur  $K \in \mathcal{M}$ , et, finalement, on somme les deux relations ainsi obtenues. Grâce à la conservativité des flux duaux (propriété (H2) de la Définition IV.6), le terme en divergence s’annule :

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \sum_{\substack{\varepsilon \in \tilde{\mathcal{E}}(D_\sigma) \\ \varepsilon = D_\sigma | D'_\sigma}} F_{\sigma, \varepsilon}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) \mathbf{u}_\sigma^{n+1} \cdot \mathbf{u}_{\sigma'}^{n+1} = 0.$$

Puis on utilise le fait que les opérateurs de gradient et divergence discrets sont duaux (voir (IV.23)), et la coercivité du terme de diffusion (voir le Lemme IV.6) pour obtenir (IV.33). ■

## IV.6 Autres discrétisations en temps

Comme le schéma (IV.16)-(IV.15) est implicite, trouver une solution au schéma revient à résoudre un système non-linéaire à chaque pas de temps. Grâce aux estimations *a priori* issues de l’équation d’énergie totale discrète (IV.33) et de la condition *inf-sup* permettant un contrôle de la pression, il est possible de montrer qu’étant donné un couple  $(\rho^n, \mathbf{u}^n)$ , il existe au moins une solution  $(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$  au schéma implicite (IV.16). La démonstration de ce résultat, qui fait appel à la théorie du degré topologique, sort du cadre de ce cours.

Cependant, bien que des solutions au schéma implicite (IV.16)-(IV.15) existent, la mise en œuvre pratique d’un tel schéma est très difficile car il n’existe pas de méthodes numériques rapides et robustes permettant d’inverser un tel système linéaire. C’est pourquoi d’autres discrétisations en temps sont utilisées en pratique dans les codes de calculs.

Nous présentons ci-dessous un schéma obtenu grâce à un découplage partiel des équations discrètes, et qui fait partie de la classe des schémas à correction de pression. Il consiste (après une étape de remise à l’échelle du gradient de pression) en deux étapes. Dans une première étape, dite de prédiction, une vitesse provisoire est calculée en résolvant une équation de quantité de mouvement linéarisée dans laquelle le flux de masse convectif et le gradient de pression sont explicites. Puis, dans une seconde étape, un problème non linéaire sur la pression est résolu, et la vitesse est corrigée de manière à imposer une équation de conservation de la masse discrète. Le schéma s’écrit :

Connaissant  $(\rho^{n-1}, \rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , calculer  $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et

$\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  à travers les étapes :

Mise à l'échelle du gradient de pression :

$$(\overline{\nabla p})_{\sigma}^n = \left( \frac{\rho_{D_{\sigma}}^n}{\rho_{D_{\sigma}}^{n-1}} \right)^{1/2} (\nabla p^n)_{\sigma}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

Étape de prediction – Résoudre en  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  :

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_{D_{\sigma}}^n \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma}^{n+1} - \rho_{D_{\sigma}}^{n-1} \mathbf{u}_{\sigma}^n) + \mathbf{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_{\sigma} - \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_{\sigma} + (\overline{\nabla p})_{\sigma}^n = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

Étape de correction – Résoudre en  $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  :

$$\frac{1}{\delta t} \rho_{D_{\sigma}}^n (\mathbf{u}_{\sigma}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma}^{n+1}) + (\nabla p^{n+1})_{\sigma} - (\overline{\nabla p})_{\sigma}^n = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M}.$$

Un autre schéma semi-implicite est donné par :

Connaissant  $(\rho^n, \mathbf{u}^n) \in L_{\mathcal{M}}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$ , résoudre en  $\rho^{n+1} \in L_{\mathcal{M}}(\Omega)$  et  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{H}_{\mathcal{E},0}(\Omega)$  :

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_K^{n+1} - \rho_K^n) + \mathbf{div}(\rho^{n+1} \mathbf{u}^{n+1})_K = 0, \quad \forall K \in \mathcal{M},$$

$$\frac{1}{\delta t} (\rho_{D_{\sigma}}^n \mathbf{u}_{\sigma}^{n+1} - \rho_{D_{\sigma}}^{n-1} \mathbf{u}_{\sigma}^n) + \mathbf{div}(\rho^n \mathbf{u}^n \otimes \mathbf{u}^n)_{\sigma} - \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}^n)_{\sigma} + (\nabla p^{n+1})_{\sigma} = 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}.$$

# Bibliographie

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [2] G. Ansanay-Alex, F. Babik, J.-C. Latché, and D. Vola. An  $L^2$ -stable approximation of the Navier-Stokes convection operator for low-order non-conforming finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 66 :555–580, 2011.
- [3] F. Boyer, F. Dardalhon, C. Lapuerta, and J.-C. Latché. Stability of a Crank-Nicolson pressure correction scheme based on staggered discretizations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74 :34–58, 2014.
- [4] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [5] M. Crouzeix and P.A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *RAIRO Série Rouge*, 7 :33–75, 1973.
- [6] B. Desjardins and E. Grenier. Low mach number limit of viscous compressible flows in the whole space. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1986) :2271–2279, 1999.
- [7] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions, and N. Masmoudi. Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier-Stokes equations with Dirichlet boundary conditions. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 78(5) :461 – 471, 1999.
- [8] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. *The finite volume method*. Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet and J.L. Lions Editors, North Holland, 2000.
- [9] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Discretisation of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general non-conforming meshes. SUSHI : a scheme using stabilisation and hybrid interfaces. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 30 :1009–1043, 2010.
- [10] T. Gallouët, L. Gastaldo, R. Herbin, and J.-C. Latché. An unconditionally stable pressure correction scheme for compressible barotropic Navier-Stokes equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42 :303–331, 2008.
- [11] T. Gallouët, R. Herbin, J.-C. Latché, and K. Mallem. Convergence of the marker-and-Cell scheme for the incompressible Navier–Stokes equations on non-uniform grids. *Foundations of Computational Mathematics*, Nov 2016.

- [12] L. Gastaldo, R. Herbin, and J.-C. Latché. An unconditionally stable finite element-finite volume pressure correction scheme for the drift-flux model. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 44 :251–287, 2010.
- [13] L. Gastaldo, R. Herbin, and J.-C. Latché. A discretization of phase mass balance in fractional step algorithms for the drift-flux model. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 31 :116–146, 2011.
- [14] P. Germain. *Mécanique*. Ellipses. Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1986.
- [15] R. Herbin, J.-C. Latché, and T.T. Nguyen. Explicit staggered schemes for the compressible Euler equations. *ESAIM : Proc.*, 40 :83–102, 2013.
- [16] L. Landau and E. Lifschitz. *Mécanique des fluides*. Editions MIR, Moscow, 1989.
- [17] J.-C. Latché and K. Saleh. A convergent staggered scheme for the variable density incompressible Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 2017.
- [18] P.-L. Lions. Mathematical topics in fluid mechanics – Volume 1 – Incompressible models. volume 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Oxford University Press, 1996.
- [19] P.-L. Lions and N. Masmoudi. Incompressible limit for a viscous compressible fluid. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 77 :585–627, 1998.
- [20] R. Rannacher and S. Turek. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 8 :97–111, 1992.
- [21] W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, second edition, 1991.
- [22] N. Therme. *Numerical schemes for the simulation of explosion hazards*. Theses, Université Aix-Marseille, December 2015.